



Çift elips yapısı etrafında çözüm uyarlamalı Navier-Stokes çözücüsü kullanarak yüksek Reynolds sayılı akış analizi

Emre Kara*

Gaziantep Üniversitesi, Uçak ve Uzay Mühendisliği Bölümü, Gaziantep
emrekara@gantep.edu.tr ORCID: 0000-0002-9282-5805, Tel: (342) 360 12 00 (3517)

Ahmet İhsan Kutlar

Gaziantep Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Gaziantep
aikutlar@gantep.edu.tr ORCID: 0000-0002-8564-0458, Tel: (342) 360 12 00 (2543)

Mehmet Halûk Aksel

Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Ankara
aksel@metu.edu.tr ORCID: 0000-0003-0563-4216, Tel: (312) 210 52 98

Geliş: 06.03.2019, Revizyon: 03.05.2019, Kabul Tarihi: 28.05.2019

Öz

Bu çalışmada, çift elips yapısı etrafında yüksek Reynolds ve Mach (hipersonik) sayılarında ve 30 derece hücum açısındaki akışın Kartezyen temelli akış çözümü kullanılarak analizi yapılmıştır. Analiz için, yerel olarak geliştirilmiş, hiyerarşik (köken, çocuk ve komşu hücrelerin bağıl olarak tanımlandığı) Kartezyen ağ tekniklerini kullanan Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) temelli akış çözücüsü kullanılmıştır. Öncelikle ağ geliştirme kodlarında kullanılan Kartezyen ağ yöntemleri ile ilgili bilgi verilmiş, ikinci adımda akış çözücüsündeki sayısal yöntemlerin denklemler eşliğinde açıklamaları yapılmış, son olarak, seçilen örnek çalışma etrafındaki akışın sayısal analizi yapılmıştır. Doğrulama çalışması için, çift (basit) elips yapısı etrafında 16.7 milyon Reynolds sayısı ile 8.15 Mach sayısında ve 30 derece hücum açısındaki akış seçilmiştir. Bu çalışmanın seçilmesinin başlıca nedeni bu akış altında hem yay (bow) şokunu hem de yüzey (canopy) şokunu aynı anda yakalayabilmeyi sağlamaktır. Liou'nun yukarı iletimli ayrıştırma yöntemiyle eliptik yapının etrafındaki basınç sabitleri dağılımı elde edilmiştir. Türbülanslı ve sıkıştırılabilir akış için iki-boyutlu çift elips yapısı üzerinde hassas çözümleri geliştirilmiştir. Çok katmanlı yöntem ile akış çözücüsünün yakınsama oranı artırılmıştır. Sonuçlar, yakın zamanda yazılmış bilimsel çalışmalar ile karşılaştırılmıştır. Hem yay burun şoku hem de keskin yüzey şoku başarılı ve deneysel sonuçlarla tutarlı şekilde akış çözücüsü tarafından yakalanmıştır. Yüzey çevresindeki Mach sayısı kontürleri başarılı şekilde benzetilmiş, referans çalışmalardaki değerler arasında değiştiği gözlemlenmiştir. Son bölümde sonuçlarla ilgili tartışma yapılmış ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar hakkında öngörülerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kartezyen ağ; çift elips yapısı; çözüm uyarlama; çok katmanlı yöntem; yüksek Reynolds sayılı akış.

* Yazışmaların yapılacağı yazar

Giriş

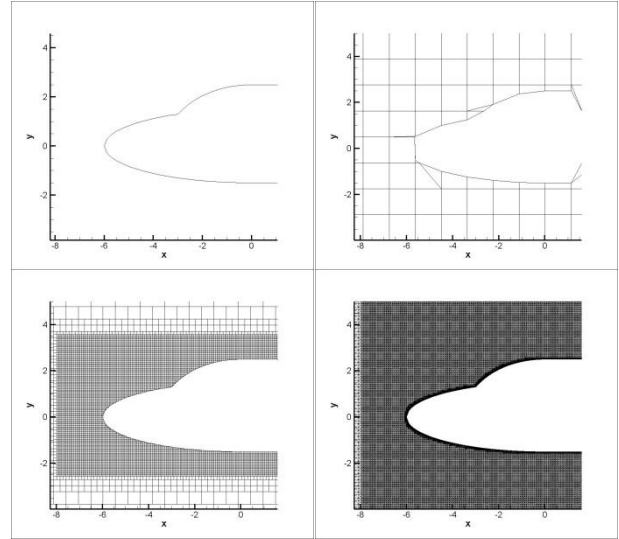
Mevcut çalışmada akış çözümü için, yerel olarak geliştirilmiş, hiyerarşik (köken, çocuk ve komşu hücrelerin bağıl olarak tanımlandığı) Kartezyen ağ tekniklerini kullanan HAD temelli akış çözücüsü kullanılmıştır. İki boyutlu, düzensiz geometrilerin etrafındaki sıkıştırılabilir gazların yüksek hızda akış dinamiğinin çözümüne boyutsuz hale getirilen Navier-Stokes denklemleri ile ulaşılmıştır. Sürtünmesiz (inviscid), sürtünlü (viscous) ve türbülanslı akışların çözümündeki yetkinliği artırmak için sonlu hacim ayrıklaştırma ile açık (explicit) zamanlı adımlama yöntemi, yerel zaman adımlama ve çok katmanlı yöntemlerden (Hartmann vd., 2008) yararlanılmıştır.

Çalışmanın gelişimi şu şekilde olacaktır: Birinci bölümde ağ geliştirme kodlarında kullanılan Kartezyen ağ yöntemleri ile ilgili bilgi verilecek, ikinci bölümde akış çözücüsündeki sayısal yöntemlerin denklemler eşliğinde açıklamaları yapılacak, üçüncü bölümde seçilen örnek çalışma (çift elips yapısı) etrafındaki akışın sayısal analizi yapılacaktır. Son bölümde, sonuçlarla ilgili tartışma yapılacak ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar hakkında öngörülerde bulunulacaktır.

