İstatistikçiler Dergisi

www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 3 (2010) 54-62

Bağımlı değişkenin simetrik bulanık sayı olması durumunda parametre tahmini

Kamile Şanlı Kula
Ahi Evran Üniversitesi, Matematik Bölümü, 40200, Kırşehir, Türkiye
sanli2004@hotmail.com

Türkan Erbay Dalkılıç
Karadeniz Teknik Üniversitesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, 61080, Trabzon, Türkiye
tedalkilic@gmail.com

Ayşen Apaydın
Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 06100-Tandoğan, Ankara, Türkiye
aapaydin@science.ankara.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, bağımlı değişkenin simetrik bulanık sayı olması durumunda, regresyon modelinin parametrelerinin tahmin edilmesi için, bulanık çıkarsama sistemine dayalı uyarlamalı ağın (ANFIS) kullanıldığı bir algoritma ve bulanık robust regresyon'a dayalı bir algoritma ele alınarak parametre tahmini yapılmıştır. Bulanık robust regresyon ve ANFIS'in kullanıldığı algoritmadan elde sonuçlar Dimond (1988) tarafından önerilen yöntemden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar sözcükler: Simetrik bulanık sayı, Bulanık robust regresyon, ANFIS.

Abstract

Parameter estimation in the case of symmetric fuzzy number dependent variable

In this study, we will use two algorithms for a regression parameter's estimation. Based on ANFIS and fuzzy robust regression model, in cases where dependent variables is a symmetrical fuzzy number. Results taken from the fuzzy robust regression are based on ANFIS and are compared with the Diamond method.

Keywords: Symmetrical fuzzy number, fuzzy robust regression, ANFIS.

1. Giriş

Regresyon analizi iki ya da daha çok değişken arsındaki fonksiyonel yapıyı belirlemekte kullanılan bir yöntemdir. Mühendislik, biyoloji, ekonomi, işletme vb. pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır (Kao ve Chyu, 2003).

Bir bağımlı ve p bağımsız değişken arasındaki fonksiyonel yapı

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j + e_i \qquad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,p \tag{1}$$

olarak tanımlanır. Burada y_i, i'inci gözlem için bağımlı değişken değeri, $x_{i1}, x_{i2},..., x_{ip}$, p bağımsız değişken değeri, e_i rassal hata miktarı ve $\beta_1, \beta_2,..., \beta_p$ regresyon katsayılarıdır. Eşitlik (1)'de tanımlanan regresyon modeli matris gösterimi ile

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

ya da

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & . & . & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & . & . & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\underline{Y}$; nx1 boyutlu bağımlı değişken için gözlemlerin vektörü, X ; [nx(m+1)] boyutlu bağımsız değişkenlere ilişkin matris, $\underline{\beta}$; [(m+1)x1] boyutlu regresyon katsayılarının vektörü ve $\underline{\varepsilon}$; (nx1) boyutlu hata vektörüdür.

Bulanık regresyon çözümlemesi klasik regresyon çözümlemesinin bulanık genişlemesi olarak düşünülebilir. Çeşitli alanlarda yaygın olarak çalışılmış ve uygulanmıştır. Genel olarak bulanık regresyon çözümlemesi iki grupta toplanır. Bunlardan birincisi Tanaka vd. (1982)'nin doğrusal programlama yaklaşımına, ikincisi ise Diamond (1988) tarafından önerilen klasik regresyon çözümlemesinin bir genişlemesi olan bulanık en küçük kareler yaklaşımına dayanır.

