Öneri, C.1, S.2
Ocak, 1995, ss.133-136

MATRİNGALE GENELLEŞTİRMELERİ VE BU GENELLEŞTİRMELER ALTINDA KORUNAN MATRİNGALE ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Arş.Gör.Ömer ÖNALAN*

ÖZ

Bu çalışmada, Amartlar, quismartingale, limitle martingale, zamanla adilleşen oyunlar, ilerleyici martingale, Nihai martingaleler gibi martingale genelleştirmeleri altında yedi önemli martingale özelliğinin korunması araştırılmaktadır.

1.Giriş: (Ω, F, P), bir ihtimal uzayı, her $n \leq 1$ için $\{F_n\}$ artan σ-cisimlerinin $(F \subseteq F_{n+1} \subseteq F)$ bir ailesi olsun $\{F_0\}$ aşikar σ-cisimi, $\{X_n\}$ ise $(\Omega, F, \{F_n\}_{n \xrightarrow{\infty} 1} P)$ stokastik bazına göre "uyarlımış" (adapted) tesadüfi değişkenlerin bir dizisi $n > 1$ için $d_1 = X_1$ ve $d_n = X_n - X_{n-1}$ olarak tanımlansın : T ise durma zamanı olsun.

$\{X_n, F_n : n \geq 1\}$ stokastik süreci aşağıdaki şekillerde tanımlanabilir.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} E\left|E(d_n|F_{n-1})\right| < \infty$, ise sürece "quasimartingale" denir.(Orey,s.1967)

(2) T, tüm sınırlı duruma zamanlarının kümesi olmak üzere, net$\{E(X_t) : t \in T\}$ yakınsaksa, sürece "Amart" denir. (Edgar ve Sucheston, 1977)

(3) Süreç hemen her yerde,

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \operatorname*{Sup}_{m>n} \left|E(X_m|F_n) - X_n\right| = 0 \quad (1.1)$$

koşulunu sağlıyorsa sürece, "Limitte Martingale" (Martingale in the limit) denir. (Mucci 1973)

(4) (1.1) koşulu ihtimal anlamında sağlanıyorsa, sürece "zamanla adilleşen oyyun" (a game fairer wiht time) denir.(Blake, 1970)

(5) $B_n = [E(X_{n+1}|F_n) = X_n]$

olmak üzere $n \geq 1$ için

$$B_n \subseteq B_{n+1} \text{ ve } P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = 1 \text{ olursa}$$

sürece "ilerleyici (Progressive) martingale denir. (Alloin, 1970)

(6) $P\left[E(Xn|Fn-1 \neq Xn, \text{sonsuz kere}\right] = 0$ oluyorsa, sürece "Nihai (Evantual) Martingale" denir. (Tomkins, 1975)

Bu martingale genelleştirmelerinin özellikleri ve aralarındaki ilişkiler; Bellow ve Dvartezky(1980), Blake(1978) Edgar ve Suceston(1976,1980)ve Tomkins 1975,1983)'in çalışmalarıyla açıklanmıştır.

Özellikle Edgar ve Suchreston (1977)'de martingale'lerin beş önemli özelliğinin amartlar tarafındanda sağlandığını, fakat bu özelliklerden sadece bir tanesinin "limitte martingale"ler içinde geçerli olduğu kanıtlanmaktadır.

2. Martingale Özellikleri

Stokostik süreçlerin bir χ ailesi için martingale özelliklerinden yedi tanesini çok genel olarak tanımlayıp her bir martingale genelleştirmesi için bu özelliklerin geçerliği araştırılacaktır.

2.1.A. En İyi Durma Özelliği: χ ailesinin her $\{X_n, F_n : n \geq 1\}$ süreci ve her T durma zamanı için $X^*n = X_{T \wedge n}$ olmak üzere $\{X^*_n, F_n : n \geq 1\}$ süreci tekrar χ ailesinin bir elemanı oluyorsa χ'ya en iyi durma özelliği altında kapalıdır denir.

Bu Özelliğin Amartlar için sağlandığı fakat zamanla adilleşen oyunlar ve limitte martingale'ler için sağlanmadı Edgar ve Sucheston (1976-1977) gösterilmiştir.

* M.Ü. İİBF İşletme Bölümü, Araştırma Görevlisi

Aşağıdaki teorem diğer üç martingale genelleşmesininde en iyi durma özellğini koruduğunu gösterir.

Teorem 2.1. İlerleyici martingale, Nihai martingale ve quasimartingale en iyi duma özelliğini korur.