Materyal ve Yöntem

Kartezyen Ağ Yöntemleri

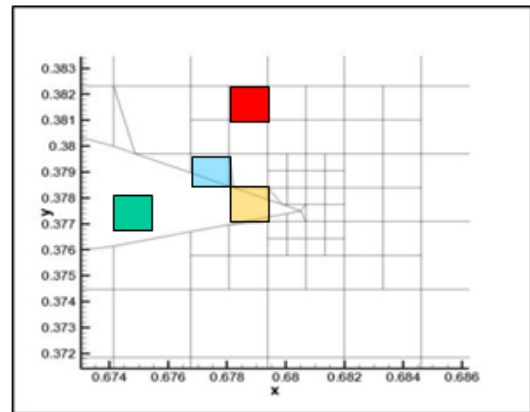
Kartezyen yöntemleri, yapısız ağ yöntemlerinin özel bir alt dalıdır. Son on yılda, özellikle karmaşık geometriler etrafında yapılan çözümlerde, uyarlamalı Kartezyen ağ üretimi algoritmalarının güçlü bir şekilde canlandığı görülmektedir (Bungartz vd., 2010; Berger vd., 2012; Chung, 2013). Çok elemanlı (multi-element) ve/veya düzensiz gövdelerin çevresinde oluşturulabilen Kartezyen ağlar (Şekil 1) Navier-Stokes denklemleri gibi kısmi türevli denklemlerin çözümünde faydalı etkiler elde edilmesini sağlamaktadır. Geleneksel yapısız ağ yöntemlerinin kullanmadığı ayrıcalıklı tekniklerden (çok katmanlı yöntemler gibi) de yararlanması ayrı bir artıdır.



Şekil 1. Çift elips yapısı etrafında üç aşamalı Kartezyen ağ gösterimi

Hücre Hiyerarşisi

Kartezyen ağ üretimi sırasında katı yüzeyle kesişen hücre dikkatli bir şekilde saptanıp işaretlenmelidir. Aslında tüm çözüm hücrelerinin katı yüzeyle kesişip kesişmeme olasılıkları tek tek kontrol edilmelidir. Çözüm hücresi, katı yüzeyin içinde kalıyorsa “iç-hücre”, dışında kalıyorsa “dış-hücre” olarak tanımlanır. Eğer bir kere kesişiyorlarsa, “kesik-hücre” olarak tanımlanmalı, fakat kesişme sonrası birden fazla parçası dışarıda kalıyorsa “bölünmüş-hücre” olarak tanımlanmalıdır. Şekil 2’de tüm bu hücre tipleri sırasıyla yeşil, kırmızı, mavi ve sarı renklerle gösterilmiştir. Kullanılan algoritma, “sınırlayan kareler (marching squares) yöntemi” (Çakmak, 2009) olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 2. Hücre tiplerinin tanımlanması

Çok katmanlı ağ yöntemi

Problemin boyutsal ve zamansal ayrıklaştırılması sonrası, çözüme varımda en büyük sorun yakınsamadır. Burada devreye giren çok katmanlı ağ yönteminin görevi, seyrek ağ elemanlarını sık ağ elemanlarından daha fazla kullanmaktır (Jameson, 1985). Bunu yaparken “Full Approximation Storage (FAS)” çok katmanlı yöntemi (De Zeeuw, 1993) lineer olmayan viskoz akış benzetimi için kullanılmıştır.

Uygulamaya, sık ağ elemanlarının hem artan (kalıntı-residual) vektörünün hem de çözüm vektörünün bir seviye yüksek olan seyrek ağ elemanına aktarımı ile başlanır. Ağlar arası (inter-grid) transfer operatörü olarak tanımlanan bu işlemin adımları;

- (i) sık ağ iterasyonu (fine grid iteration),
- (ii) daraltma (restriction),
- (iii) uzatma (prolongation),
- (iv) düzeltme (correction) adımlarıdır.

$L(Q)$ doğrusal olmayan denklemler sistemiyle başlamak üzere:

$$L(Q) = FF \quad (1)$$

Denklem 1’de L doğrusal olmayan operatörü, FF zorlama fonksiyonu ve Q çözüm vektörünü tanımlamaktadır.

Sık ağ iterasyonu (Fine grid iteration) adımı

Bu adımın sonucunda, çözüm alanında ağ aralığı h olan sık ağ elemanının yüksek frekanslı olan hatalarını azaltmak için yeni bir çözüme yuvarlanması istenmektedir. Bu h seviyesinde, artan şu şekilde kurulmuştur:

$$Res^h = FF^h - L^h Q^h \quad (2)$$

Daraltma (Restriction) adımı

Birkaç Runge-Kutta döngüsünden sonra, seyrek ağ elemanı daraltılmış çözüm vektörü, Q^{2h} , aşağıdaki daraltma denklemi ile transfer edilir:

$$Q^{2h} = I_h^{2h} Q^h \quad (3)$$

Yukarıdaki denklemde, h sık ağ elemanına, $2h$ seyrek ağ elemanına, I saktan seyreğe daraltma operatörüne tekabül etmektedir.

Uzatma (Prolongation) adımı

Seyrek ağ zorlama fonksiyonu, FF^{2h} , akış denklemlerine eklenir:

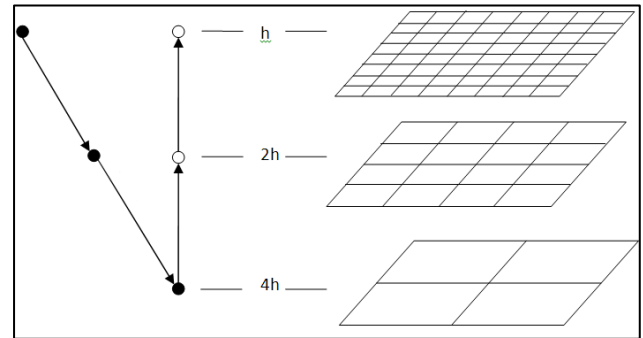
$$FF^{2h} = I_h^{2h} Res^h(Q^h) - Res^{2h}(Q^{2h}) \quad (4)$$

