www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 1 (2008) 144-163

İstatistikçiler Dergisi

Bağımlı aktüeryal risklerin çok değişkenli zaman serisi modeli

Selim Dağlıoğlu

T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı
Strateji Geliştirme Başkanlığı
06040, Ulus, Ankara, Türkiye
selim.daglioglu@gmail.com

Cenap Erdemir

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800, Beytepe, Ankara, Türkiye
cenap@hacettepe.edu.tr

Özet

Aktüeryal risk modelleri genellikle bağımsızlık varsayımları altında kurulur. Ancak bu varsayımlar, çeşitli sebeplerle poliçeler arasında bağımlılık oluşması ya da herhangi bir dönemdeki hasarlar ile geçmiş dönemlerde gerçekleşmiş hasarlar arasında ilişki oluşması gibi durumlarda sağlanmaz. Bu çalışmada, bağımlı sigorta kollarından oluşan bir portföydeki bağımlı sigorta kollarına ait prim ve hasar değişkenlerinin kendi gecikmeli değerleri ve portföydeki bağımlı sigorta kollarına ait tüm prim ve hasar değişkenlerinin gecikmeli değerleri ile açıklandığı çok değişkenli birinci derece otoregresif model ve modelin çeşitli koşullardaki davranışları sayısal örneklerle incelenmiştir .

Anahtar Sözcükler: Bağımlı riskler; Çoklu zaman serileri; Düzeltme katsayısı; Lundberg tipi eşitsizlikler.

Abstract

Multivariate time series model of dependent actuarial risks

Actuarial risk models are generally constructed within the framework of independency assumptions. But these assumptions do not hold in many situations like as because of many reasons there is the correlation between lines of business or between the current claim and previous claims. In this study, a multivariate first-order autoregressive time series model used for modeling the premiums and claims of all dependent classes of business is reviewed and behaviors of the model under the various conditions are investigated by the numerical examples.

Key Words: Adjustment coefficient; Dependent risks; Lundberg-type inequality; Multivariate time series.

1. Giriş

Sigortacılıkta genellikle aynı portföyde bulunan poliçelerde oluşan hasarların karşılıklı olarak bağımsız oldukları varsayılır. Ancak bu bağımsızlık varsayımının gerçeği her zaman yansıtmayacağı açıktır. Şöyle ki;

- Portföyde aynı kişiye ait çeşitli poliçeler olabilir. Bu durumda poliçe sayısı sigortalı kişilerin sayısına eşit değildir. Örneğin, portföyde aynı kişiye ait sağlık sigortası poliçesi olabileceği gibi motorlu araç sigortası poliçesi de olabilir. Bu durumda kişi aracıyla büyük bir kaza yaptığında her iki poliçede de hasar oluşur,

- Aynı portföyde bir çifte ait poliçeler olabilir. Çiftlerin aynı ortamda yaşamaları, aynı beslenme alışkanlıklarının olması, çeşitli felaketlerde, kazalarda ya da hastalıklarda birlikte olmaları v.b. nedenlerle çiftlerin ölümlülükleri arasında bağımlılık vardır. Çeşitli olaylarda her ikisi de daha fazla ya da daha az aynı riske maruz kalır,

- Bilindiği gibi bazı meslek kollarında çalışanların ortalama ölüm yaşları, işin niteliğinden kaynaklanan nedenlerden (sağlıksız çalışma ortamı, stres, kaza riskinin fazla olması, v.b.) dolayı düşüktür. Bu nedenle, bir emeklilik fonu aynı meslek kolunda çalışan kişilerin poliçelerini kapsadığında poliçeler arasında bağımlılık oluşur,

- Eğer belirli bir bölgedeki ya da kuruluştaki sigortalı kişilerin oranı yeteri kadar fazla ise fırtınalar, patlamalar, depremler, salgın hastalıklar gibi felaketler sigortacı için hasarların birikimine neden olabilir. Meydana gelen bir felaketten sonra portföyde bulunan birçok poliçede hasar oluşabilir [8].

- Kaza sigortasındaki (casualty insurance) çeşitli süreçler ilişkili rastlantı değişkeni içerir. Örnek olarak, aşağıda belirtilen hasarları içeren seyahat sigortası poliçeleri ele alınsın. Bu sigorta poliçesinin kapsadığı birçok hasar birbiri ile ilişkilidir. Örneğin, tıbbi bedeller, geri dönme bedelleri, ölüm durumunda toptan ödenen bedel, sakatlık durumundaki tazminat (maluliyet derecesine orantılı olarak), bagaj kaybı, farklı seyahat yardımları v.b. sigorta türleri altındaki hasarların bazıları açık bir şekilde pozitif ilişkili iken (tıbbi bedeller ve sakatlık ödemeleri) diğerleri ise negatif ilişkilidir (ölüm ve maluliyet ödemeleri). Araba sigortasında tipik bir kontrat; mekanik hasarlar, beden yaralanmaları ve hatta avukat ücretleri gibi iki ya da daha fazla sigorta türünü içerir. Bu tip bir durumda tek bir kazanın farklı sigorta türleriyle ilişkili hasarlar üretmesi olasıdır: mekanik hasar onarma bedeli, vücut yaralanmaları durumunda tıbbi ve hastaneye yatırma ücretleri için ödeme ve mahkemede savunma ücreti v.b.[5].