2.2.B. Seçimlik Örnekleme χ'deki her $\{X_n, F_n: n \geq 1\}$ süreci ve sınırlı durma zamanlarının $T_n \uparrow \infty$ olacak şekilde $\{T_n\}$ dizisi için $\{X_{T_n}, F_{T_n}: n \geq 1\}$ sürecinde χ'de ise χ ailesine seçimlik örnekleme özelliğine sahiptir denir.

Edgar ve Sucheston(1976)'daki (1.6) numaralı önönerme seçimlik örnekleme özellğinin her armart için sağladığını göstermektedir. Diğer taraftan Edgar ve Sucheston (1977) de ise bu özelliğin, zamanla adilleşen oyyunlar veya limitte martingale'ler için sağlanmasına gerek olmadığına işaret edilmektedir.

Öte yandan, quasimartingale'ler ise seçimlik örnekleme özelliğini her zaman sağlarlar. Bununla birlikte düzgün sınırlı ve ilerleyici martingale'ler her zaman bu özelliği sağlamayabilirler.

2.3.C. Riesz Ayrışım Özelliği: χ ailesinin her $\{X_n, F_n: n \geq 1\}$ üyesi, $n \to \infty$ için $X_n = M_n + Z_n$ formunda yazılabilirse, χ ailesinin Riesz Ayrışımına sahip olduğu söylenir. Bu ayrışımda $\{M_n, F_n: n \geq 1\}$ bir martingale $\{Z_n, F_n: n \geq 1\}$ ise bir potansiyeldir. Yani $n \to \infty$ yaklaştığında $E(Z_t) \to 0$ dır.

Bu özellik sağlanıyorsa,

$$E(X_n)=E(M_n)+E(Z_n)=$$

$$=E(M_1)+E(Z_nT(\Omega))\to E(M_1)$$

olduğundan $\{E(X_n)\}$ dizisi yakınsak olmalıdır.

Edgar ve Sucheston (1976)'da amartlar ve quasimartingale'lerin Reisz Ayrışımına tabi olup, zamanla adilleşen oyunlar ve limitte martingale'lerin Reisz Ayrışımına uymadığı gösterilmiştir. Tomkins(1983)'de ise yakınsak olmayan $\{E(X_n)\}$ dizisi için $\{X_n\}$ Nihai martingalenin Riesz Ayrışımına uymadığı gösterilmektedir. İlerleyici martingale'lerde her zaman Reisz Ayrışımına uymamaktadır.

2.4.D. Maksimal Eşitsizlik Özelliği:

χ'da

$$\sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty$$

koşulunu sağlayan her $\{X_n\}$ dizisi için,

$\sup_{\lambda>0} \lambda P\left[\sup_{n\geq 1} |X_n| > \lambda\right] < \infty$ ise, maksimal eşitsizlik özelliğinin χ ailesi için geçerli olduğu söylenir.

Edgar ve Sucheston (1976,1977)'de amartların dolayısıyla quasimartingale'lerin bu özelliğe sahip oldukları, limitte martingaleler ve zamanla adilleşen oyunların ise genelde bu özelliği sağlamadıkları gösterilmiştir. Ayrıca ilerleyici martingale ve Nihai martingale ise bu özelliğe uymaz.

2.5.E. Hemen Heryyerde Yakınsama Özelliği:

χ'nun her L_1 sınırlı üyesi hemen hemen heryerde yakınsaksa, χ ailesinin hemen heryerde yakınsama özelliğine sahip olduğu söylenir. Tomkins (1983)'de Nihai martingale ve zamanla adilleşen oyyunların bu özelliğe her zaman sahip olmadığı gösterilmiştir.

2.6.F. Dönüştürme Özelliği:

$\{V_n\}$, F_{n-1} ölçülebilir tesadüfi değişkenlerin bir dizisi olsun aşağıdaki özellikler sağlandığında χ ailesinin dönüşüm özelliğine sahip olduğu söylenir. (Burkholder, 1966)

χ'de verilmiş bir $\{X_n, F_n: n \geq 1\}$ süreci için

i-$(T_n, F_n; n \geq 1)$ dönüşümü χ'dadır. Burada

$$\left(T_n = \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}),\ n \geq 1\right) \text{ dır.}$$

ii-$\{X_n\}$, L_1-sınırlı ise $\{T_n\}$ dizisi

$$\left[\sup_{n\geq 1} |V_n| < \infty\right]$$

olayı üzerine, hemen heryerde yakınsar. Alloin(1970) bu özelliğin ilerleyici martingale için sağlandığını gösterir.