Düzeltilme (Correction) ve Son Ağ İterasyonu Adımı

İlk iterasyon (güncelleme) sonrası, seyrek ağ artanı terimleri sık ağ artanı terimlerine dönüştürülür. Sık ağ çözümleri, seyrek ağda m tane zaman adımlaması yürütülmesi süresince çoklu doğrusal interpolasyon yöntemi ile aşağıdaki denklemle düzeltilir:

$$Q_{cor}^h = Q^h + I_h^{2h}(Q_m^{2h} - Q_0^{2h}) \quad (5)$$

Önceden tanımlanmış seyrek ağ elemanına varıldığı zaman, sık ağ elemanına ulaşılan kadar uzatma adımı peş peşe tekrar edilir. Bu çalışmada, anlatılan işlemler V (testere dişi) döngüsü ile ele alınmıştır (Çakmak, 2009). Şekil 3’te içi dolu daireler, ●, daraltma öncesi zaman adımlarını; içi boş daireler, ○, uzatma sonrası zaman adımlarını göstermektedir. Seviyesi h ile gösterilen en sık ağ elemanı, önce $2h$ ve $4h$ ağ seviyelerine genişletilmiş, sonra da özgün boyutlarına uzatılmıştır.



Şekil 3. Üç ağ seviyesindeki (h , $2h$, $4h$) çok katmanlı ağ döngüsünün gösterimi

Sayısal yöntemler

Bu bölümde, Reynolds ortalamalı Navier-Stokes denklemlerinin Spalart-Allmaras türbülans

modeli ile kapatıldığı (tamamlandığı), kısaca RANS-SA denilen denklemlerin iki boyutlu sıkıştırılabilir akışkanların viskoz (ağdalı) akışlardaki integral formu gösterilecektir. Özgün ve Eyi'nin de (2014) belirttiği gibi, Spalart-Allmaras (SA) türbülans modeli diğer modellere göre hem daha az zaman (CPU) harcamakta, hem de yüzey basıncı ile akış ayrılması tahminlerinde genelde daha isabetli tahminler vermektedir. SA modeli (Kara, 2017), bir işleyen (working) değişkeni, sonrasında da eddy viskozitesini çözebilir. Bu iki değişken eklemesiyle birlikte, RANS denklemlerine SA'nın kısmi türevli denklemleri eklenerek denklemler tamamlanmıştır. RANS-SA denklemlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için, aşağıdaki Gauss ıraksama teoremi kullanılarak (Blazek, 2015) integral formu oluşturulmuştur:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{Q} dA + \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S (\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_A S dA \quad (6)$$

Yukarıdaki denklemde, A hücre alanını, S hücre kenarlarını, \mathbf{Q} korunan değişkenin vektörünü, S türbülans kaynak terimini göstermektedir. $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$ sürtünmesiz (konvektif) akı vektörü olan \mathbf{F} 'nin, toplam akının hesaplandığı hücrenin yüzeyine dik olan bileşenidir. $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{n})$ viskoz (difüzyif) akı vektörü olan \mathbf{G} 'nin, toplam akının hesaplandığı hücrenin yüzeyine dik olan bileşenidir. \mathbf{Q} , herhangi bir korunan değişkenin; yoğunluk, ρ , x - ve y -hız bileşenleri olan sırasıyla u ve v , toplam enerji, E veya SA işleyen değişkeni, \tilde{v} vektörünü temsil edebilir:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Kaynak terimlerini (S_t) içeren kaynak vektörü, \mathbf{S} , aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{S} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad S_t]^T \quad (8)$$

SA model denklemini içeren, sürtünmesiz (inviscid) akı vektörleri, \mathbf{F} , aşağıda gösterilmiştir:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (9)$$

$$F_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \\ \rho u\tilde{v} \end{bmatrix}; F_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \\ \rho v\tilde{v} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Yukarıdaki denklemlerde, H toplam entalpiyi, p ise akışkanın statik basıncını göstermektedir. E , H ve p değişkenlerini birbirine bağlayan denklemler aşağıda verilmiştir:

$$E = e + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (11)$$

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (12)$$

Yukarıdaki iki denklem, γ ile birleştirilirse aşağıdaki genel denkleme varılır:

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} \right) \quad (13)$$

Viskoz akı vektörü, \mathbf{G} , aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{G} = G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} \quad (14)$$

$$G_x = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u \tau_{xx} + v \tau_{xy} - q_x \\ \frac{1}{\sigma} \rho (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$G_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u \tau_{yx} + v \tau_{yy} - q_y \\ \frac{1}{\sigma} \rho (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sürtünmeli (viscous) gerilme elemanları, τ_{ij} , şu şekilde tanımlanır:

$$\tau_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2 \mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (19)$$

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu_{eff} \quad (20)$$

Yukarıdaki denklemlerde efektif viskozite, μ_{eff} , eddy (türbülans) viskozitesi, μ_t ile moleküler viskozite, μ , toplamından oluşur. λ ile gösterilen yığın (bulk) viskozitenin, Stokes'un bağıntısı (Blazek, 2015) olarak da bilinen tanımı denklem 20'de verilmiştir. Difüzyon akı, q_i , Fourier'in ısı iletimi yasası ile şu şekilde gösterilebilir:

$$q_x = C \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (21)$$

$$q_y = C \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (22)$$

Denklemlerde C , sabit basınç altında özgül ısıyı, T akışkanın sıcaklığını, Pr , Prandtl sayısını, Pr_t , türbülans Prandtl sayısını göstermektedir. Mükemmel gaz varsayımı halinde, moleküler viskozite, μ , aşağıdaki Sutherland yasası (Blazek, 2015) vasıtasıyla sadece akışkan sıcaklığının (T , Kelvin derecesinde) fonksiyonu haline getirilmiştir:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{T_\infty + C_{suth}}{T + C_{suth}} \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \quad (23)$$

Yukarıdaki denklemde μ_∞ , referans sıcaklık T_∞ 'daki referans dinamik viskoziteyi, C_{suth} Sutherland sabiti olarak bilinen efektif sıcaklığı tanımlamaktadır. Bu çalışmada, hava için C_{suth} 110.4 K ve T_∞ ise 273.15 K olarak alınmıştır.