Bulanık regresyon çözümlemesi ilgili pek çok çalışma literatürde yer almaktadır. Tanaka (1987) modeli sıklıkla kesin sayılar ürettiği için Celmins (1987) tarafından eleştirilmiştir. Daha sonra Tanaka vd (1982) tarafından ileri sürülen en küçükleme probleminin ölçek bağımlı olduğunu Jo'zsef (1992) ileri sürmüştür. Celmins (1987)'in eleştirisine karşılık Tanaka ve Ishibuchi (1991) etkileşimli bulanık katsayıları elde etmek için bir yöntem geliştirmişlerdir (Redden ve Woddall, 1996). Bu yöntemin aykırı değerlere güçlü bir şekilde duyarlı olduğu, verinin içerdiği kesin bilgiyi göz ardı ettiği ve sınırsız çözüm ürettiği Redden ve Woddall (1996) tarafından gösterilmiştir. Watada ve Yabuuchi (1994), aykırı değer tarafından etkilenmeyen bir bulanık robust regresyon modeli önermişlerdir. Optimizasyon problemini çözmek için genetik algoritma kullanılmıştır. Chang ve Lee (1996) aykırı değer olması durumu için üyelik dereceleriyle ağırlıklandırma yapan ve karar verici ile etkileşime dayanan genelleştirilmiş bulanık ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemini ileri sürmüşlerdir. Yang ve Ko (1997) basit doğrusal regresyonda ağırlıklandırılmış bulanık en küçük kareler çözümlemesi için yinelemeli algoritmayı geliştirmişlerdir. Bu algoritma iki aşamalıdır. İlk olarak gözlemlerin sınıf üyeliklerini veren bulanık sınıflama yöntemi seçilir, daha sonra üyeliklerin bu değerleri ağırlıklar olarak kullanılır. Bulanık regresyon çözümlemesinde ağırlıklandırılmış bulanık en küçük kareler bir optimizasyon problemi olarak düşünülmüştür. Ishibuchi ve Nei (2001) simetrik üçgensel bulanık katsayılı doğrusal modeller için bulanık regresyon yöntemini önermişlerdir. Kao ve Chyu (2003) çalışmalarında klasik regresyonda sıkça kullanılan en küçük kareler yöntemini bulanık regresyon katsayılarını belirlemek üzere uyarlamışlardır. Yang ve Liu (2003) etkileşimli bulanık doğrusal regresyon modelleri için bulanık en küçük kareler algoritmasını önermişlerdir. Bu algoritma basit regresyon için aykırı değere karşı robusttır. D'Urso (2003) kesin veya bulanık girdiler ve kesin veya bulanık çıktılar ile bulanık regresyon modelleri önermiştir. Hong ve Hwang (2004) Diamond'un modelini çok değişkenli bulanık regresyon modelleri olarak genelleştirmişlerdir. Choi ve Buckley (2007) veride aykırı değer olması durumunda en küçük mutlak sapma yöntemi ile parametre tahmini yapmışlardır. Chuang vd. (2009) aykırı değer için Tagaki-Sugeno-Kang bulanık modeline dayanan melez bulanık robust regresyon yaklaşımını ileri sürmüşlerdir. Bu yaklaşımda kümeleme analizini kullanmışlardır.

Bulanık regresyon modeli bağımlı ve bağımsız değişkenlerin koşullarına göre 4 grupta toplanabilir:

i) Girdi ve çıktı verilerinin her ikisinin de kesin (non-fuzzy) sayı olması durumu,
ii) Girdi değişkeninin kesin, çıktı değişkeninin bulanık sayı olması durumu,
iii) Hem girdi hem de çıktı değişkeninin bulanık sayı olması durumu,
iv) Parametrelerin bulanık sayı olması durumu (Choi ve Buckley, 2008).

2. Bulanık regresyon

Girdi değişkenlerinin kesin sayı, çıktı değişkeninin bulanık sayı olması durumu, başka bir ifade ile gözlemlenmiş veriler $(\tilde{y}_i, x_{i1},...,x_{in})$ $i=1,2,...,n$ ile gösterilir. *LR* tipi bulanık sayılar ile ilgilenildiğinde $\tilde{Y}=(m,l,u)_{LR}$ biçiminde gösterilir. Burada *m* merkez, *l* sol yayılmayı ve *u* ise sağ yayılmayı göstermektedir. Bulanık regresyon modeli,

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_{i1} + ... + \tilde{A}_p x_{ip}, \quad i=1,2,...,n,$$

biçiminde tanımlanır. Burada x_{ij} kesin sayı, $\tilde{Y}_i = (y_i, \alpha_{iL}, \alpha_{iR})$ ve $\tilde{A}_i = (a_i, \beta_{iL}, \beta_{iR})$ üçgensel bulanık sayılardır. *LR* tipi bulanık sayıda $\alpha_{iL} = \alpha_{iR}$ ise simetrik üçgensel bulanık sayı olarak ifade edilir (Coppia vd. 2006).

Genel olarak bulanık regresyon modellerinin çözümlemesi iki kategoride toplanır. Bunlardan birincisi Tanaka vd (1982)'nin doğrusal programlama yaklaşımıdır. Tanaka modeli,

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & J = \sum_{i=1}^{n} c^T |x_i| \\
\text{Kısıt} \quad & x_i^T \alpha + (1-h) c^T |x_i| \geq y_i + (1-h) e_i \\
& -x_i^T \alpha + (1-h) c^T |x_i| \geq -y_i + (1-h) e_i \\
& 0 \leq h < 1 \qquad c \geq 0
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada *h* karar verici tarafından belirlenen eşik düzeyidir. Tanaka vd (1982) modelinde bağımsız değişken x kesin (crips) sayı, bağımlı değişken merkezi y_i, yayılması e_i olan bulanık sayı ($Y=(y_i, e_i)$), parametreler merkezi a_j, yayılması c_j olan ve $A=(a_j, c_j)$ olarak tanımlanan bulanık sayıdır (Redden and Woddall 1996).

