Öneri, C.1, S.3.
Haziran, 1995, ss.153-156

İHTİMAL ÖLÇÜMÜNÜN DEĞİŞİMLERİ VE MARTİNGALE UZAYLARININ KESTİRİLEBİLİR TEMSİLİ

Arş. Gör. Ömer ÖNALAN*

Bu çalışmada, ihtimal ölçümünün bir değişimi altında martingale uzaylarının kestirilebilir temsili araştırılıyor. Özel semimartingale lerin kanonik ayrışımı, ölçümün bir değişimi altında, martingalelerin minimal doğuray alt kümelerinin kardinalitesini belirlemek için basit bir yol sağlıyor.

1.Giriş

Martingalelerin birkısım yüksek boyutlu uzayları, kestirilebilir temsiller yolu ile martingale'lerin sabit bir vektörü tarafından gerilebilir. Bu özellik stokastik kontrol ve menkul kıymet ticaretinde uygulama bulmaktadır.

Burada, farklı ihtimal ölçümleri altında martingale alt uzayları arasındaki ilişkileri karekterize ediyoruz.

Girsinov Teoremi: yolu ile bir ihtimal ölçümü altında, Lokal martingalelerin bir doğuray vektörü, yeni bir ihtimal ölçümü altında lokal martingalelerin bir doğuray vektörüne tasvir ediliyor.

2.Temel kavramlar:

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ tam ihtimal uzayı, $F=\{\mathcal{F}_t, t\in R_t\}$ olağan şartları sağlayan filtrasyon olsun. ilerleyen kısımlarda daha ziyade $(\Omega,\mathcal{F}_t,F,P)$, "filtre edilmiş ihtimal uzayı" üzerinde çalışacaktır.

Bir Özel Semimartingale; $X=X^{\Delta}+X^{b}$ formunda bir ayrışıma sahip bir süreçtir. Burada

X^{Δ} : lokal martingale

X^{b} : kestirilebilir sonlu değişimli süreç

X : sürecinin yukardaki formdaki ayrışımına *özel semimartigalle'inin kanonik ayrışımı* denir.

$X=(X_1,\ldots X_n)$, bileşenleri özel semimartingaleler olan R^n -değerli bir süreç ise $(X^{\Delta}_1, X^{\Delta}_2, \ldots, X^{\Delta}_n)$ için X^{Δ} yazıyoruz. Özel semimartingalelerin bir kümesini $\mathcal{X}$ ile gösterirsek, $\{X^{\Delta} : X\in\mathcal{X}\}$ lokal martingalelerinin kümesini $\mathcal{X}^{\Delta}$ ile göstereceğiz.

Şimdi $\mathcal{R}^n$ - değerli semimartingalelere göre reel-değerli stokastik integrallerin varlığı için gerekli olan genel şartları verelim:

M, $\mathcal{R}^n$ değerli bir lokal martingale olsun. O zaman artan, sonlu değişimli, reel-değerli bir C süreci ve nxn'lik yarı-belirli (semi-definite) matris değerli $[X_i, X_j]=C_{ij}$, **C** olan $C=(C_{ij})$ süreci vardır. $[\,.\,,\,.\,]$ kuadratik değişimi gösteriyor.

A.B, A'nın B'ye göre eğri-eğri stiltjes integrali için kullanılıyor.

$$L(M):\left[\left(\sum_{i,j} H_i C_{ij}\cdot H_j\right)\cdot C\right]^{1/2} \quad \text{ifades}$$

i lokal integrallenebilir olan, $\mathcal{R}^n$ değerli $H=(H_1,\ldots,H_n)$ kestirilebilir süreçleri kümesini gösteriyor.

$H\in L(M)$ ise H.M stokastik integrali, her reel değerli N lokal martingale'i için,

$$[H.M,N]=\left(\sum_i H_i K_i\right).C \qquad (1)$$

eşitliğini sağlayan tek lokal martingale olarak tanımlanabilir. Burada $\mathbf{K}_i$, $[M_i,N]=K_i.C$'yi sağlayan seçimlik süreci gösteriyor.