Yukarıdaki denklemlerden denklem 6'dan denklem 16'ya kadar olan kısım kullanılarak, türbülans viskozitesi, μ_t , her matriste el alttaki satırda görünen türbülans transport denklemi içindeki işleyen değişken, \tilde{v} , vasıtası ile modellenilebilir/hesaplanabilir. Bir süreklilik denklemi, üç momentum denklemi, bir enerji denklemi üzerine bu türbülans transport denklemi eklenerek denklemler sisteminin sayısı altıya çıkarılmıştır. Böylelikle bilinmeyen

değişkenler olan ρ , u , v , w , p ve türbülans viskozitesi μ_t (altı değişken) çözülebilir.

Şokları yakalamak için yapılan çözüm uyarlaması aşağıdaki parametrelere ve minimum/maksimum kriterlerine (Marshall, 2003) göre yapılmıştır. Kontrol hacminin karakteristik uzunlukları olan, ζ , konservatif değişkenlerin bir hücreden komşu hücreye geçişinde aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\zeta_{D,x} = |\nabla \bullet u| V^{0.5};$$

$$\zeta_{D,y} = |\nabla \bullet v| V^{0.5}; \quad \zeta_{D,z} = |\nabla \bullet w| V^{0.5} \quad (24.a)$$

$$\zeta_{C,x} = |\nabla \bullet u| V^{0.5};$$

$$\zeta_{C,y} = |\nabla \bullet v| V^{0.5}; \quad \zeta_{C,z} = |\nabla \bullet w| V^{0.5} \quad (24.b)$$

Denklem 24'teki alt indisler, D ve C , sırasıyla hız vektörlerinin ıraksama (divergence) ve kıvrılma (curl) tanımlarını göstermektedir. Referans değerleriyle bu üç karakteristik uzunluğun standart sapması tüm çözüm alanı için aşağıdaki denklemle bulunmaktadır:

$$\sigma_D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_{D,x}^2 + \zeta_{D,y}^2 + \zeta_{D,z}^2 \quad (25.a)$$

$$\sigma_C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_{C,x}^2 + \zeta_{C,y}^2 + \zeta_{C,z}^2 \quad (25.b)$$

Denklem 25'te N çözüm alanı hücrelerinin toplam sayısını ifade etmektedir. Her hücre sıklaştırma veya genişletme uygulaması için çözüm sırasında t_r ve t_c eşik değerlerine göre işaretlenmekte ve bu işlemler aşağıda verilen kriterlere göre uygulanmaktadır:

$$(\zeta_{D,x} + \zeta_{D,y} + \zeta_{D,z} > t_r \sigma_D)$$

ve

$$(\zeta_{C,x} + \zeta_{C,y} + \zeta_{C,z} > t_r \sigma_C)$$

$$\text{geçerliyse sıklaştır} \quad (26.a)$$

$$(\zeta_{D,x} + \zeta_{D,y} + \zeta_{D,z} < t_c \sigma_D)$$

ve

$$(\zeta_{C,x} + \zeta_{C,y} + \zeta_{C,z} < t_c \sigma_C)$$

geçerliyse genişlet (26.b)

t_r ve t_c eşik değerleri sırasıyla 1 ve 0.1 alınmıştır.

Uygulama ve Başarımlar

Bu çalışmada, Kartezyen ağ tabanlı akış çözücüsü kodları, açık (explicit) türev kullanan sonlu hacim teknikleri kullanılarak geliştirilmiştir. Kod geliştirme, sayısal benzetimler ve hızlandırıcı kontrolleri, ev tipi kişisel bilgisayarda (Intel® Core™ I5-3470 3.20-GHz işlemci, 12 GB RAM ve Visual FORTRAN derleyici) yapılmıştır. Doğrulama çalışması için, çift (basit) elips yapısı etrafında 16.7 milyon Reynolds sayısı ile 8.15 Mach sayısında ve 30 derece hücum açısındaki akış seçilmiştir. Bu çalışmanın seçilmesinin başlıca nedeni, bu akış altında hem yay şokunu hem de yüzey şoku aynı anda yakalayabilmeyi sağlamaktır. Gustaffson vd. (1991) tarafından “uyarlamalı strateji kullanan tüm çözücüler için meydan okuyan bir problem” olarak tanımlanan çift elips yapısının çözümünde, çözüm uyarlamalı ağ sonuçları test edilmiştir. Daha önceki çalışmalarda (Gustaffson vd., 1991; Désidéri vd., 1991; De Zeeuw, 1993; Balakrishnan ve Yousuf, 2017; Satofuka vd., 1993; Bonfiglioli vd., 2016) çözüm uyarlamalı bu Kartezyen tekniğin sürtünmeli (viscous) akışlar için kullanıldığına rastlanılmamıştır. Hâlbuki geometrik ve çözüm uyarlamalı Kartezyen ağ çözümü teknikleri, hem çözümün hızlanmasına yardımcı olmakta hem de artan vektör farklarının düşük seviyelerde tutulmasına yani çözümün hassasiyetinin artırılmasını sağlamaktadır.