Bulanık regresyon çözümlemesinin ikincisi ise bulanık en küçük kareler yaklaşımına dayanır. Dimond (1988) bulanık en küçük kareler yaklaşımını önermiştir. Dimond (1988) bağımsız değişken x'in kesin sayı ve bağımlı değişken $Y_i = (y_i, \underline{\eta}_i, \overline{\eta}_i)$'nin simetrik üçgensel bulanık sayı olması durumda bulanık regresyon modelini,

$$Y = A + xB \tag{2}$$

olarak tanımlamıştır. Burada $A = (a, \underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ ve $B = (b, \underline{\beta}, \overline{\beta})$ simetrik üçgensel bulanık parametrelerdir. (2) eşitliğindeki parametre tahminlerini yapabilmek için en küçük kareler optimizasyon problemi,

$$\textit{Minimum} \qquad r(A,B) = \sum d(A + x_i B, Y_i)^2$$

biçimindedir. Burada

$$d(A + x_i B, Y_i) = (a + bx_i - \underline{\alpha} - \underline{\beta} x_i - y_i + \underline{\eta}_i)^2 + (a + bx_i + \overline{\alpha} + x_i \overline{\beta} - y_i - \overline{\eta}_i)^2 + (a + bx_i - y_i)^2$$

olarak tanımlanır (Chang and Lee 1996, Diamond 1988).

3. Algoritmalar

3.1. Parametre tahmini için ANFIS'e dayalı bir algoritma

ANFIS, bulanık regresyon analizi için, çıkarsama sisteminin işleyişine imkan veren bir yapıdır. Uyarlamalı ağ; çok tabakalı, ileri beslemeli bir sinir ağıdır. Her sinir girdi sinyalleri üzerinde özel fonksiyonlar gösterir. Regresyon fonksiyonuna iyi bir yaklaşım elde etmek için kullanılan, sinirlere ve bağlantılara sahip uyarlamalı ağ beş tabakadan oluşur (Goger 1993, Dalkılıç ve Apaydın 2009).

Birinci tabakadaki her sinir dilsel değerli girdiye dayanan bir üyelik fonksiyonu üretir yani çıktısı üyelik fonksiyonudur. İkinci tabakadaki sinirler; girdi sinyallerine bağlı w^L (L=1,...,6) ağırlıklarını çıkartırlar. Üçüncü tabaka, ikinci tabakadan gelen çıktı sinyallerinin bir normalizasyon işlevini içerir. Dördüncü tabakadaki her sinir alt modellerden birini üretir; Y^L siniri $Y^L = c_0^L + c_1^L x_1 + c_2^L x_2 + ... + c_p^L x_p$ şeklinde tanımlanır. Son olarak beşinci tabaka, dördüncü tabakadan gelen tüm çıktıların toplamıdır (James ve Donalt, 1999).

Regresyon modellerine ait tahmin setinin elde edilmesi süreci iki önemli adımdan oluşmaktadır. Bunlardan birincisi, verilerin geldiği sınıfı karakterize eden önsel parametre setinin belirlenmesi ve bu parametrelerin süreç içinde güncellenmesi, ikincisi ise sonsal parametre setinin tahmin edilmesidir. ANFIS ile regresyon modellerinin parametrelerinin belirlenmesi süreci, bağımsız değişkenlerin sınıf ya da düzey sayılarının ve önsel parametrelerin belirlenmesi ile başlar. ANFIS ile regresyon modellerinde parametre tahminine ilişkin algoritma;

Adım 1: Bağımsız değişkenlere ait veri kümesine ilişkin optimal sınıf sayıları belirlenir.

Adım 2: Önsel parametreler belirlenir. Yayılımlar, girdi değişkenlerinin değer aldığı aralığa ve değişkenlerin düzey sayılarına göre belirlenir. Merkez parametreleri de değişkenlerin değer aldığı aralığa ve düzey sayısına bağlıdır ve

$$v_i = \min(X_i) + \frac{\max(X_i) - \min(X_i)}{(c-1)} * (i-1) \qquad i = 1,...,p \tag{3}$$

ile belirlenir.

