Fibonacci Sayılarıyla Genelleştirilmiş Alt Kümeler İçin Farklı Bir Sayma Yöntemi

A Different Counting Method for Subsets Generalized via Fibonacci Numbers

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

**İlke ATİKLİK**[1] **Ahmet Cem ÇALIK**[1] **Esra İNAN**[1*]

[1]Samsun R. K. Bilim ve Sanat Merkezi, Samsun / Türkiye
[1]Samsun R. K. Science and Art Center, Samsun / Turkey

[*]ilke_6001@hotmail.com
**ORCID:** 0000-0001-6346-7343

ahmetcemcalik420@gmail.com
**ORCID:** 0000-0002-1858-1195

esra.unsal55@gmail.com
**ORCID:** 0000-0003-3058-0619

## MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

**Geliş Tarihi / Date Received**
11.07.2020

**Kabul Tarihi / Date Accepted**
17.12.2020

**Yayın Tarihi / Date Published**
Aralık / December 2020

**Yayın Sezonu / Pub Date Season**
Aralık - Haziran / December - June

## ATIF / CITE as

Atiklik, İ., Çalık, A. C., İnan, E. (2020). "Fibonacci Sayılarıyla Genelleştirilmiş Alt Kümeler İçin Farklı Bir Sayma Yöntemi" / "A Different Counting Method for Subsets Generalized via Fibonacci Numbers". bilar: Bilim Armonisi Dergisi, 3 (2): 33-44. doi: 10.37215/bilar.768277

https://dergipark.org.tr/tr/pub/bilar

# Fibonacci Sayılarıyla Genelleştirilmiş Alt Kümeler İçin Farklı Bir Sayma Yöntemi

## A Different Counting Method for Subsets Generalized via Fibonacci Numbers


## ÖZET

Bu çalışmada matematik olimpiyatı sorularından "sıralı ardışık nesnelerin herhangi ikisinin art arda olmaması veya aralarındaki farkın $r$ olmaması" olan ve sorunun çözümünde alt kümelere ait elemanlara "0" ve "1" ile kod verilerek farklı bir sayma yöntemi ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra bu sayma yöntemiyle sıralı elemanların soru şartlarını sağlayan kümelere ayrılırken alt küme sayısının bulunmasında eşitliğin Fibonacci sayıları cinsinden yazılarak sonuca ulaşılması amaçlanmıştır. Ayrıca çalışmada kaynak taramasında yer alan çözüm yöntemleri de incelenerek kod yöntemi ile sorular çözülmüş ve çözümlerin karşılaştırması yapılmıştır. Kullanılan yöntem teorik olarak doğrudan ispat yöntemi ile genelleştirilerek sıralı ardışık nesnelerin belirli şartlar altında kümelere ayrılmasında kullanılmak için Fibonacci sayılarından oluşan eşitlik elde edilmiştir. Bu tür problemler için ifade edilen yöntemle genelleme yapılarak örnek bir problemin çözümü üzerinde kurallara uygun ve tüm ihtimallerin dikkate alındığı bir algoritma tasarlanmış, tasarlanan algoritma sıralı mantıksal adımlarla ve akış şeması ile ifade edilmiştir. Ayrıca genellemenin Python'da kodlama diliyle ifade edilerek hesaplanması sağlanmıştır.


**Anahtar Sözcükler:** Fibonacci sayıları, 'Kod Yöntemi' ile sayma, Modüler aritmetik, Algoritma.


## ABSTRACT

This study strives to express a different counting method by coding entities of subsets with "0" and "1" for questions such as " when sequential consecutive objects are neither repeated nor the difference between them is $r$ " from math olympics. Moreover, it has been aimed to produce these results while deriving the equations in Fibonacci number types when dividing consecutive entities into subsets which meets the required conditions. Also, questions have been solved by the code method while studying the solution methods in the references. The method used was generalized theoretically by direct proof, the equation consisting of Fibonacci numbers was achieved to be used while dividing consecutive objects into sets in certain conditions. An algorithm that fits the rule was designed with the consideration for most question types by solving an example of the question type while generalizing the previous methods for the given question type. The designed algorithm has been expressed via sequential, logical steps and flowcharts. Thus, the current article aims to express the generalization in the Python programming language, as well as to calculate the results.


**Keywords:** Fibonacci numbers, Counting with 'Code Method', Modular arithmetic, Algorithm.

*Bu çalışma 51. Tübitak Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Samsun Bölge Finali'nde sergilenmiştir.

## 1. GİRİŞ

Sayılar teorisinde; önemli araştırma konularında birisi de sayıları karakterize edip, sayıların birbirleriyle olan ilişkilerini, bağıntılarını incelemektir. Sayılar teorisinde birçok problem aslında sonlu sayıda elemanlı bir kümenin belirli şartlara sahip alt kümelerinin sayısına dönüştürülebilir. Problemin sonucu ise farklı yaklaşımlar ile düşünülebilir. Örneğin indirme, kodlama, üretici fonksiyon gibi (Öztürk 1995). '0 ve 1'lerden oluşan ve içinde peş peşe iki tane 0 olmayan n uzunluğunda kaç dizi vardır?' probleminin çözüm aşamalarında Fibonacci sayılarına ulaşıldığı elde edildi (Bayar 2003).