Bir quasimartingale'in her dönüşümü

$$\left[\sup_{n\geq 1} |V_n| < \infty\right]$$

olayı üzerinde hemen heryyerde yakınsaktır.

2.7.G. Kare Toplanabilme Özelliği: χ'nun L1-sınırlı her elemanı

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Xn - Xn-1)^2 < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa, χ ailesine her kare toplanabilme özelliğine sahiptir denir.

Alloin (1970)'de bu özelliğin ilerleyici martingale'ler için sağlandığı fakat nihai martingaleler için sağlanamadığı gösterilmiştir.

Bu özellik limitle martingale ve zamanla adilleşen oyunlar için başarısız olabilir. Fakat quasimartingale'ler için sağlanır.

3.L1 - Baskın Durum:

Burada $\{X_n\}$ dizisinin L1 - Baskın olduğu, yani,

$$E(Y) < 0 \text{ ve}$$

$$n \geq 1 \text{ iç in } |Xn| \leq Y \quad (3.1)$$

olduğu varsayılacaktır.

Bir amart ve bir martingale notasyonun (3.1) koşulu altında denk olduğu, Edgar ve Sucheston (1977) ve Blake(1978)'de gösterilmiştir. L1 - Baskın durumda, limitte martingale her zaman A,B,C ve D özelliklerini sağlar. (Blake,1981)

Bir skotastik dizinin (3.1) koşulu altında bir "zamanla adilleşen oyun" olması için gerek ve yeter koşul; ihtimal anlamında yakınsıyor olmasıdır. (Mucci, 1973) Bu da L1 - Baskın "zamanla adilleşen bir oyunun" seçimlik örnekleme özelliğini sağladığını gösterir. Ayrıca bu Riesz Ayrışım özelliğinide sağlamaktadır.

L1 - Baskın Nihai martingale'lerin E,F ve G özelliklerini sağladığı Tomkins (1983)'de görülebilir. Ayrıca Tomkins (1975)'de ilerleyici martingale'lerin ve Nihai martingalelerin C özelliğini sağladığını işaret edilmektedir.

Sonuç:

Çalışmanın sonuçları aşağıdaki tablo ile özetlenebilir. Burada "*" özelliğin genelde değilde L1 - Baskın durumda sağlandığını göstermektedir.

Martingale Genelleştirmeleri		*Martingale Özelliği*							
	A	B	C	D	E	F	G		
Quasimartingale		E	E	E	E	E	H	E	
Amartlar		E	E	E	E	E	H	H	
Limitte Martingaleler		H*	H*	H*	H*	E	H	H	
Zamanla Adilleşen Oyunlar			H*	H*	H*	H*	H	H	H
İlerleyici Martingaleler		E	H	H*	H*	E	E	E	
Nihai Martingaleler	E	H	H*	H*	H*	H*	H*		

Kaynaklar

1) Alloin, C. (1970) Martingales Progressives, Cahiers Center Etudes Rech. Oper., 12,201-210

2) Austin, D. G. (1966) A sample function property of martingales. Ann. Math. Statist. 37, 1396-1397

3) Bellow, A. and Dvoretzky, A. (1980) On Martingales in the limit. Ann. Probab. 8, 602-606

4) Blake, L.H. (1970) A generalization of martingales and two consequent convergence theorems, pacific J. math. 35, 279-283

5) Blake L.H. (1978) Every amart is a martingale in the limit J. London Math. Soc. 18, 381-384

6) Blake, L.H. (1973) Further result concerning games wich become fairer with time. J.London. Math. Soc. 6,311-316

7) Burkholder D.L. (1966) Martingale transforms. Ann. Math. Statist 37, 1494-1504

8)Chow, Y.S. and Teicher, H.(1988) Probability Theory: Independance, Interchangeability, Martingales. Sec edition Springer- Verlag, NewYork

9) Edgor G.A. and Sucheston L.(1977) Martingales in the limit and amarts. Proc. Amer. Math. Soc. 67, 315-320

10) Edgor G.A. and Sucheston L.(1976) Amart: a class of asymptotic martingales. A Discrete parameter. J. Multivorrate anal. 6, 139-221

11) Mucci, A.G. (1973) Limits For Martingale-like sequences. Posifre. J.Math. 48,197-202

12) Orey, S. (1967) F-Processes. Proc. 54h. Berkley symp. Math. statist Probab. 2, 304-313

13) Tomkins, R.J. (1983) Martingale generalizations. Topics in statistic: Proceedings of the 1981 cnadian conferrance on Applied Statistics, Marcel Dekker.