Adım 3: $\bar{w}^L$ ağırlıkları bağımsız değişkenin ait olduğu dağılım ailesine dair üyelik fonksiyonlarından yararlanılarak hesaplanır. Üyelik fonksiyonları normal dağılım fonksiyonu olarak düşünüldüğünde,

$$\mu_{F_h}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - v_h}{\sigma_h} \right)^2 \right] \tag{4}$$

biçiminde tanımlanır.

Adım 4: Bağımsız değişkenlerin kesin, bağımlı değişkenin bulanık sayılardan oluştuğu durumda, sonsal parametre seti bulanık sayılar olarak elde edilir. Sonsal parametre setinin saptanması için,

$$Z = (B^T B)^{-1} B^T Y \tag{5}$$

eşitliği kullanılır. Burada, B ile ağırlıklandırılmış [(*(p+1)*m*)**n*] boyutlu veri matrisi, Y bağımlı değişken değerlerinden oluşan (*n*1*) boyutlu vektör ve Z sonsal parametrelere ilişkin

$$Z = \left[a_0^1, \ldots, a_0^m, a_1^1, \ldots, a_1^m, a_p^1, \ldots, a_p^m \right]^T \tag{6}$$

biçiminde tanımlanan [*(p+1)*m*] boyutlu vektördür.

Adım 5: Sonsal parametre seti kullanılarak, $Y^L = c_0^L + c_1^L x_1 + c_2^L x_2 + \ldots + c_p^L x_p$ biçiminde ifade edilen regresyon modelleri oluşturulur.

Adım 6: Modele ilişkin hata $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left(Y_k - \hat{Y}_k \right)^2 / n$ (7)

biçiminde hesaplanır.

Eğer $\varepsilon < \phi$ ise sürece son verilir. Eğer $\varepsilon \geq \phi$ ise Adım7 ye geçilir.

Adım 7: Adım 2'de belirlenen merkezi önsel parametreler, $v_i^{'} = v_i \pm t$ ile güncellenir.

Adım 8: En küçük hatayı veren önsel parametreler ve bu parametrelere ilişkin modellerden elde edilen tahmin çıktı olarak alınır.

3.2. Bulanık robust regresyon için algoritma

x'in kesin sayı ve $Y = (y, \underline{\eta}, \overline{\eta})$'nin simetrik üçgensel bulanık sayı olması durumda bulanık çok değişkenli regresyon modeli

$$\widetilde{Y}_i = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_{i1} + \ldots + \widetilde{A}_p x_{ip}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

olsun. Bu durumda optimizasyon problemi

$$P: \qquad Min\ r\left(A_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_p\right) = \sum d\left(A_0 + \widetilde{A}_1 x_{1i} + \ldots + \widetilde{A}_p x_{pi}, \widetilde{Y}_i\right)^2,$$

olarak tanımlanır. Burada $\widetilde{A}_0 = \left(a, \underline{\alpha}, \overline{\alpha}\right)$, $\widetilde{A}_1 = \left(b_1, \underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1\right), \ldots, \widetilde{A}_p = \left(b_p, \underline{\beta}_p, \overline{\beta}_p\right)$ biçiminde tanımlanan simetrik üçgensel bulanık parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} d\left(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 x_{1i} + \ldots + \widetilde{A}_p x_{pi}, \widetilde{Y}_i\right)^2 &= \left(a + b_1 x_{1i} + \ldots + b_p x_{pi} - y_i\right)^2 \\ &+ \left(a + b_1 x_{1i} + \ldots + b_p x_{pi} - \underline{\alpha} - \underline{\beta}_1 x_{1i} - \underline{\beta}_2 x_{2i} - \ldots - \underline{\beta}_p x_{pi} - y_i + \underline{\eta}_i\right)^2 \\ &+ \left(a + b_1 x_{1i} + \ldots + b_p x_{pi} + \overline{\alpha} + \overline{\beta}_1 x_{1i} + \overline{\beta}_2 x_{2i} + \ldots + \overline{\beta}_p x_{pi} - y_i - \overline{\eta}_i\right)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

dir. P probleminin a, b_i'ya göre ve $\underline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\overline{\beta}$'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde normal denklem sistemleri elde edilir. Bu sistem çözüldüğünde elde edilen tahmin ediciler yardımıyla bulanan tahminler ile bulanık regresyon modeli yazılır. Bulanık robust regresyon ile parametre tahminine ilişkin algoritma:

Adım 1: x'in kesin sayı ve $Y = (y, \underline{\eta}, \overline{\eta})$ simetrik üçgensel bulanık sayı olması durumda başlangıç bulanık tahmini regresyon modeli P probleminden bulunur.