* M.Ü. İİBF, İşletme Bölümü, Araştırma Görevlisi

$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)$'nin $\mathcal{R}^n$ - değerli sol limitlerle sağ sürekli bir sonlu değişim süreci olması durumunda bir artan, reel değerli, V sonlu değişim süreci ve

$\mathbf{A}_i=\mathbf{v}_i.\mathbf{V}$ olan $\mathbf{V}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ süreci vardır.

A kestirilebilirse, v' yi ve V'yi kestirilebilir olarak seçebiliriz.

$\mathrm{L}(\mathbf{A})$: $\left|\sum_i H_i v_i\right|.V$ bir sonlu değişim süreci olacak şekilde, $\mathcal{R}^n$ - değerli kestirilebilir $\mathbf{H}=(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,...,\mathbf{H}_n)$ süreçleri kümesini göstersin.

$\mathbf{H}\in\mathbf{L}(\mathbf{A})$ için H.A stokastik integrali,

$\left(\sum_i H_i v_i\right).V$ stiljes integrali olarak tanımlanır.

X, $\mathcal{R}^n$ değerli bir semimartingale olsun.

L(X): X'in $\mathcal{R}^n$ - değerli bir M lokal martingale ve $\mathcal{R}^n$ - değerli bir A sonlu değişim süreci için, $\mathbf{H}\in\mathbf{L}(\mathbf{M})\cap\mathbf{L}(\mathbf{A})$ olacak şekildeki, R^n - değerli H kestirilebilir süreçlerinin kümesini göstersin.

H.X stokastik integrali, X'in ayrışımına bağlı olmayan, H.M ve H.A 'nın toplamı olarak tanımlanır.

Bu tanım;

$\sum_i H_i X_i$ stokastik integral bileşenlerinin toplamına genişletilebilir.

Herhangi bir $q\in[1,\infty]$ için, semimartingaleler uzayı üzerindeki pozitif genişletilmiş reel değerli bir $\|\bullet\|_q$ fonksiyoneli, herhangi bir X semimartingale'i için

$$\|X\|_q = \left\|\operatorname*{Sup}_{t\geq 0}[X, X]_t^{1/2}\right\|_{L^q(\Omega,F,P)}$$

olarak tanımlanır.

$\mathcal{M}^q$: M=0 ve $\|M\|_q < \infty$ olacak şekildeki M lokal martingalelerin alt uzayını göstersin.

Bilindiği gibi, ayrıştırılamaz süreçlerin bir denklik sınıfı olan $\mathcal{M}^q$ $\|\bullet\|_q$normu altında Bir *Banach uzayı* dır.

$\mathcal{M}^q$ nun bir *Kararlı Altuzay* 'her $\mathbf{M}\in\mathcal{M}$,$\mathbf{A}\in\mathcal{F}_0$ T- durma zamanı için, $\mathbf{1}_\mathbf{A}\mathbf{M}^T$ olacak şekildeki $\mathcal{M}^q$ 'nın $\|\bullet\|_q$ - kapalı bir M alt vektör uzayıdır.

Bu, M nin $\mathcal{M}^q$ nin kararlı bir alt uzayı olması için gerek ve yeterli koşul; bileşenleri M'nin elemanları olan herhangi bir M vektör lokal martingale'i için.

$$\mathcal{L}^q(\mathcal{M}) \equiv \{\mathbf{H.M}\in \mathcal{M}^q\,;\, \mathbf{H}\in\mathbf{L}(\mathbf{M})\} \subset \mathcal{M}$$

olması anlamında, stokastik integrasyon altındaki kararlılığa denktir.

Lokal martingalelerin herhangi bir $\mathcal{M}$ kümesi için: $\mathcal{L}^q(\mathcal{M})$ Tüm $\mathbf{M}\in\mathcal{M}$ için,

$\mathcal{L}^q(\mathcal{M})$ yi ihtiva eden $\mathcal{M}^q$ nun enküçük kararlı alt uzayını göstersin.