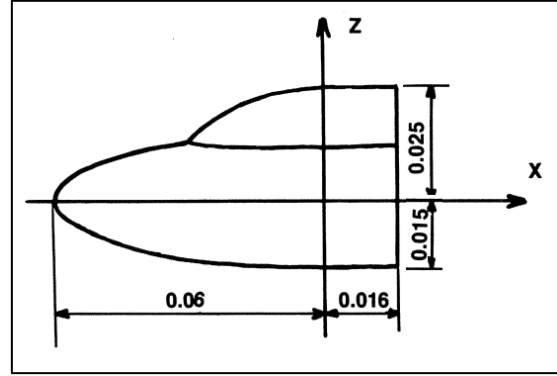
Problemin iki boyutlu geometrisi, Şekil 4’te gösterilmiştir. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanır (Désidéri vd., 1991):

$$x \leq 0.0 \quad \left(\frac{x}{0.06}\right)^2 + \left(\frac{z}{0.015}\right)^2 = 1 \quad (27)$$

$$x \leq 0.0 \text{ ve } z \geq 0.0 \quad \left(\frac{x}{0.035}\right)^2 + \left(\frac{z}{0.025}\right)^2 = 1 \quad (28)$$

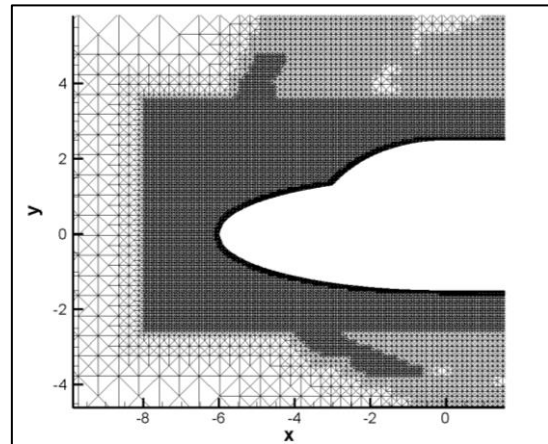
$$0.0 \leq x \leq 0.016 \quad \left(\frac{z}{0.015}\right)^2 = 1 \quad (29)$$

$$z \geq 0.0 \quad \left(\frac{z}{0.025}\right)^2 = 1 \quad (30)$$



Şekil 4. Denklem 27-28-29 ve 30 sonucunda oluşan iki boyutlu basit elips (elipsoit) geometrisi gösterimi (Désidéri vd., 1991)

Çift elipsin sınır şartlarında, Désidéri’nin çalışmasındaki koşullar temel alınmıştır. Gövde üzerinde havanın hızı, $U_{duvar} = 0.0$ sınır şartındadır. Dirichlet sınır şartları uzak alan Mach sayısına, M_∞ ’a göre ayarlanmıştır. Uzak alan sıcaklık değeri, $T_\infty = 56$ K olarak alınmıştır (Désidéri vd., 1991). Çözücüde kullanılan detaylı girdi parametreleri tablo 1’de verilmiştir.

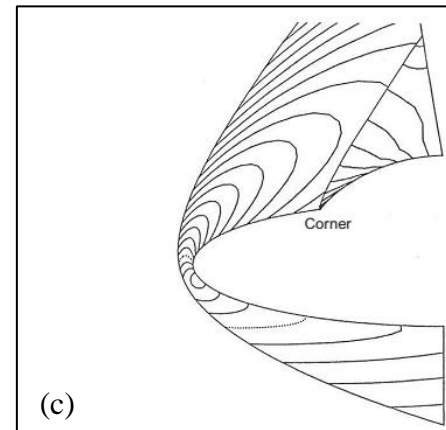
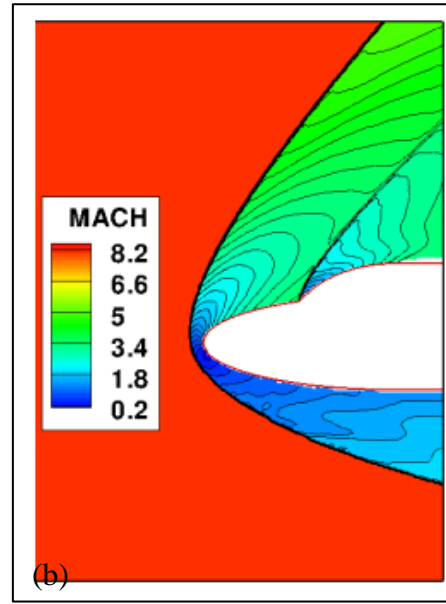
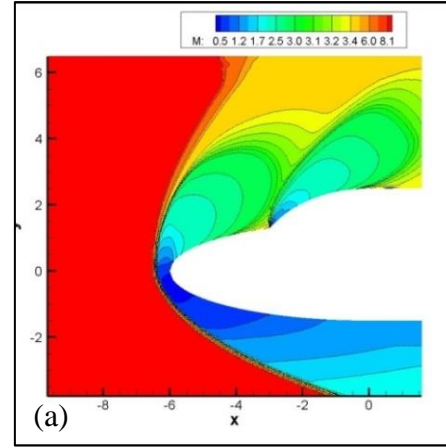


Şekil 5. Çift elips etrafındaki akışın (16.7 milyon Reynolds sayısı ile 8.15 Mach sayısı ve 30 derece hücum açısı) çözümünde kullanılan Kartezyen yöntemleriyle üretilmiş kutu geometri ve çözüm uyarlamalı ağ gösterimi

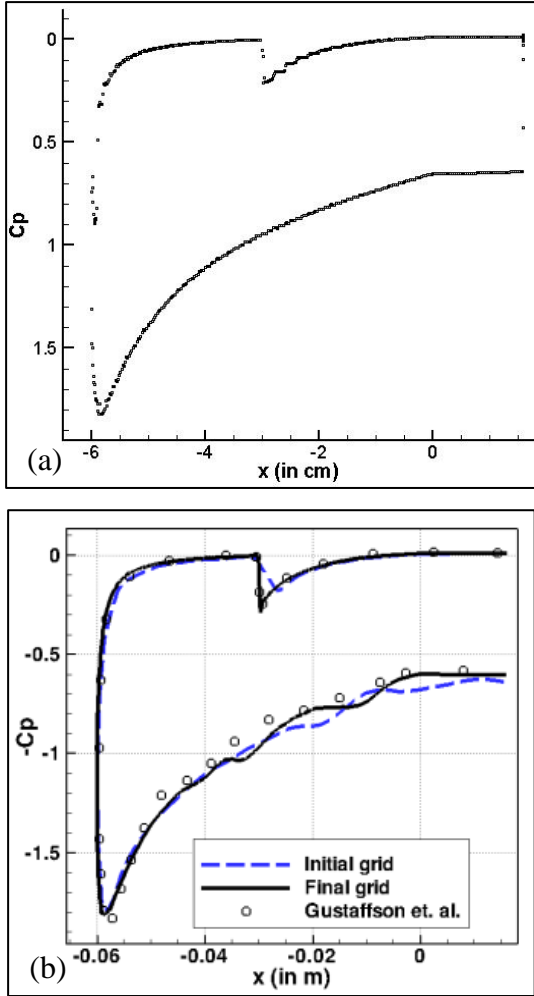
Tablo 1. Uygulamada kullanılan parametreler