Adım 2: Merkezler için tahmin değerleri ($\hat{y}_i$) ve artıklar (r_i) hesaplanır. *OM* indeksine göre artıklar belirlenir.

Adım 3: Artıkların mutlak değerlerine göre medyanı belirlenir ve

$$D_i = \left\| abs(r_i) - median\left(abs(r_i)\right) \right\| \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

uzaklığı hesaplanır.

Adım 4: Uzaklıklara bağlı olarak üyelik fonksiyonu

$$\mu(r) = \begin{cases} 1 & abs(r) \leq a, \\ \dfrac{b - abs(r)}{b - a} & a < abs(r) < b, \\ 0 & d.d, \end{cases} \tag{9}$$

biçiminde tanımlanır. Burada;

$$a = median(D_i),$$
$$b = \max(D_i) + \mathrm{d}.$$

$$\mathrm{d} = median\left| r_i - median(r_i) \right| / 0.6745,$$

dır.

Adım 5: Eşitlik (9)'da tanımlanan üyelik fonksiyonu ile üyelik dereceleri belirlenir ve ağırlık matrisi oluşturulur. Ağırlık matrisi, köşegen elemanları üyeliklerden oluşan diagonal matristir. Elde edilen ağırlık matrisi yardımıyla ağırlıklandırılmış bulanık en küçük kareler tahminleri bulunur.

Adım 6: Eğer $\left| \underline{\hat{\beta}}^{k+1} - \underline{\hat{\beta}}^{k} \right| < \varepsilon$ ise durulur. Aksi durumda Adım 2' ye gidilir. Burada $\underline{\hat{\beta}}$ tahmin edilen regresyon model parametreleri, k yineleme sayısı ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere çok küçük bir sayıdır(Kula ve Apaydın, 2008).

4. Uygulama

Uygulamada kullanılan veri seti Cheng ve Lee (1999)'den alınmıştır. Simetrik bulanık sayılardan oluşan bağımlı değişkenin yer aldığı veri setinde iki bağımsız değişken ve 30 gözlem bulunmaktadır. Veri seti Çizelge 1'de, yöntemlere ilişkin tahminler ve artıklar Çizelge 2'de verilmiştir. Algoritmaların çözümü için MATLAB'da yazılan programlar kullanılmıştır.

Çizelge 1. Veri seti

i	x_{1i}	x_{2i}	$\tilde{y}_i(y_i,\alpha_i)$	i	x_{1i}	x_{2i}	$\tilde{y}_i(y_i,\alpha_i)$
1	6.8590	9.6880	(4.9920, 1.2480)	16	6.1340	2.8240	(4.2730, 1.0680)
2	7.2150	0.6170	(4.8490, 1.2120)	17	8.9760	1.1650	(5.1600, 1.2900)
3	3.1990	2.8980	(5.2560, 1.3140)	18	2.3160	7.1210	(5.3100, 1.3280)
4	0.2600	9.1510	(4.9940, 1.2480)	19	0.0800	2.1270	(5.0360, 1.2590)
5	5.5280	7.1140	(3.2750, 0.8190)	20	2.9370	1.3000	(4.7550, 1.1890)
6	3.5390	2.7660	(4.8370, 1.2090)	21	5.4080	1.3430	(6.0470, 1.5120)
7	9.4760	8.4430	(5.0420, 1.2600)	22	6.5120	6.0410	(5.1630, 1.2910)
8	5.9680	9.4460	(5.2760, 1.3190)	23	3.5040	5.5340	(5.4090, 1.3520)
9	7.5620	2.6780	(5.3840, 1.3460)	24	9.3190	1.5160	(5.0750, 1.2690)
10	5.1030	3.3240	(4.3790, 1.0950)	25	6.8790	2.9060	(5.3180, 1.3300)
11	2.8020	6.1010	(4.2080, 1.0520)	26	6.7930	0.1420	(5.0350, 1.2590)
12	2.8310	6.4920	(4.8870, 1.2220)	27	8.3250	2.4320	(4.9040, 1.2260)
13	8.2870	6.0810	(5.1670, 1.2920)	28	0.5390	8.2110	(5.0120, 1.2530)
14	5.4790	2.9990	(3.3820, 0.8450)	29	1.5440	6.9000	(4.8630, 1.2160)
15	0.4230	0.8850	(5.0330, 1.2580)	30	9.2980	2.5660	(4.8260, 1.2070)