Literatürde risklerin bağımlılığına sebep olan bu tür ilişkili sigorta kollarına ve poliçelerine ait bağımlı risk modelleri; Dhaene and Goovaerts (1997), Ambagaspitiya (1998, 1999), Wang (1998), Denuit et. al. (1999), Cossette and Marceau (2000), Cossette et. al. (2000), Müller and Pflug (2001), Goovaerts and Kaas (2002), Wu and Yuen (2003) gibi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Bir portföydeki poliçelerde oluşan hasarlar arasında yukarıda bahsedilen ilişkilerden başka, genel olarak geçmiş dönemde portföyde bulunan poliçelerin bir kısmının mevcut dönemde de portföyde kalmasından kaynaklanan, poliçelerde geçmiş dönemde oluşan hasarlar ile mevcut dönem hasarı arasındaki ilişki oluşması nedeniyle risklerin bağımlılığına neden olan ilişki şekli de vardır. Bu türde bağımlı risklerin modellenmesinde ise zaman serileri yaklaşımı kullanılır ve iflas olasılıklarının gösteriminde martingale eşitsizliklerinden yararlanılır. Bu türde bağımlılığın olduğu bağımlı risk modelleri; Gerber(1982), Promislow(1991), Bowers(1997), Yang and Zhang (2003), Zhang (2005) gibi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Aynı kişiye ait farklı sigorta kollarına ilişkin poliçeler bulunması, bir çifte (karı-koca) ait poliçelerin bulunması, belli bir bölgedeki ya da kuruluştaki kişilere ait poliçelerin sigortacının portföyündeki oranının fazla olması gibi durumlar nedeniyle bağımlılığın söz konusu olduğu p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföydeki poliçelerin izleyen yılda da portföyde kalması nedeniyle hasar ve prim miktarları ile geçmiş dönem hasar ve prim miktarları arasında bağımlılık oluşur. Bu tur bağımlı risklerden oluşan portföylerde prim ve hasar süreçleri, çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyar.

Bu çalışmada p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföydeki prim ve hasar süreçlerinin çok değişkenli birinci derece otoregresif modeli, iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin c sabit miktarlar ile toplandığı hasarların ise iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu duruma ilişkin model incelenmiştir. Bu modeller geçerli olduğunda iflas olasılıklarının üst sınırlarının nasıl hesaplanacağı ile bu modellere ait hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıklarının üst sınırlarını nasıl etkilediği de incelenmiştir. Ayrıca bağımlılığın ve modellerdeki hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıklarının üst sınırları üzerindeki etkisinin gösterilmesi için sayısal örnekler verilmiştir.

2. Bağımlı risklerin çok değişkenli zaman serisi modelleri

Bu bölümde, p bağımlı sigorta koluna ait prim ve hasar süreçlerinin birlikte gösterildiği vektör sürecinin birinci derece çok değişkenli otoregresif modeli ile bu modelde özel bir durum olarak primlerin sabit miktarlarla toplandığı iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için kullanılan model incelenmiştir.

2.1. Çok değişkenli birinci derece otoregresif model

p, sigorta şirketinin portföyündeki poliçelerin bağımlı sınıf sayısı olmak üzere herhangi $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})$ ve $\mathrm{n} \ge 1$ için W_{in} ve Z_{in} negatif olmayan rastlantı değişkenleridir. Ayrıca hasarların $\{Z_{in}, \ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$, n. dönemin sonunda ödendiği varsayılırken, primlerin $\{W_{in}, \ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$, n. dönemin başında toplandığı varsayılır.

Herhangi $\mathrm{n} \ge 1$ olmak üzere p bağımlı sigorta kolundan oluşan portföyde p sınıfta toplanan primleri gösteren prim vektörü $W_n = (W_{1n},...,W_{pn})'$ ve p sınıfta gerçekleşen hasarı gösteren hasar vektörü $Z_n = (Z_{1n},...,Z_{pn})'$ şeklinde yazılır. Ayrıca 1_k, k boyutlu 1'lerden oluşan sütün vektörü ve $v = (1+i)^{-1}$ iskonto vektörü olmak üzere; W_n prim vektörü ve Z_n hasar vektörü için negatif olmayan sabit sütun vektör süreci G_n, $G_0 = (w_1,....,w_p,z_1,....,z_p)' = (w',z')'$ başlangıç değerler vektörü ile her $\mathrm{n} \ge 0$ için $G_n = (W_n',Z_n')'$ şeklinde tanımlanır ve negatif olmayan rastlantı vektör süreci

$$G_n = AG_{n-1} + V_n , \quad n \ge 1 \tag{2.1}$$

şeklindeki çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyar. Burada $A = (a_{ij})$, $2p$ boyutlu negatif olmayan matris ve $\{V_n, \ n \ge 1\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı (F dağılımlı) negatif olmayan rastgele vektörler dizisidir. Ayrıca her $\mathrm{n} \ge 1$ olmak üzere keyfi bir $V_n = (X_n',Y_n')'$, $V = (X',Y')'$ ile gösterilir ve V_n;

$$V_n = (X'_n,Y'_n)' = (X_{1n},...,X_{pn},Y_{1n},...,Y_{pn})' \tag{2.2}$$

şeklindedir.

Eş.(2.1) ile verilen çok değişkenli birinci derece otoregresif modelde, zaman sonsuza giderken modelin tutarlılığı için A'nın bütün özdeğerlerinin 1'den daha küçük değerler olması gerekir. Bunun için

$$h(\lambda) \equiv \det(\lambda I_{2p} - A) = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde verilen denklemdeki λ'nın bütün köklerinin kesinlikle 1'den daha küçük değerlere sahip olması gerekir. Burada I_{2p}, $2p$ boyutlu birim matrisi gösterir. Eğer her $1 \le i \le 2p$ için

$$\sum_{j=1}^{2p} \left| a_{ij} \right| < 1 \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanırsa A'nın bütün özdeğerleri 1'den küçük değerler alır. Zaman serilerinde durağanlık varsayımı olarak bilinen bu varsayım altında $h(1) > 0$ olur.

A matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

şekilde de ifade edilebilir. Burada $A_1 = (a_{ij})_{1\le i,j\le p}$, $A_2 = (a_{ij})_{1\le i\le p; p+1\le j\le 2p}$, $B_1 = (a_{ij})_{p+1\le i\le 2p; 1\le j\le p}$ ve $B_2 = (a_{ij})_{p+1\le i,j\le 2p}$ şeklindeki alt matrislerdir.

p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için Eş. (2.1) ile verilen model her bir sigorta koluna ait prim ve hasar değişkenlerinin kendi gecikmeli değerleri ve sistemdeki tüm diğer değişkenlerin gecikmeli değerleri ile açıklanan çok değişkenli bir model olarak yorumlanabilir. Eğer $p = 1$ ve $A_2 = B_1 = 0$ ise buradan (2.1) eşitliği ile verilen model, Yang ve Zang (2003) tarafından incelenen hasar ve prim süreçlerinin sırasıyla (2.6) ve (2.7) eşitliği ile verilen her bir sigorta kolunda hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu duruma dönüşür [17]. Bu durumda her bir sigorta koluna ait hasar süreçleri,

$$\begin{aligned} Z_n &= X_n + aZ_{n-1}, \quad n = 1,2,3,... \\ Z_0 &= z_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklindeki birinci derece otoregresif modele; prim süreçleri ise

$$\begin{aligned} W_n &= Y_n + bW_{n-1}, \quad \mathrm{n} = 1,2,3,... \\ W_0 &= w_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Eş.(2.7) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyar.

2.2. İki değişkenli birinci derece otoregresif model

(2.1) eşitliği ile verilen p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için tanımlanan çok değişkenli zaman serisi modelinde $p = 2$ olduğu durumda model, iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için iki değişkenli birinci derece otoregresif modele dönüşür. Bu modelde primlerin sabit miktarlarla toplandığı varsayıldığında (2.1) eşitliği ile verilen p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için çok değişkenli zaman serisi modelinin özel bir şekli olan iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar süreçlerinin ise iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu model tanımlanmış olur.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarla toplandığı durumda iki bağımlı sınıfta n. dönemde gerçekleşen hasarlar, (Z_{1n}, Z_{2n}) şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\{(Z_{1n}, Z_{2n})\}$ hasar süreçlerinde her bir bağımlı sınıf için başlangıç değerleri $Z_{10} = z_1$ ve $Z_{20} = z_2$ şeklinde tanımlansın. (Z_{1n}, Z_{2n}) hasar süreçleri

$$\begin{aligned} Z_{1n} &= a_1 Z_{1(n-1)} + a_2 Z_{2(n-1)} + X_n, \\ Z_{2n} &= b_1 Z_{1(n-1)} + b_2 Z_{2(n-1)} + Y_n, \end{aligned} \quad n \ge 1 \tag{2.8}$$

şeklindeki iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyar. Burada a_i ve b_i negatif olmayan sabit sayılar ve $\{(X_n, Y_n)\}$ süreçleri bağımsız ve aynı dağılımlı negatif olmayan rastgele vektör süreçleridir.

(2.8) eşitliği ile verilen zaman serisi modeli için durağanlık şartı, aşağıdaki denklemdeki λ'nın bütün köklerinin 1'den daha küçük değerler (belli değerler) almasıdır:

$$h(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 \\ -b_1 & \lambda - b_2 \end{vmatrix} = (\lambda - a_1)(\lambda - b_2) - a_2 b_1 = 0$$

a_i ve b_i negatif olmayan değerler olduğundan bu durağanlık koşulu,

$$a_1 + b_2 - a_1 b_2 + a_2 b_1 < 1 \tag{2.9}$$

eşitsizliği ile ifade edilir [17].

3. Bağımlı risk süreçleri ve iflas olasılığı

Bu bölümde, kesikli risk modellerinde bağımlı risklerin modellenmesinde kullanılan zaman serileri modelleri geçerli olduğunda artık süreçlerinin ve net-kar şartının nasıl olduğu ile düzeltme katsayısının ve iflas olasılıkları için üst sınırların nasıl hesaplanacağı incelenmiştir.

3.1. Artık süreçleri

Bu bölümde, p bağımlı sigorta kolundan oluşan portföy için artık süreci ve artık sürecinin matrisler yardımıyla gösterilmesi incelenmiştir.

3.1.1. p bağımlı sigorta kolundan oluşan portföy için artık süreci

Bir sigorta şirketinin portföyünde i. $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})$ sigorta kolu için $U_{i0} = u_i > 0$, başlangıç sermayesi olmak üzere $\{U_{in}, \mathrm{n} \ge 0\}$, n anındaki ya da n. yılın sonundaki artık değerini göstersin. Buradan U_n artık süreci,

$$U_n = U_{1n} + U_{2n} + ... + U_{pn}, \quad n \ge 0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada U_n, n anındaki sigorta şirketinin toplam artık değeri ve $U_0 = u = u_1 + ... + u_p$ toplam başlangıç sermayesidir. Her i $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})$ için W_{in}, n. dönemde toplanan primleri ve Z_{in} de aynı dönemde ödenen hasar miktarını göstersin. Herhangi $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})$ ve $\mathrm{n} \ge 1$ için W_{in} ve Z_{in} negatif olmayan rastlantı değişkenleridir. Ayrıca hasarlar $\{Z_{in},\ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$ n. dönemin sonunda ödenirken, primlerin $\{W_{in},\ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$ n. dönemin başında toplandığı varsayılır. r sabit faiz oranı olmak üzere toplam artık süreci,

$$U_n = u(1+r)^n + \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} W_{ik}(1+r)^{n-k+1} - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} Z_{ik}(1+r)^{n-k}$$

eşitliği ile elde edilir. Aynı eşitlik,

$$U_n = U_{n-1}(1+r) + \sum_{i=1}^{p} W_{in}(1+r) - \sum_{i=1}^{p} Z_{in}, \qquad n \ge 1 \tag{3.2}$$

şeklinde de yazılabilir [17].