Alan yazında yer alan ve çalışmada kullanılan tanımlar aşağıda verilmiştir.

**Kombinasyon:** $r,n \in N$ ve $r \leq n$ olmak üzere, $n$ elemanlı bir $A$ kümesinin $r$ elemanlı alt kümelerinin her birine $A$ kümesinin $r$'li kombinasyonu denir. $A$ kümesinin $r$'li kombinasyonlarının sayısı şeklidedir.

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(Bulut 2017).

**Fibonacci Sayı Dizisi:** Fibonacci dizisinde $fib(n)$ fonksiyonu ile $n.$ elemanın değeri bulunmak istendiğinde dizideki kendinden bir önceki ve iki önceki elemanlar toplanır. Dizideki ilk ve ikinci eleman 1 değerlikli olmak koşuluyla tüm elemanlar bu kurala göre hesaplanabilir. Ayrıca $n.$ eleman $F_n$ şeklinde ifade edildiğinde, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak kaydıyla $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde de matematiksel olarak öz yinelemeli bir şekilde gösterilebilir. Bu dizinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir: 1,1,2,3,5, 8…

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ 1 & ,n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & ,n > 1 \end{cases}$$

(Bulut 2017).

**Fibonacci Sayı Dizisi Terimlerinin Kombinasyon İle İlişkisi:** Tek ve çift indis numaralı Fibonacci sayıları için kombinasyonlu gösterimi bir parçalı fonksiyon ile şu şekilde ifade edilebilir:

$$fib(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1}, & \frac{n}{2} \in \mathbf{Z} \\ \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1}, & \frac{n}{2} \notin \mathbf{Z} \end{cases}$$

(Bulut 2017).

Konu üzerinde yapılan kaynak taraması sonucunda 'sıralı ardışık nesnelerin herhangi ikisinin art arda olmaması veya aralarındaki farkın $r$ olmaması' soruları için bir genelleme olmadığı, sadece örnekler üzerinden verilen çözüm yöntemlerinde kullanılan dilin sade ve anlaşılır olmadığı, tek kaynakta tüm yöntemlerin verilmediği verilerine ulaşıldı. Nesin (2003) in "0-1 dizileri ve Fibonacci sayıları" adlı çalışmasında verilen sayma yöntemi ile Fibonacci sayı dizisi ilişkisi verildi. Bu çalışmada ise alt küme yazımında ardışık sayıların sırasını ifade eden 'kod yöntemi' Fibonacci sayılarıyla ilişkilendirilerek ilgili problemler çözüldü ve bu yöntem ile durumun genelleştirmesi yapıldı. Ayrıca bir probleme dair elde edilen alternatif çözüm yolunun 21. yy. becerilerinden algoritma basamaklarını kullanarak verilmesinin uygun olduğu kanısına varıldı. Bu çalışmada matematik olimpiyatı sorularından "sıralı ardışık nesnelerin herhangi ikisinin art arda olmaması veya aralarındaki farkın $r$ olmaması" şeklindeki soruların teorik matematik ile desteklenen kod yöntemiyle çözülmesi ve algoritma aracılığıyla bilgisayar programında (Python 3.8) yazılarak Fibonacci sayılarıyla ilişkili bir genellemesinin yapılması amaçlandı.

## 2. MATERYAL VE METOT

### 2.1. Problem 1.(UİMO 2012)

$A = \{1,2,3,4,5,6,\ldots,16,17\}$ kümesinin, herhangi iki elemanının farkı 4 olmayan kaç alt kümesi vardır?

2012 yılında yayınlanan UİMO sorusu (Problem 1) çözülürken soruda yer alan alt kümeler '0-1' dizilerinin uzunluğu gibi düşünülüp (Nesin, 2003) "0" ve "1" ile kodlanarak sıralı ardışık nesneler için genelleştirilebileceği fark edildi. Bu soru 'kod yöntemi' ile çözülerek sonucun Fibonacci sayıları ile ilişkisi Problem 1 ve Problem 2'nin çözümünde gösterildi.

**KOD YÖNTEMİ**

$\{2,4,6\}$ kümesinin 2 elemanlı ve herhangi iki elemanının farkı 2 olmayan bir alt kümesi 'kod yöntemi' ile gösterilsin. Seçilen elemanlar '1' ile seçilmeyen elemanlar '0' ile gösterilmek üzere: oluşturulmak istenen alt küme 2 elemanlı olduğundan 2 tane '1', 1 tane '0' için

_0_

2 boşluk ve 2 tane '1' olduğundan

$\binom{2}{2} = 1$ tane istenen alt küme bulunur ve kod ile

'**101**' kodu $\longrightarrow$ **{2,6}** şeklinde gösterilir.