Bulanık robust regresyon, ANFIS'e dayalı algoritma ve Diamond yöntemi için elde edilen model tahminleri sırasıyla eşitlik (10, 11 ve 12)'de verilmiştir.

$$\hat{\tilde{Y}}_{FRR} = (4.9221, 1.2306) + (0.0104, 0.0026)X_1 + (0.0070, 0.0017)X_2 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{Y}}_{ANN1} &= (5.1741, 1.2933) - (0.0367, 0.0088)X_1 - (0.2175, 0.0555)X_2 \\ \hat{\tilde{Y}}_{ANN2} &= (6.7164, 1.6913) + (0.1271, 0.0311)X_1 - (0.1093, 0.0286)X_2 \\ \hat{\tilde{Y}}_{ANN3} &= (5.4710, 1.3632) + (0.0115, 0.0033)X_1 + (0.1200, 0.0302)X_2 \\ \hat{\tilde{Y}}_{ANN4} &= -(2.4836, 0.6147) + (0.4185, 0.1038)X_1 + (0.4082, 0.1022)X_2 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\hat{\tilde{Y}}_{DIM} = (4.9323, 1.2331) + (0.0039, 0.0010)X_1 + (-0.0109, -0,0027)X_2 \tag{12}$$

Veri kümesi için artık analizi yapılmış 5, 14 ve 21. gözlemlerin aykırı gözlem olduğu görülmüştür. Bulanık robust regresyon çözümlemesi ile her bir gözlem ağırlıklandırılarak modele etki yapmıştır, elde edilen model tahmini kullanılarak tahminler ve artıklar hesaplanmıştır. Yöntemler için hata eşitlik 7'den elde edilmiştir. Çizelge 2'den FRR için artıklar incelendiğinde aykırı değerler için artıkların büyük ancak diğer gözlemler için küçük olduğu görülmektedir. Böylece yöntemin aykırı değer dışındaki gözlemler için uyumu iyidir. ANFIS'te ise eşitlik (10)'da verilen regresyon modellerinin ağırlıklı ortalamalarından elde edilen tahmin değerlerine dayanarak belirlenen artık değerleri hesaplanmıştır. ANFIS'te başlangıçta gözlemler kümelendiği ve sonuçta ağırlıklandırılmış artıklar elde edildiği için artıklar küçük ve hata kriterine göre de en küçük hata elde edilmiştir. Diamond yönteminde ise hatanın FRR'ye göre küçük olmasının nedeni aykırı gözlemlere FRR ye göre daha küçük artık değeri vermesindendir. FRR ve Diamond yöntemleri için 5, 14 ve 21. gözlemlerin artıkları göz önünde bulundurulmadığında FRR için hata 0.0894 bulunurken Diamond için 0.0995 olarak bulunmuştur. Buda bize FRR ile elde edilen modelin aykırı değerler dışındaki gözlemler için uyumunun iyi olduğunu göstermektedir.