3.1.2. p bağımlı sınıflı portföy için artık sürecinin matrisler ile gösterimi

Herhangi $n \ge 1$ için p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde n. dönemin başında toplanan primleri gösteren sabit sütun vektörü W_n, $W_n = \left(W_{1n},...,W_{pn}\right)'$ şeklinde ve n. dönemin sonunda ödenen hasarları gösteren sabit sütun vektörü Z_n, $Z_n = \left(Z_{1n},...,Z_{pn}\right)'$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca 1_k, k boyutlu 1'lerden oluşan sütun vektörü ve $v = (1+r)^{-1}$ iskonto vektörü olsun. Bu durumda artık süreci $\{U_n\}$,

$$U_n = v^{-1}U_{n-1} + v^{-1}1'_p W_n - 1'_p Z_n\,, \quad n \geq 1 \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır [17].

3.2. Net-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

Bir risk modeli için iflas olasılıkları göz önünde tutulduğunda net-kar şartı, ortalama olarak, her sigorta döneminde prim gelirinin hasar ödemelerini aşacağını ifade eder; yani her $i = 1,2,...$ için $E[W_i] > E[Z_i]$ şeklinde olduğu varsayılır. Ancak zaman serileri yaklaşımı ile modellenen bağımlı risklerde prim ve hasar süreçlerinin dağılımları genellikle bilinmediği için net-kar şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimleri (akgürültü rastlantı değişkenleri) açısından yazılır. Bunun sonucunda düzeltme katsayısı R de hata terimlerinin dağılımları yardımıyla elde edilir. Ayrıca hata terimleri bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri olduğundan birinci hata teriminin dağılımı ile düzeltme katsayısını elde etmek yeterlidir.

3.2.1. Çok değişkenli modelde met-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde prim ve hasar süreçlerinin birlikte modellendiği Eş. (2.1) ile verilen birinci derece çok değişkenli otoregresif model geçerli olduğu durumda net-kar şartı,

$$v^{-1}E\left[\sum_{i=1}^{p} W_{ik}\right] > E\left[\sum_{i=1}^{p} Z_{ik}\right], \quad k \geq 1 \tag{3.4}$$

şeklindeki gibidir. Ancak W_{ik} ve Z_{ik}'nın dağılımları bilinmediği için net-kar şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimlerini gösteren V açısından

$$(v^{-1}1'_{p'} - 1'_p)\left[\frac{I_{2p} - A^k}{I_{2p} - A}\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} + A^k \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right] > 0, \quad k \geq 1 \tag{3.5}$$

şeklinde yazılır. Burada $V_n = (X'_n, Y'_n)' = (X_{1n},...,X_{pn}, Y_{1n},...,Y_{pn})'$ şeklindedir. Ayrıca X_{pn} ve Y_{pn}'ler p bağımlı sigorta kolundaki prim ve hasar süreçlerine ait hata terimleridir.

Eş. (3.5) ile verilen Net-kar şartı, yalnızca 1'den daha küçük olan iflas olasılıkları için yeterli bir koşuldur. Eş. (2.1) ile verilen çok değişkenli model için birden daha küçük olan iflas olasılıkları için gerekli şart,

$$E\left[\left(v^{-1}1_p + a\right)' X - \left(1_p + b\right)' Y\right] > 0 \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada $a = (\alpha_1,....,\alpha_p)'$ ve $b = (\beta_1,......,\beta_q)'$,

$$\left(a', -b'\right) = \left(1'_p, -v1'_p\right)A\left(\mathrm{I}_{2p} - vA\right)^{-1}$$

eşitliği ile verilen iki sabit vektördür.

Eş. (3.6) ile verilen koşulun sağlandığı varsayıldığında,

$$\varepsilon_n = \left(v^{-1}1_p + a\right)' X_n - \left(1_p + b\right)' Y_n \ , \quad n \geq 1 \tag{3.7}$$

şeklinde $\{\varepsilon_n\}$ süreci tanımlanır. Burada $\{\varepsilon_n\}$; A katsayılar matrisi, r faiz oranı ve F dağılım fonksiyonu ile tek bir şekilde tanımlanan genel dağılım fonksiyonu ile bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisidir. (3.6) koşulu altında $E[\varepsilon_n] > 0$ olur. Buradan düzeltme katsayısı R,

$$E\left[\exp\left(-R\varepsilon_1\right)\right] = 1 \tag{3.8}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Eğer (3.8) eşitliği ile verilen denklemin birden fazla pozitif çözümü varsa en küçük pozitif sayı olan R seçilir. Buradan da anlaşılacağı gibi, eğer $E[\exp(-R'\varepsilon_1)] \geq 1$ şeklinde pozitif sabit R' varsa burada düzeltme katsayısı olmalıdır [17].

3.2.2. İki değişkenli modelde net-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

(Z_{1n}, Z_{2n}) hasar süreçleri Eş. (2.8) ile verilen iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu durumda Eş. (2.9) ile verilen durağanlık koşulunun sağlandığı, $E(X_1) < \infty$ ve $E(Y_1) < \infty$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, her $x \geq 1$ olduğunda $h(x) > 0$ olmak üzere $x \in [1,\infty)$ için x'in iki fonksiyonu $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ sırasıyla

$$\alpha(x) = \frac{x(a_1 + b_1) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{h(x)}, \qquad \beta(x) = \frac{x(a_2 + b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{h(x)} \tag{3.9}$$