$\mathcal{L}^q(\mathcal{M})$, $\mathbf{U}_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\mathcal{L}^q(\mathcal{M})$ nin kapanışıdır. şüphesiz. lokal martingalelerin herhangi bir M vektörü için $\mathcal{L}^q(\mathcal{M})$ nin kendisi, $\mathcal{M}^q$ nun bir kararlı altınayıdır. Herhangi bir (adapted) uyarlanmış $\mathcal{A}$ süreci için;

$\mathcal{A}_{lok}$: $\mathcal{A}$'da "lokal" olan süreçlerin kümesini göstersin. Yani, $T_n\to\infty$ olacak şekilde (T_n) durma zamanlarının artan bir dizisi ve tüm n için $\mathbf{A}^{T_n}\in\mathcal{A}$ ise $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$ dir.

Lokal martingalelerin herhangi bir M vektörü için,

$\mathcal{L}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{H.M};\, \mathbf{H}\in\mathbf{L}(\mathbf{M})\}$ olsun.

Lokal martingalelerin herhangi bir M vektörü için;

$\mathcal{L}(\mathbf{M})_{lok} = \mathcal{L}(\mathbf{M})$ dir. (2)

Eğer $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^q$ 'nun bir kararlı altuzayı ise $\mathcal{M}$ 'nin bir (q-generatör) *q-Gericisi;* bileşenleri

$\mathcal{M}_{lok}$'un elemanları olan lokal matringalelerin bir M vektörüdür.

$\mathcal{M}$ bir q-gericiye sahip değilse $\mathcal{M}$'nin q-boyutu sonsuzdur. Eğer $\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$ ise onun q-boyutu sıfır olarak tanımlanır.

3.İhtimalin Değişimi:

Q,{Ω, $\mathcal{F}$} üzerinde P'ye göre mutlak sürekli bir ihtimal ölçümü olsun. Bu durumda, Q altında tanımlanan kavramları $(\Omega, \mathcal{F}^Q, F^Q, Q)$ "filtre edilmiş ihtimal uzayı üzerinde çalışıyoruz. Burada $\mathcal{F}^Q$ ve F^Q, Q için "tamamlama"ları gösteriyor.

P ve Q ihtimal ölçümlerini kullanarak tanımlarımızı $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ ve $(\Omega, \mathcal{F}^Q, F^Q, Q)$ gibi iki filtre edilmiş ihtimal uzayı için ayırıyoruz.

S(P) ve $S_p(Q)$ sırası ile samimartingale ve özel semimartingale uzaylarını göstersin

S(Q) ve $S_p(Q)$ 'da benzer şekilde tanımlanır. şu gerçeği kullanıyoruz $S(P) \subset S(Q)$ ve P altında bir semimartingale'in kuadratik varyasyonu, onun Q altındaki kuadratik varyasyonunun bir Q -versiyonudur.

ξ, P-martingale'i dQ/dP *Radon-Nikodym türevi* için *Yoğunluk süreci*'ni göstersin. tüm $t \geq 0$ için dQ/dP 'nin $\mathcal{F}_t$'ye kısıtlanması ile ξ(t) eşit kabul ediyoruz.

$M \in \mathcal{M}^1_{p,\,lok}$ olsun. O zaman $\mathbf{m} \in \mathbf{S_p(Q)}$ olması için gerek ve yeter koşul;

$$\mathbf{M}^{\Delta Q} = (\xi^{-1}) - \langle \mathbf{M}, \xi \rangle^P \text{ ve } \mathbf{M}^{\triangle Q} = \mathbf{M} - \mathbf{M}^{\Delta Q}$$

olması durumunda,

[M, ξ]nin lokal integrallenebilir değişim olmasıdır.

$q \in [1, \infty]$ ve $q^* \in [1, \infty]$, $1/q + 1/q^* = 1$ eşitliğini sağlasın, $\xi - \xi_0 \in \mathcal{M}^{q^*}_{p,\,lok}$ olması durumunda,

$$\mathcal{M}^{q^*}_{p,\,lok} \subset S_p(Q) \qquad (3)$$

X herhangi bir $\mathcal{R}^n$ - değerli P-semimartingale olsun. $H \in L_p(X)$ ise o zaman $H \in L_q(X)$ ve $H^P.X$, $H^Q.X$ 'in bir *Q-versiyonu* denir.