Çizelge 2. Yöntemlere ilişkin tahminler ve artıklar

i	x_{1i}	x_{2i}	$\tilde{y}_i(y_i, \alpha_i)$	$\hat{\tilde{y}}_{i(ANN)}(\hat{y}_i, \hat{\alpha}_i)$	$e_{i(ANN)}$	$\hat{\tilde{y}}_{i(FRR)}(\hat{y}_i, \hat{\alpha}_i)$	$e_{i(FRR)}$	$\hat{\tilde{y}}_{i(DIM)}(\hat{y}_i, \hat{\alpha}_i)$	$e_{i(DIM)}$
1	6.8590	9.6880	(4.9920, 1.2480)	(5.0013, 1.2503)	-0.0064	(5.0613, 1.2653)	-0.0693	(4.8535, 1.2076)	0.1385
2	7.2150	0.6170	(4.8490, 1.2120)	(5.0725, 1.2681)	-0.2162	(5.0014, 1.2505)	-0.1524	(4.9537, 1.2322)	-0.1047
3	3.1990	2.8980	(5.2560, 1.3140)	(4.8163, 1.2040)	0.4253	(4.9757, 1.2440)	0.2803	(4.9132, 1.2256)	0.3428
4	0.2600	9.1510	(4.9940, 1.2480)	(5.0853, 1.2709)	-0.0948	(4.9890, 1.2472)	0.0050	(4.8336, 1.2084)	0.1604
5	5.5280	7.1140	(3.2750, 0.8190)	(4.5576, 1.1397)	**-1.2917**	(5.0294, 1.2574)	**-1.7544**	(4.8763, 1.2144)	**-1.6013**
6	3.5390	2.7660	(4.8370, 1.2090)	(4.8146, 1.2036)	0.0315	(4.9783, 1.2446)	-0.1413	(4.9160, 1.2260)	-0.0790
7	9.4760	8.4430	(5.0420, 1.2600)	(5.3053, 1.3259)	-0.2615	(5.0798, 1.2700)	-0.0378	(4.8772, 1.2113)	0.1648
8	5.9680	9.4460	(5.2760, 1.3190)	(4.8535, 1.2133)	0.4189	(5.0504, 1.2626)	0.2256	(4.8526, 1.2082)	0.4234
9	7.5620	2.6780	(5.3840, 1.3460)	(4.8789, 1.2198)	0.4898	(5.0194, 1.2550)	0.3646	(4.9326, 1.2266)	0.4514
10	5.1030	3.3240	(4.3790, 1.0950)	(4.7154, 1.1788)	-0.3279	(4.9984, 1.2497)	-0.6194	(4.9160, 1.2246)	-0.5370
11	2.8020	6.1010	(4.2080, 1.0520)	(4.7613, 1.1905)	-0.5636	(4.9940, 1.2485)	-0.7860	(4.8767, 1.2169)	-0.6687
12	2.8310	6.4920	(4.8870, 1.2220)	(4.7728, 1.1934)	0.1279	(4.9971, 1.2493)	-0.1101	(4.8726, 1.2159)	0.0144
13	8.2870	6.0810	(5.1670, 1.2920)	(4.7066, 1.1768)	0.4513	(5.0508, 1.2628)	0.1162	(4.8983, 1.2175)	0.2687
14	5.4790	2.9990	(3.3820, 0.8450)	(4.7530, 1.1882)	**-1.3632**	(5.0001, 1.2501)	**-1.6181**	(4.9210, 1.2256)	**-1.5390**
15	0.4230	0.8850	(5.0330, 1.2580)	(5.1236, 1.2810)	-0.0936	(4.9327, 1.2332)	0.1003	(4.9243, 1.2308)	0.1087
16	6.1340	2.8240	(4.2730, 1.0680)	(4.7869, 1.1967)	-0.5060	(5.0056, 1.2515)	-0.7326	(4.9254, 1.2261)	-0.6524
17	8.9760	1.1650	(5.1600, 1.2900)	(5.1253, 1.2815)	0.0210	(5.0235, 1.2560)	0.1365	(4.9546, 1.2309)	0.2054
18	2.3160	7.1210	(5.3100, 1.3280)	(4.8611, 1.2154)	0.4607	(4.9961, 1.2490)	0.3139	(4.8637, 1.2141)	0.4463
19	0.0800	2.1270	(5.0360, 1.2590)	(5.0002, 1.2498)	0.0396	(4.9379, 1.2345)	0.0981	(4.9094, 1.2274)	0.1266
20	2.9370	1.3000	(4.7550, 1.1890)	(4.9882, 1.2471)	-0.2266	(4.9617, 1.2405)	-0.2067	(4.9296, 1.2299)	-0.1746
21	5.4080	1.3430	(6.0470, 1.5120)	(4.9527, 1.2382)	**1.0733**	(4.9877, 1.2470)	**1.0593**	(4.9388, 1.2300)	**1.1082**
22	6.5120	6.0410	(5.1630, 1.2910)	(4.5277, 1.1322)	0.6505	(5.0321, 1.2581)	0.1309	(4.8918, 1.2174)	0.2712
23	3.5040	5.5340	(5.4090, 1.3520)	(4.6763, 1.1692)	0.7218	(4.9973, 1.2493)	0.4117	(4.8856, 1.2185)	0.5234
24	9.3190	1.5160	(5.0750, 1.2690)	(5.1261, 1.2818)	-0.0395	(5.0295, 1.2575)	0.0455	(4.9521, 1.2299)	0.1229
25	6.8790	2.9060	(5.3180, 1.3300)	(4.8076, 1.2019)	0.5194	(5.0139, 1.2536)	0.3041	(4.9275, 1.2259)	0.3905
26	6.7930	0.1420	(5.0350, 1.2590)	(5.0952, 1.2738)	-0.0547	(4.9936, 1.2485)	0.0414	(4.9572, 1.2334)	0.0778
27	8.3250	2.4320	(4.9040, 1.2260)	(4.9659, 1.2416)	-0.0765	(5.0256, 1.2565)	-0.1216	(4.9383, 1.2274)	-0.0343
28	0.5390	8.2110	(5.0120, 1.2530)	(5.0513, 1.2628)	-0.0333	(4.9853, 1.2463)	0.0267	(4.8449, 1.2110)	0.1671
29	1.5440	6.9000	(4.8630, 1.2160)	(4.9238, 1.2311)	-0.0715	(4.9866, 1.2466)	-0.1236	(4.8631, 1.2146)	-0.0001
30	9.2980	2.5660	(4.8260, 1.2070)	(5.0410, 1.2605)	-0.2039	(5.0367, 1.2593)	-0.2107	(4.9406, 1.2271)	-0.1146
HATA				$\varepsilon_{(NN)} = 0.2616$		$\varepsilon_{(FRR)} = 0.3077$		$\varepsilon_{(DIM)} = 0.2949$	