Parametre türü	Tanım	Sayısal tanımı
Geometrik	Dış sınır boyutu katsayısı	18
Geometrik	Üniform ağ oluşturmak için ardışık bölme sayısı	4
Geometrik	Kutu adaptasyonu için xy düzleminde sınır katsayısı	x: 1.5; y:2.5
Sınır şartları	Mach sayısı	8.15
Sınır şartları	Hücum açısı	30
Sınır şartları	Reynolds sayısı	1670000
Sınır şartları	Prandtl sayısı (Laminar)	0.72
Sınır şartları	Prandtl sayısı (Türbülans)	0.90
Çözüm	Kademeli zaman adımlama sayısı	4
Çözüm	Seyrek-sık ağ döngü sayısı	3
Yakınsama	Artan (residual) yakınsama sınırı	10^{-8}
Yakınsama	Çok katmanlı ağ döngü sayısı	7

Bu doğrulama çalışması, Liou'nun yukarı iletimli ayrıştırma yöntemi (AUSM) kullanılarak çözülmüştür (Liou ve Steffen, 1993). Hesaplama ağının sık ağ dağılımı Şekil 5'te gösterilmiştir. Çok katmanlı ağ yöntemi ile akış çözücüsünün yakınsama oranı artırılmıştır. Sonuçlar yakın zamanlı çalışmalar ile karşılaştırılmış (Balakrishnan ve Yousuf, 2017; Satofuka vd., 1993; Bonfiglioli vd., 2016), yüzey etrafındaki hem yay burun şoku hem de keskin yüzey (canopy) şoku, referanslarla benzer şekilde, başarılı ve düzgünce akış çözücüsü tarafından yakalanmıştır (Şekil 6). Yapı çevresindeki Mach sayısı kontürleri başarılı şekilde benzetilmiş, referans çalışmalardaki gibi 0.2 ile 8.1 arasında değişmiştir. Yay burun şokunun olduğu gövdenin hemen önünde, Mach sayısının 8.1'den 0.2'ye dramatik bir şekilde düşüşü açıkça görülmektedir. Yüzey eğiminin değiştiği gövde kısmında ise kopma oluştuğu, ikincil bir şok; dolayısıyla ortalama Mach sayılarından (3.0-3.2) düşük Mach sayısına (0.2) düşüş olduğu gözlemlenmektedir.



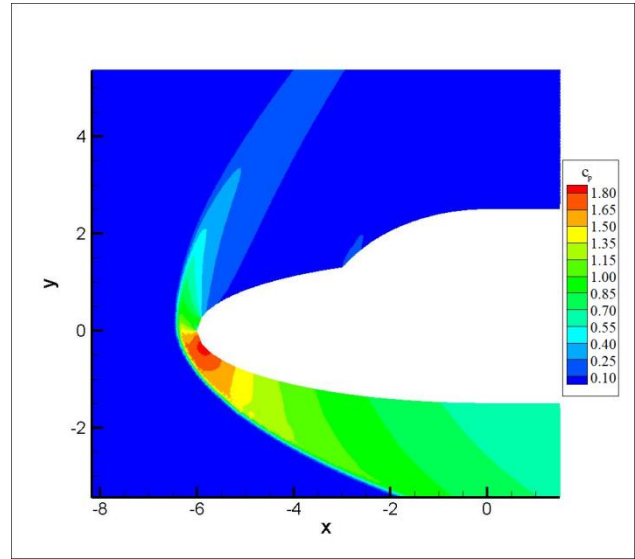
Şekil 6. Çift elips etrafındaki akışın (16.7 milyon Reynolds sayısı ile 8.15 Mach sayısı ve 30 derece hücum açısı) a) Kartezyen ağ çözümü sonucu ortaya çıkan, bu çalışmadaki; b) Balakrishnan ve Yousuf'un (2017) çalışmasındaki; c) Bonfiglioli vd.'nin (2016) çalışmasındaki Mach kontürleri



Şekil 7. Çift elips etrafındaki akışın a) bu çalışmadaki Kartezyen ağ yöntemleriyle çözülen, b) Gustaffson (1991) ve Balakrishnan ve Yousuf'un (2017) çalışmalarındaki basınç sabiti (c_p) dağılımı sonuçları

Çift elips yapısının etrafındaki basınç sabitleri dağılımı Şekil 7 (a)'da elde edilmiştir ve Şekil 7 (b)'deki referans çalışmalarla (Gustaffson vd., 1991; Balakrishnan ve Yousuf, 2017) karşılaştırılmıştır. Referans çalışmalarda olduğu gibi, güçlü yay burun şokunun olduğu gövdenin hemen önünde (-6 cm civarı), c_p 1.8 ile 0 arasında ani değişmekte; dolayısıyla şok oluşumunun sağlanması sayısal olarak da yapılabilmektedir. İkincil zayıf şok bölgesi olan -3 cm civarında da c_p , 0'dan 0.2'ye yükselip tekrar 0'a yavaş şekilde düşmektedir. Şok oluşmayan, gövdenin alt bölgesinde de c_p 'nin 1.8'den 0.7'ye yüzey boyunca kademeli olarak düştüğü gözlemlenmektedir. Sonuç olarak,

Mach sayılarının ani değişiklik gösterdiği noktalardaki şok oluşumları hem görsel olarak (Şekil 6) hem de sayısal olarak (Şekil 7) kanıtlanmış ve referans literatür çalışmalarıyla tutarlılık göstermiştir. Bu çalışmadaki c_p sonuçlarının (Şekil 7(a)) çift-elips yapısı çevresindeki dağılımı da kontür halinde Şekil 8'de gösterilmiştir. Kırmızı bölgede görüldüğü gibi c_p değeri geometrinin gövdesinin burun kısmının hemen altında maksimum olmaktadır. Ayrıca Şekil 6 (a)'daki yay şoku da gözlemlenebilmektedir.