şeklinde olsun. Buradan başlangıç primini gösteren c_0,

$$c_0 = \lim_{n\to\infty} E(Z_{1n} + Z_{2n}) = E[(1+\alpha(1))X_1 + (1+\beta(1))Y_1] < \infty \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir. Burada z_1 ve z_2 başlangıç hasarları sıfır ise her $n \geq 1$ için $E(Z_{1n} + Z_{2n}) < c_0$ olur.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde, primlerin sabit c miktarıyla toplandığı ve hasarların iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda net-kar şartı,

$$c_0 \leq cv^{-1} \tag{3.11}$$

koşulunu sağlar. Ayrıca Eş. (3.11) ile verilen koşul, prim ve hasar süreçlerinin çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için net-kar şartını gösteren Eş. (3.4) ve Eş. (3.6) koşullarını sağlar. Burada Eş. (3.11) ile verilen koşulu sağlayan $cv^{-1} - c_0$ şartı, net-kar (beklenen) şartını ve $\delta \equiv \frac{cv^{-1}}{c_0} - 1$ ise güvenlik yüklemesini gösterir.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit c miktarıyla toplandığı ve hasarların iki değişkenli otoregresif modele uyduğu durumda hasar süreçlerine ilişkin hata terimi,

$$\begin{aligned} \xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})} \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır; burada $\{\xi\}$, bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisidir. Eğer $a_1 \le 1$ ve $b_2 \le 1$ ise ξ_k negatif değerler almaz. R düzeltme katsayısı olduğunda, Eş.(2.8) ile verilen iki değişkenli birinci derece otoregresif model için R düzeltme katsayısı,

$$E[\exp(-R(cv^{-1} - \xi_1))] = 1 \tag{3.13}$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir. Bu eşitlik çözüldüğünde birden fazla pozitif sayı varsa R düzeltme katsayısı, Eş. (3.13)'ü sağlayan pozitif en küçük sabit sayı olarak seçilir [17].

(3.13) eşitliği

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(R\xi_1 - Rcv^{-1}\right)\right] &= \exp\left(-Rcv^{-1}\right)E\left[\exp\left(R\xi_1\right)\right] \\ &= \exp\left(-Rcv^{-1}\right)M_{\xi}\left(R\right) = 1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde de yazılabilir. Eş. (3.14)'den de anlaşılacağı gibi R düzeltme katsayısı,

$$\begin{aligned} \xi_k &= [1 + \alpha(v^{-1})]X_k + [1 + \beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})} \end{aligned}$$

olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olan $\{\xi\}$' nin dağılımına bağlı olarak elde edilen moment çıkaran fonksiyon yardımıyla, $M_{\xi}\left(R\right) = \exp\left(Rcv^{-1}\right)$ eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim \exp\left(\alpha\right)$ ve $Y \sim \exp\left(\beta\right)$ şeklinde üstel dağılıma sahip ise

$$E\left(X\right) = \frac{1}{\alpha} \text{ ve } E\left(Y\right) = \frac{1}{\beta}$$

şeklinde olur. Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} \xi_k &= [1 + \alpha(v^{-1})]X_k + [1 + \beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} E\left(\xi_k\right) &= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E\left(X_k\right) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E\left(Y_k\right)}{h(v^{-1})} \\ &= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]\frac{1}{\alpha} + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]\frac{1}{\beta}}{h(v^{-1})} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $E\left(\xi_k\right) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp\left(Rcv^{-1}\right)=\frac{\lambda}{\lambda-R} \tag{3.15}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim Gamma(n,\lambda)$ ve $Y \sim Gamma(n,\lambda)$ şeklinde ve

$$\begin{aligned}\xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}E(\xi_k) &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]E(X_k)+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]\mu_1+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]\mu_2}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $E(\xi_k)=\alpha\beta$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp\left(Rcv^{-1}\right)=(1-\beta R)^{-\alpha} \tag{3.16}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ve $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ şeklinde normal dağılım ve

$$\begin{aligned}\xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere

$$\begin{aligned}E(\xi_k) &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]E(X_k)+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]\mu_1+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]\mu_2}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}Var(\xi_k) &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]^2 Var(X_k)+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]^2 Var(Y_k)}{[h(v^{-1})]^2} \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]^2\sigma_1^2+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]^2\sigma_2^2}{[h(v^{-1})]^2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $E(\xi_k)=\mu_*$ ve $Var(\xi_k)=\sigma_*^2$ olmak üzere R düzeltme katsayısı, aşağıdaki eşitliğin çözülmesiyle elde edilir:

$$Rcv^{-1} = R\mu_* + R^2\sigma_*^2 / 2$$
$$\Rightarrow R = \frac{2\left[cv^{-1} - \mu_*\right]}{\sigma_*^2} \tag{3.17}$$

3.3. İflas olasılıkları

Bu bölümde, buraya kadar incelenen modeller için iflas olasılıklarının nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir.

3.3.1. Çok değişkenli model için iflas olasılıkları

Bir sigorta şirketinin n. dönemdeki risk rezervinin negatif ($U_n < 0$) olduğu zaman T iflas anını (yani $\min \emptyset = +\infty$ ile $T = \min\{n \geq 0 : U_n < 0\}$ iflas anını) ve
$\varphi(u,w,z) = P(T < \infty \mid U_0 = u, W_0 = w, Z_0 = z)$

iflas olasılıklarını gösterir. Burada u, w ve z sırasıyla başlangıç sermayesi, başlangıç primi ve başlangıç hasarıdır.

Teorem 3.1: R düzeltme katsayısının olduğu varsayılsın. Buradan Eş.(2.1)'de verilen model için iflas olasılığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi(u,w,z) \leq \frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-Rv^T\hat{U}_T) \mid T < \infty]} \tag{3.18}$$

burada $a = (\alpha_1,....,\alpha_p)'$ ve $b = (\beta_1,......,\beta_q)'$ vektörleri $(a',-b') = (1'_p,-v1'_p)A(\mathrm{I}_{2p} - vA)^{-1}$

şeklinde olmak üzere,

$$\hat{U}_n = U_n + a'W_n - b'Z_n, \quad n \geq 0$$

$$U_0 = \hat{u} = u + a'w - b'z$$

şeklindedir.