Herhangi bir $M \in \mathcal{M}^1_{Q,\,lok} \cap S_p(P)$ için,

$\mathbf{M}^{\Delta P}$ ve $\mathbf{M}^{\triangle P}$ nin her ikiside $S_p(Q)$ 'dedir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

a) $\mathbf{M}^{\triangle P \triangle Q} = M$

b) $\mathbf{M}^{\triangle P \Delta Q} = \mathbf{M}^{\Delta P}$

c) $\mathbf{M}^{\Delta P \triangle Q} = \mathbf{M}^{\Delta P}$

d) $\mathbf{M}^{\Delta P \triangle Q} = 0$

İhtimal ölçümünün bir değişimi altında kararlı altuzaylar arasındaki temel ilişkiyi gösteren başlangıç niteliğinde ki bir sonuç aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

dQ/dP 'nin sınırlı olduğu kabul edilsin. Herhangi bir $q \in [1, \infty]$ ve lokal martingalelerin bir M kümesi için

$\mathcal{L}^q_P(\mathcal{M}^{\triangle Q}) \subset \mathcal{L}^q_Q(\mathcal{M}^{\triangle Q})$ dir. Buna ilaveten, dQ/dP var ve sınırlı ise,

$$\mathcal{L}^q_P(\mathcal{M})^{\triangle Q} = \mathcal{L}^q_Q(\mathcal{M}^{\triangle Q}) \quad (4)$$

olur. (Dallacherie ve Meyer, 1982, s.95)

Lokal olarak sınırlı sıçramalara sahip bir semimartingale, ihtimal ölçüsünün herhangi bir mutlak değişimi altında bir özel semimartingale'dir.

Bileşenleri *Q-Özel Semimartingale*'ler olan $M=(M_1, M_2, \ldots, M_n)$'nin $\mathcal{M}^q_p$ nin bir q-gericisi ve 1/ξ nun lokal olarak sınırlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) $\mathcal{L}^q{}_P(\mathcal{M})^{\Delta Q} = \mathcal{M}^q{}_Q$

ii) q-Boy$(\mathcal{M}^q{}_Q) \leq$ q-Boy $(\mathcal{M}^q{}_P) \leq n$

q=1 olması durumunda $1/\xi$ 'nun lokal olarak sınırlı olması şartı, $\mathcal{M}^1{}_Q \subset S_p(P)$ şartı ile yer değiştirir.

KAYNAKLAR

1-CHUNG, K.L. and WILLIAMS. R.J. (1983) *Introduction to Stochastic Integration.* Birkhouser, Boston.

2-DELACHERIE, C. and MEYER, P.A. (1982). *Probabilities and potential B: Theory of Martingales,* North-Holland Publishing com. New York

3-DUFFIE, D. (1986), *Stochastic Equilibria: Existence, spanning Number, and the "No Expected Financial Gain From Trade" Hypothesis.* Econometrica, vol. 54, no. 5, 1161-1183

4-GIRSINOV, I.V. (1960. *On Transforming a certain class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measurer.* Theory Probab. Appl. 5, 283-301

5) JACOD, J. (1977) *A general Theorem of Representation for Martingales.* Proceedings of the Symposia in pure math 31, 37-53

6) JACOD,S and SHİRYAEV, A.N (1987), *Limit Theorems for stochastic Processes,* Springer-Verlog, Berlin Heidelberg.

7) KABANOV, VU, LİPSTERS, R.S., SHİRYAEV, A.N. (1986), *On The Variation Distance for Probability Measures Defied on a Filtered Space,* Probab, Rel. Fields, 71, 19-36

8) LİPSTER, R.S. (1976), *On a Representation of Local Martingales.* Theory Probab. Appl. 21, 718-726

9) OREY .S.(1974) *Radon-Nikodym Derivatives of Probability Measures: Martingale Methods.* Publ. Dept. Found. Math. SCI. Tokyo University of Education.

10) ÖNALAN, Ö. (1995) *Martingale Genelleştirmeleri ve Bu Genelleştirmeler Altında Korunan Martingale Özellikleri üzerine bir İnceleme.* M.Ü. Sos.Bil.Ens.Dergisi Öneri, Sayı:2, Cilt:1, 133-136

11)PROTTER, P. (1986) *Semimartingales and measure-preserving flows.* Ann. İnst. Henri Poincare, 22, 127-147

12) SCHUPPEN, J. H and WONG.E. (1974) *Transformations of Local Martingales Under a Change of Law.* Ann. Probab., g, 879-888