Şekil 8. Çift elips etrafındaki akışın (16.7 milyon Reynolds sayısı ile 8.15 Mach sayısı ve 30 derece hücum açısı) Kartezyen ağ çözümü sonucu ortaya çıkan, bu çalışmadaki basınç sabiti (c_p) dağılımı kontürleri

Sonuçlar ve Tartışma

Geliştirilen Kartezyen temelli, çözüm uyarlamalı Navier-Stokes akış çözücüsü, akışların çözümü için çok katmanlı ağ yöntemleri de kullanılarak hızlı ve hassas bir şekilde çözülmüştür. Mevcut Kartezyen yöntemleri ve Spalart-Allmaras türbülans modeli ile çift elips etrafında oluşan akış benzetimi ev tipi bir bilgisayarda başarılmıştır. Çözülen çift elips doğrulama çalışması, birden çok referansla karşılaştırılmıştır. Hem Mach kontürleri hem de c_p değerleri büyük ölçüde tutarlılık göstermiştir.

Mach kontürlerinde hızlı değişimle de gözlenen iki şokun yakalanması çözüm uyarlamalı ağ

yöntemleri ile başarılmıştır. Bu şoklar, sırasıyla; biri hemen gövdenin önünde oluşan yay burun şoku, diğeri ise yüzeyde oluşan eğim değişimi nedeniyle oluşan gövde şokudur. Şekil 5’de gösterilen uyarlamalı ağ Şekil 6’da verilen referans sonuçları yakalamakta sadece yüzeyden uzak bölgelerde yetersiz kalmıştır. Bunun nedeni de şokların gövdeden uzak kısımlarında yeterli sıkılaştırma yapılmamış olmasıdır. Yeterli sıkılaştırma denenmiştir fakat bu sefer de şok çizgisini yakalamaktansa tüm çözüm bölgesinin sıkılaştırılması sonucuna varılmış ve çalışılan çözüm uyarlamasının bir etkisi görülmemiştir. Dolayısıyla, yüzeyden uzakta oluşan bu sorun sayısal olarak bir negatif etki yaratmadığı için göz ardı edilmiştir. Sonuçta, Mach sayılarının ani değişiklik gösterdiği noktalardaki şok oluşumları hem görsel olarak hem de sayısal olarak kanıtlanmış ve referans literatür çalışmalarıyla tutarlılık göstermiştir.

Gelecekte yapılması planlanan çalışmalar; (1) küt gövdelerin etrafındaki ısı akışının değişiminin bulunması için Kartezyen temelli akış çözücüsü geliştirilmesi, (2) şu anki çalışmanın üç boyutlu Kartezyen temelli akış çözücüsünde benzetimi (3) modifiye edilmiş bir denklemlerle RANS-SA türbülans modelleri ve/veya iki denklemlerle türbülans modellerinin akış çözücüsüne entegre edilmesidir.

Semboller

c_p :	basınç sabiti
C :	sabit basınç altında özgül ısı ($J/g-K$)
C_{suth} :	Sutherland sabiti
e :	özgül iç enerji (J/g)
E :	toplam enerji (J)
F :	konvektif akı vektörü
FF :	zorlama fonksiyon
G :	difüzyif akı vektörü
h :	ağ aralığı
H :	toplam entalpi (J)
I :	sıktan seyreğe daraltma operatörü
L :	doğrusal olmayan operatör
q :	difüzyif akı (W/m^2)
Q :	çözüm vektörü
Q :	korunan değişkenin vektörü
S :	türbülans kaynak terimi
Pr :	Prandtl sayısı
Res :	artan (kalıntı-residual) vektörü

t_c :	genişletme alt sınırı
t_r :	sıkılaştırma alt sınırı
T :	akışkan sıcaklığı (K)
u :	x -hız bileşeni (m/s)
v :	y -hız bileşeni (m/s)
γ :	özgül ısı oranı
λ :	yığın viskozite ($Pa.s$)
μ :	moleküler viskozite ($Pa.s$)
ρ :	yoğunluk (kg/m^3)
ζ :	kontrol hacminin karakteristik uzunluğu
σ :	standart sapma
\tilde{v} :	SA işleyen değişkeni
τ_{ij} :	viskoz gerilme elemanı (Pa)

Kaynaklar

- Balakrishnan, N. ve Yousuf, M., (2017). Residual based grid adaptation for meshless LSFDF-U solver, Proceedings, 23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 3104, 1–15, Denver.
- Berger, M. ve Aftosmis, M., (2012). Progress towards a Cartesian cut-cell method for viscous compressible flow, Proceedings, 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 1301, 1–24, Nashville, Tennessee.
- Blazek, J., (2015). Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, 466, Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Bonfiglioli, A., Paciorri, R., Nasuti, F., ve Onofri, M., (2016) Moretti's shock-fitting methods on structured and unstructured meshes, in Abgrall, R. ve Shu, C., eds, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, 403–439, Amsterdam.
- Bungartz, H. J., Mehl, M., Neckel, T., ve Weinzierl, T., (2010). The PDE framework Peano applied to fluid dynamics: an efficient implementation of a parallel multiscale fluid dynamics solver on octree-like adaptive Cartesian grids, Computational Mechanics, 46, 1, 103-114.
- Chung, M. H. (2013). An adaptive Cartesian cut-cell/level-set method to simulate incompressible two-phase flows with embedded moving solid boundaries. Computers & Fluids, 71, 469-486.
- Çakmak, M., (2009). Development of a multi-grid accelerated Euler solver on adaptively refined two and three-dimensional Cartesian grids, Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, Ankara.
- De Zeeuw, D. L., (1993). A quadtree-based adaptively-refined Cartesian-grid algorithm for solution of the Euler equations, Doktora Tezi, Michigan Üniversitesi, ABD.
- Désidéri, J. A., Glowinski, R. ve Périaux, J., (1991). Problem 6: Double (Simple) Ellipsoid, in