Eş. (3.18) ile verilen teoremin ispatı, Zhang ve diğerleri (2007)'nde açık bir şekilde verilmektedir[17].

Sonuç 3.1: Düzeltme katsayısı R'nin olduğu durumda, eğer faiz oranı $r = 0$ ve $Var(\varepsilon_1) = \sigma^2 < \infty$ ise Teorem (3.1), Eş. (3.19) ile verilen eşitliğe dönüşür:

$$\varphi(u,w,z) = \frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-R\hat{U}_T) \mid T < \infty]} \tag{3.19}$$

p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için çok değişkenli modelde $p = 2$ ve primlerin sabit c miktarı ile toplandığında iki hasar sürecinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda (yani Z_1 ve Z_2 hasar rastlantı değişkenlerinin (2.8) eşitliği ile verilen modeli sağladıkları ve Eş.

(2.3) ve Eş. (3.10) koşullarının sağlandığı varsayıldığında), iflas olasılığı için üst sınır aşağıda verilen Teorem 3.2 yardımıyla elde edilir:

Teorem 3.2: R düzeltme katsayısının olduğu varsayılsın. Eğer $Var(\xi_1) < \infty$ ise buradan iflas olasılığı için üst sınırlar,

$$\varphi(u, z_1, z_2) \leq \frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-Rv^T \hat{U}_T) \big| T < \infty]} \tag{3.20}$$

eşiliği ile elde edilir. Burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, Eş. (3.9)'da verildiği gibi olmak üzere

$$\hat{U}_n = U_n - \alpha(v^{-1})Z_{1n} - \beta(v^{-1})Z_{2n}, \quad n \geq 0$$

$$\hat{U}_0 = u = u - \alpha(v^{-1})z_1 - \beta(v^{-1})z_2$$

şeklindedir ve eğer $r = 0$ ise Eş. (3.20) ile verilen eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

Bu teoremin ispatı Zhang ve diğerleri (2007)'nde açık bir şekilde verilmiştir.

Sonuç 3.2: Eş. (3.20) ile verilen Teorem (3.2) sağlandığında $a_1 \leq 1$ ve $b_1 \leq 1$ ise

$$\varphi(u, z_1, z_2) \leq \exp(-R\hat{u}) \tag{3.21}$$

olarak elde edilir.

İspat: Eğer $a_1 \leq 1$ ve $b_1 \leq 1$ ise buradan $\alpha(v^{-1}) \geq 0$ ve $\beta(v^{-1}) \geq 0$ olur. Sonuç olarak, T sonlu olduğunda $\hat{U}_T = U_T - \alpha(v^{-1})Z_{1T} - \beta(v^{-1})Z_{2T} \leq U_T < 0$ olur ve bunun sonucunda Eş. (3.20)'deki payda 1'den büyük olur ve böylece Eş. (3.21) sağlanır [17].

4. İki değişkenli otoregresif modele ilişkin sayısal örnekler

Bu bölümde öncelikle primlerin pozitif sabit c miktarıyla dönem başında toplandığı ve iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda Eş. (2.8) ile verilen modelde hata terimlerinin dağılımına göre R düzeltme katsayısının nasıl hesaplanacağı incelenmiştir. Daha sonra bu modele ilişkin sayısal örnekler verilmiştir. Verilen sayısal örneklerde primlerin pozitif sabit c miktarıyla dönem başında toplandığı ve iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda başlangıç sermayesi, faiz oranları ve sabit prim miktarlarındaki değişimlerin iflas olasılıklarının üst sınırları üzerindeki etkisi ile bağımlığın ve hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıklarının üst sınırları üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Örnek 4.1: Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu, ayrıca bağımsız ve aynı dağılımlı X_k ve Y_k rastlantı değişkenlerinin ortalaması 1,01 olan bir üstel dağılıma uyduğu varsayılsın. Bu modelde paranın zaman değerinin olmadığı ($r = 0$) varsayılsın ve $c = 7$ olsun.

$\varphi_1(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.8) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}3$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}1$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}48$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 3{,}367$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{0{,}297}{0{,}297 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}24255$ olur.

$\varphi_2(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.8) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}1$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}35$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 4{,}04$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}2475}{0{,}2475 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}17458$ olur.

$\varphi_3(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.8) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}32$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 5{,}05$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}198}{0{,}198 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}09899$ olur.

$\varphi_4(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.8) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}5$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 6{,}73$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}1485}{0{,}1485 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}01120$ olur.

$\varphi_5(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.8) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}5$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}3$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}16$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 10{,}1$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}099}{0{,}099 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R \cong 0{,}00001$ olur.

Çizelge 4.1. Primlerin sabit miktarlarla toplandığı iki bağımlı hasar sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde bağımlılığın ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$	$\varphi_4(u,0,0)$	$\varphi_5(u,0,0)$
2	0,61564	0,70528	0,81889	0,97785	1,00000
3	0,48304	0,52374	0,74104	0,96696	1,00000
9	0,11271	0,20779	0,40694	0,90411	1,00000
10	0,08843	0,17451	0,36825	0,89404	1,00000
20	0,00782	0,03045	0,13561	0,79932	1,00000
40	0,00006	0,00093	0,01839	0,63890	1,00000
100	0,00000	0,00000	0,00005	0,32628	1,00000

Çizelge 4.1 incelendiğinde başlangıç sermayeleri arttıkça iflas olasılıkları için üst sınırların azaldığı açıkça görülür. Ayrıca primlerin sabit c miktarıyla toplandığı iki bağımlı sigorta koluna ait poliçelerin bulunduğu bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda modeldeki katsayılardan herhangi biri arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların arttığı görülür. Buradan da anlaşılacağı gibi bağımlılık arttıkça iflas olasılıkları artmaktadır.