Kaynaklar

[1] P.T. Chang, E.S. Lee, 1996 A generalized fuzzy weighted least-squares regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 82, 289-298.

[2] A. Celmins, 1987, Least squares model fitting to fuzzy vector data, *Fuzzy Sets and Systems,* 22, 245-269.

[3] C.B. Cheng, E.S. Lee, 1999, Applying Fuzzy Adaptive Network to Fuzzy Regression Analysis, *An International Journal Computers & Mathematics With Applications,* 38,123–140.

[4] S.H. Choi, J.J. Buckley,2008, Fuzzy regression using least absolute deviation estimators, *Soft Comput* ,12, 257–263

[5] C.C. Chuang, J.T. Jeng, C.W. Tao,2009, Hybrid robust approach for TSK fuzzy modeling with outliers, *Expert Systems with Applications,* 36, 8925–8931.

[6] R. Coppia, P. D'Ursob, P. Giordania, and A. Santorob,2006, Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 267 – 286

[7] P. Dimond ,1988, Fuzzy least squares, *Information Science*, 46,141-157

[8] P. D'Urso, 2003, Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp output, *Computational Statistics & Data Analysis*, 42, 47-72.

[9] D.T. Erbay, A. Apaydın, 2009, A Fuzzy Adaptive Network Approach to Parameter Estimation in case Where Independent Variables Come From Exponential Distribution, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233, 26-45.

[10] D.H. Hong, Hwang, C.,2004, Extended fuzzy regression model using regularization method, *Information Science*, 164, 31-46.

[11] H. Ishibuchi, M. Nei, 2001, Fuzzy Regression using Asymmetric Fuzzy Coefficients and Fuzzied Neural Networks, *Fuzzy Sets and Systems*, 119, 273–290.

[12] D. James, W. Donalt, 1999, Fuzzy Number Neural Networks, *Fuzzy Sets and Systems*,108, 49-58.

[13] S. Jozsef, 1992, On the e_ect of linear data transformation in the possibilistic fuzzy linear regression, *Fuzzy Sets and Systems*,45, 185-188.

[14] J. Jyh-Shing Roger, 1993, ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics,* 23(3), 665-685

[15] C. Kao, CL. Chyu,2003, Least-squares estimates in fuzzy regression analysis. *Eur. J. Operational Res* ,148, 426–35.

[16] K.S. Kula, A. Apaydın, 2008, Fuzzy Robust Regression Analysis Based on the Ranking of Fuzzy Sets, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16, 663-681.

[17] D. T. Redden, W.H. Woddall,1996, Further examination of fuzzy linear regression, *Fuzzy Sets and Systems* 79, 203-211.

[18] H. Tanaka, S. Uejima, K. Asai, 1982, Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 12, 903-907.

[19] H. Tanaka, I. Ishibuchi, 1991, Identification of possibility linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters, *Fuzzy Sets and Systems,* 41,145-160.

[20] H. Tanaka, 1987, Fuzzy data analysis by possibilistic linear models, *Fuzzy Sets and Systems,* 24, 363-375.

[21] M.S. Yang, H.H. Liu, 2003, Fuzzy least squares algorithms for interactive fuzzy linear regression models. *Fuzzy Sets and Systems*, 135, 305-316.

[22] M.S. Yang, C.H. Ko, 1997, On cluster-wise fuzzy regression analysis. *IEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics Part B: Cybernetics,* 27, 1-13.

[23] J. Watada, Y. Yabuuchi,1994, Fuzzy robust regression analysis. *Fuzzy/IEEE'94, Theird IEEE International Conference on Fuzzy Systems,* 1-7.