- Désidéri, J. A., Glowinski, R., Périaux, J., eds, Hypersonic Flows for Reentry Problems, Springer, 17–24, Berlin.
- Gustaffson, B., Part-Enander, E. ve Sjogreen, B., Solving flow equations for high Mach numbers on overlapping grids, in Désidéri, J. A., Glowinski, R., Périaux, J., eds, Hypersonic Flows for Reentry Problems, Springer, 585–589, Berlin.
- Hartmann, D., Meinke, M. ve Schröder, W. (2008). An adaptive multilevel multigrid formulation for Cartesian hierarchical grid methods. *Computers & Fluids*, 37, 9, 1103-1125.
- Jameson, A. (1985). Multigrid algorithms for compressible flow calculations, in Hackbusch W., Trottenberg, U., eds, *Multigrid Methods II*, Springer Press, 166–201, Berlin, Heidelberg.
- Kara, E., (2017). Determination of the wall function for Navier-Stokes solutions on Cartesian grids, *Proceedings, 2nd Workshop on Nonlinear PDEs in Applied Mathematics*, İzmir.
- Liou, M. S. ve Steffen Jr, C. J., (1993). A new flux splitting scheme, *Journal of Computational physics*, 107, 1, 23-39.
- Marshall, D. (2003). Fully automated Cartesian grid CFD application for MDO in high speed flows. *Teknik Rapor 1606R84*, NASA, California.
- Özgün, M. ve Eyi, S., (2014). Atmosferik geçiş yapan araç etrafında Navier-Stokes denklemleri ile üç boyutlu hipersonik akış analizi, *Havacılık ve Uzay Teknolojileri Dergisi*, 2, 7, 1–7.
- Satofuka, N., Morinishi, K. ve Oishi, T. (1993). Numerical solution of the kinetic model equations for hypersonic flows. *Computational Mechanics*, 11, 5-6, 452-464.

Analysis of high Reynolds number flow around a double ellipsoid configuration using solution adapted Navier-Stokes solver

Extended abstract

In this study, high Reynolds number and Mach number (hypersonic) flow around a double ellipse configuration with 30° angle-of-attack is analyzed by a Cartesian based flow solver. Pressure coefficients are obtained with Liou's AUSM methodology (Liou and Steffen, 1993). Accurate solutions around two-dimensional double ellipse configuration are generated for turbulent and compressible flow conditions. Flow solver is accelerated and converged with the use of multi-grid methods. Results are compared with recent studies from literature. Both bow shock around the nose of the configuration and sharp canopy shock on the body are captured well by the flow solver. Moreover, Mach number contours are successfully simulated as in these reference studies.

After spatial and temporal discretizations of the corresponding problem's solution domain, the most crucial pitfall encountered was convergence. Among the popular multi-grid solution methods (Jameson, 1985) "Full Approximation Storage (FAS)" multi-grid technique is selected for nonlinear viscous flow solution to accelerate the convergence.

Reynolds-averaged Navier-Stokes equations with the Spalart-Allmaras turbulence model closure; in short RANS-SA equations are employed for two-dimensional, compressible and viscous flows that are integrated in the solution domain. As Özgün and Eyi (2014) stated, Spalart-Allmaras (SA) turbulence model uses less CPU, meanwhile gives acceptable guesses for pressure coefficients on the solid body and the flow separation locations. SA model (Kara, 2017) uses a working variable, v , to solve eddy viscosity, μ . Thus, addition of these variables in the partial differentials of SA closes the RANS and forms the RANS-SA equations.

According to the criteria suggested in literature (Marshall, 2003) for maximum/minimum values of threshold parameters, solution adaptation is studied for the flow solution around double ellipse configuration and shock locations are captured correctly.

In this study, Cartesian grid based flow solver codes are developed using finite volume techniques. Code development and numerical simulations are studied on a personal computer (Intel® Core™ I5-3470 3.20-GHz processor, 12 GB RAM and Intel® Visual FORTRAN compiler). For the validation study, the double (simple) ellipse structure is selected with a 16.7 million Reynolds number around 8.15 Mach number and 30 degrees of attack flow. The main reason for choosing this study is to ensure that both the bow shock and the surface (canopy) shock can be caught simultaneously. The solution adaptive grid results are tested in the solution of the double ellipse structure. This structure has been defined as a challenge by Gustaffson et al. (1991) for all flow solvers using adaptive techniques. As recent studies surveyed (Gustaffson et al., 1991; Désidéri et al., 1991; De Zeeuw and Powell, 1993; Balakrishnan and Yousuf, 2017; Satofuka et al., 1993; Bonfiglioli et al., 2016) currently proposed, solution-adapted Cartesian technique was not used for viscous flow. However, the geometric and solution-adaptive Cartesian grid solution techniques not only help to accelerate the solution, but also ensure that the residuals are kept at low levels, that are, increasing the accuracy of the solution.

The solution of the two shocks (bow and canopy) observed with rapid change in Mach contours has been achieved by adaptive grid methods. These shocks are; one of them is a bow nose shock that occurs upstream of the body, and the other is a canopy shock caused by a sharp change in slope on the surface. The adaptive grid shown in Figure 5 was not sufficient to capture the reference results away from the body (farfield) as given in Figure 6. The reason for this is that the shocks are not sufficiently refined in farfield from the body. Sufficient refinement was tried but this time it was concluded that the whole solution area was refined rather than capturing the shock line and no positive effect of the solution adaptation was observed. Therefore, this problem, which occurs away from the surface, has been neglected because it does not have a negative effect. As a result, the shock formations at the points of sudden changes of the Mach numbers are both visually and numerically proven and consistent with the reference literature studies.

Keywords: Cartesian grid, double ellipse configuration, solution adaptation, multi-grid method, High Reynolds number flow.