Örnek 4.2: Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu ve (2.8) modelinde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğu varsayılsın. Ayrıca X_n ve Y_n rastlantı değişkenleri bağımsız ve ortalaması 1,01 olan bir üstel dağılıma uysun ve $u = 10$ olsun. $\varphi_1(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.2'nin varsayımları altında $r = 0$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}32$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 5{,}05$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.2'teki gibidir:

Çizelge 4.2. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,09899
10	0,15667
20	0,19391

$\varphi_2(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.2'nin varsayımları altında $r = 0{,}0025$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1{,}0025) = 0{,}323$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 5{,}0313$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.3'deki gibidir:

Çizelge 4.3. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0{,}0025$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,10019
10	0,15772
20	0,19471

$\varphi_3(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.2'nin varsayımları altında $r = 0{,}005$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1{,}005) = 0{,}326$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 5{,}01298$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.4'deki gibidir:

Çizelge 4.4. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0{,}005$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,10136
10	0,15867
20	0,19548

$\varphi_4(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.2'nin varsayımları altında $r = 0{,}03$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1{,}03) = 0{,}3569$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 4{,}8386$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \frac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.5'deki gibidir:

Çizelge 4.5. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0{,}03$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,11290
10	0,16825
20	0,20311

Çeşitli c değerleri için $r = 0$, $r = 0{,}0025$, $r = 0{,}005$ ve $r = 0{,}03$ olduğunda hesaplanan düzeltme katsayıları yardımıyla yukarıda belirtilen $\varphi_1(u, z_1, z_2)$, $\varphi_2(u, z_1, z_2)$, $\varphi_3(u, z_1, z_2)$ ve $\varphi_4(u, z_1, z_2)$ iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar Çizelge 4.6'daki gibidir:

Çizelge 4.6. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde faiz oranlarının ve prim miktarlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

c	$\varphi_1(10,0,0)$	$\varphi_2(10,0,0)$	$\varphi_3(10,0,0)$	$\varphi_4(10,0,0)$
7	0,372	0,367	0,363	0,323
10	0,209	0,207	0,205	0,186
20	0,134	0,143	0,142	0,131

Çizelge 4.6 incelendiğinde prim miktarlarını gösteren c miktarları arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların azaldığı görülmektedir. Ayrıca r faiz oranları arttığında da iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar azalmaktadır. Yani prim miktarlarını gösteren c ve faiz oranlarını gösteren r oranları arttığında iflas olasılıkları azalmaktadır.

Örnek 4.3: Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin (2.8) eşitliği ile verilen iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu ve bu modelde $a_1 = b_2 = 0{,}5$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğu varsayılsın. Ayrıca bu modelde paranın zaman değerinin olmadığı ($r = 0$) varsayılsın ve $c = 7$ olsun.

$\varphi_1(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.3'ün varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri, 1,01 ortalama ve 0,5 varyans ile normal dağılıma sahip olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})}$$
$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]\mu_1 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]\mu_2}{h(v^{-1})}$$

ve

$$Var(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]^2 Var(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]^2 Var(Y_k)}{[h(v^{-1})]^2}$$
$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]^2 \sigma_1^2 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]^2 \sigma_2^2}{[h(v^{-1})]^2}$$

eşitlikleri yardımıyla $E(\xi_k) = \mu_* = 6,73$ ve $Var(\xi_k) = \sigma_*^2 = 11,11$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$Rcv^{-1} = R\mu_* + R^2\sigma_*^2 / 2$$
$$\Rightarrow R = \frac{2[cv^{-1} - \mu_*]}{\sigma_*^2}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0,04860$ olur.

$\varphi_2(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.3'ün varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri, 1,01 ortalama ile üstel dağılıma sahip olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0,21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 6,73$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \frac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0,01120$ olur.

$\varphi_3(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.3'ün varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri $n = 2$ ve $\lambda = 0,505$ parametreleri ile gamma dağılımına sahip olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0,21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 6{,}73$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \alpha\beta$ ve $\alpha = 2$ olmak üzere $\beta = 3{,}365$ olur ve buradan R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = (1 - \beta R)^{-\alpha}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R \cong 0{,}00000$ olur.

$\varphi_4(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.3'in varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri 1,01 ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğunda Eş. (2.8) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}1$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}35$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 4{,}04$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}2475}{0{,}2475 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}17458$ olur.

Çizelge 4.7. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde hata terimlerinin dağılımlarının ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$	$\varphi_4(u,0,0)$
2	0,907	0,978	1	0,81889
3	0,864	0,967	1	0,74104
9	0,646	0,904	1	0,40694
10	0,615	0,894	1	0,36825
20	0,378	0,799	1	0,13561
40	0,143	0,639	1	0,01839
100	0,008	0,326	1	0,00005

Çizelge 4.7 incelendiğinde primlerin sabit c miktarıyla toplandığı iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğunda X_n ve Y_n hata terimleri normal dağılıma sahip olduğu durumda elde edilen iflas olasılıkları için üst sınırların, hata terimlerinin aynı ortalama ile üstel ya da gamma dağılımına sahip olduğu durumlarda elde edilen iflas olasılıkları için üst sınırlardan daha küçük olduğu görülür. Ayrıca hata terimleri üstel dağılıma sahip olduğunda elde edilen iflas olasılıkları hata terimleri gamma dağılıma sahip olduğunda elde edilen iflas olasılıklarından daha küçüktür. Buradan anlaşılacağı gibi hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları

üzerinde büyük bir etkisi vardır. Ayrıca $\varphi_1(u,0,0)$ ile $\varphi_4(u,0,0)$ iflas olasılıları için üst sınırlar karşılaştırıldığında bağımlılığın da iflas olasılıkları üzerinde önemli bir etkisinin olduğu görülmektedir.

5. Sonuç ve tartışma

Bu çalışmada, p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföydeki poliçelere ait prim ve hasar süreçlerinin kendi gecikmeli değerleri ve portföydeki tüm gecikmeli değerler ile açıklandığı çok değişkenli birinci derece otoregresif model ve bu modellerin geçerli olması için gerekli koşullar incelenmiştir. Ayrıca p bağımlı sigorta koluna ait prim ve hasar süreçlerinin çok değişkenli zaman serisi modelinin özel hali olan bağımlı sigorta kolu sayısının iki olduğu ($p=2$) ve primlerin sabit c miktarlarıyla toplandığı iki değişkenli birinci derece otoregresif model ve bu modelin geçerli olması için gerekli koşullar incelenmiştir. Bu modeller geçerli olduğunda iflas olasılıklarının üst sınırlarının nasıl hesaplanacağı da incelenmiştir. Son olarak iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarlarla toplandığı iki bağımlı sigorta koluna ait hasar süreçlerinin ise iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda başlangıç sermayesindeki ve faiz oranlarındaki değişimler ile bağımlılığın ve bu modeldeki hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıklarının üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Primlerin sabit miktarla toplandığı iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda, modeldeki katsayılardan herhangi biri büyüdüğünde iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar artmaktadır. Ayrıca bütün koşullar aynı iken bu modellerdeki hata terimlerinin dağılımları normal dağılım, üstel dağılım ya da gamma dağılımına uyduğu durumda iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların, hata terimlerinin dağılımına bağlı olarak değiştiği görülmüştür. Hata terimleri normal dağılıma sahip olduğunda iflas olasılıklarının en küçük gamma dağılımına sahip olduğunda ise en büyük olduğu görülmüştür. Son olarak diğer risk modellerine benzer şekilde başlangıç sermayeleri, faiz oranları ya da prim miktarları arttığında iflas olasılıklarının üst sınırları azalmaktadır.

Çalışmada elde edilen sonuçlar doğrultusunda, önceki dönemde portföyde bulunan bazı poliçelerin mevcut dönemde de portföyde kalması sonucu, mevcut dönemde oluşan hasarlar ile geçmiş dönemde oluşmuş hasarlar arasında bağımlılık oluşması nedeniyle bağımlı risklerin bulunduğu portföylerde bağımlı risklerin modellenmesinde zaman serisi modellerinin kullanıldığı durumlarda ilişkili sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasında modelden kaynaklanan bağımlılığın etkisi göz önünde bulundurulmalıdır. Ayrıca ilişkili hasar sınıflarının hata terimleri arasındaki ilişkilerin, hata terimlerinin dağılımlarının ve hata terimlerinin ortalamasının iflas olasılıkları üzerindeki etkilerinin de göz önünde bulundurulması bağımlı risklerden oluşan portföylerdeki riski minimize etmek açısından önemlidir. Bu nedenle bağımlı risklerin bulunduğu portföylerde risk analizi çalışmalarında bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkisini ve hata terimlerinin dağılımının etkisini göz önünde bulundurması gerekir.

Kaynaklar

[1] Ambagaspitiya, R.S., 1998, On the distribution of a sum of correlated aggregate claims, *Insurance: Mathematics and Economics* 23, 15-19.

[2] Ambagaspitiya, R.S., 1999, On the distributions of two classes of correlated aggregate claims, *Insurance: Mathematics and Economics* 24, 301-308.

[3] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., 1997, *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

[4] Christ, R. and Steinebach, J., 1995, Estimating the adjustment coefficient in an ARMA(p,q) risk model, *Insurance: Mathematics and Economics* 17, 149-161.

[5] Cossette, H., Denuit, M., Marceau, E., 2000, Impact of dependence among multiple claims in a single loss, *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 213-222.

[6] Cossette, H., Marceau, E., 2000, The discrete-time risk model with correlated classes of business, *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 133-149.

[7] Denuit, M., Genest, C., Marceau, E, 1999, Stochastic bounds on sums of dependent risks, *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 85-104.

[8] Dhaene, J., Goovaerts, M.J., 1997, On the dependency of risks in the individual life model, *Insurance: Mathematics and Economics* 19, 243-253.

[9] Gerber, H.U., 1982, Ruin theory in the linear model, *Insurance: Mathematics and Economics* 1, 177-184.

[10] Müller, A., Pflug, G., 2001, Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments, *Insurance: Mathematics and Economics* 28, 381-392.

[11] Promislow, S.D., 1991, The probability of ruin in a process with dependent increments, *Insurance: Mathematics and Economics* 10, 99-107.

[12] Ribas, C., Marin-Solano, J., Alegre, A, 2003, On the computation of the aggregate claims distribution in the individual life model with bivariate dependencies, *Insurance: Mathematics and Economics* 32, 201-215.

[13] Wang, S., 1998, *Aggregation of correlated risk portfolios: Models and algorithms*, In: Proceedings of the Casualty Actuarial Society, pp. 848-939.

[14] Wu, X., Yuen, K.C., 2003, A discrete-time risk model with interaction between classes of business, *Insurance: Mathematics and Economics* 33, 117-133.

[15] Yang, H., Zhang, L., 2003, Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate, *Probability in the engineering and informational sciences* 17, 183-198.

[16] Zhang, L., 2005, Ruin probability in linear time series model, *Tsinghua Science and Technology* 2, 259-264.

[17] Zhang, Z., Yuen, K.C., Li, W.K., 2007, A time-series risk model with constant interest for dependent classes of business, *Insurance: Mathematics and Economics* 41, 32-40.