## 3. BULGULAR

"Sıralı ardışık nesnelerin herhangi ikisinin art arda olmaması veya aralarındaki farkın r olmaması" tipindeki soruların genellemesi ismini araştırmacılar tarafından alan teorem ile verilecektir. Bu bölüm çalışmanın özgün bölümlerinden biridir.

**Teorem ('Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' Teoremi):** $n$ tane sıralı ardışık nesne $\{1,2,3,4,\ldots,n\}$ şeklinde gösterilsin. Verilen $n$ tane nesneden seçilen herhangi iki nesnenin farkı $r$ olmayan grup sayısı $n \equiv m(mod\ r)$ olmak üzere

$$\left(F_{\frac{n-m}{r}+2}\right)^{r-m} . \left(F_{\frac{n-m}{r}+3}\right)^{m}$$

eşitliği ile bulunur.

**İspat:** Teoremin ifadesinde yer alan n tane sıralı ardışık nesne $A = \{1,2,3,4,\ldots,n\}$ kümesi ile gösterilsin. Teorem ifadesi ise "$A = \{1,2,3,4,\ldots,n\}$kümesinin herhangi iki elemanın farkı $r$ olmayan kaç alt kümesi vardır?" sorusuna dönüştürülebilir. Yani bu sorunun çözümü yapıldığında teorem doğrudan ispat yöntemiyle ispatlanmış olacaktır. $n \equiv m\ (mod\ r)$ olmak üzere $r$ farklı durum bulunur. Her bir durum için kod yöntemi kullanılarak Problem 1'in çözümüne benzer şekilde $A$ kümesi $r$ tane ayrık alt kümeye ayrılsın. Kod yöntemi ile sadece 2. durum için çözüm yapılmıştır. Benzer şekilde tüm durumlar için her birinde bulunması gereken ifade Çizelge 1'de gösterilmiştir.

**1. durum:** $n = rk$ olsun.

**2. durum:** $n = rk + 1$ olsun. $A$ kümesi $r$ ile bölümünden kalan sayılara göre alt kümelere ayrılsın.

$A_1 = \{r,2r,3r,\ldots,,n = rk\}$ kümesinin eleman sayısı $\frac{n-1-r}{r}+1=\frac{n-1}{r}=k,$

$A_2 = \{1,r + 1,2r + 1,\ldots,n = rk + 1\}$ kümesinin eleman sayısı $\frac{n-1}{r}+1=k+1,$

$A_3 = \{2,r + 2,2r + 2,\ldots,n = (k - 1)r + 2\}$ kümesinin eleman sayısı $\frac{n-1}{r}=k,$

$A_4 = \{3,r + 3,2r + 3,\ldots,n = (k - 1)r + 3\}$ kümesinin eleman sayısı $\frac{n-1}{r}=k,$

...

$A_r = \{3,r + 3,2r + 3,\ldots,n = (k - 1)r + 3\}$ kümesinin eleman sayısı $\frac{n-1}{r}=k$ şeklindedir.

Tüm bu alt kümeler için kod yöntemiyle istenilen şarta uygun alt küme sayısı bulunabilir.

$A_1$ kümesinin 0 elemanlı alt küme sayısı

$$\binom{\frac{n-1}{r}+1}{0}$$

tanedir.

$A_1$ kümesinin 1 elemanlı alt küme sayısı $\left(\frac{n-1}{r}-1\right)$ tane '0', 1 tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{n-1}{r}}{1}$$

şeklindedir.

$A_1$ kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı $\left(\frac{n-1}{r}-2\right)$ tane '0', 2 tane '1 olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{n-1}{r}-1}{2}$$

şeklindedir.

$A_1$ kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı $\left(\frac{n-1}{r}-3\right)$ tane '0', 3 tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{n-1}{r}-2}{3}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse;

$k$, çift iken

$A_1$ kümesinin $\frac{\frac{n-1}{r}}{2}$ elemanlı alt küme sayısı $\frac{\frac{n-1}{r}}{2}$ tane '0', $\frac{\frac{n-1}{r}}{2}$ tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{\frac{n-1}{r}}{2}+1}{\frac{\frac{n-1}{r}}{2}}$$

şeklindedir.

O halde $A_1$ kümesinin herhangi iki elemanın farkı $r$ olmayan toplam alt küme sayısı

$$\binom{\frac{n-1}{r}+1}{0}+\binom{\frac{n-1}{r}}{1}+\binom{\frac{n-1}{r}-1}{2}+\binom{\frac{n-1}{r}-2}{3}+\ldots+\binom{\frac{\frac{n-1}{r}}{2}+1}{\frac{\frac{n-1}{r}}{2}}=F_{\frac{n-1}{r}+2}$$

olur.

$k$, tek iken

$A_1$ kümesinin $\frac{\frac{n-1}{r}}{2}+1$ elemanlı alt küme sayısı $\frac{n-1}{r}-\frac{\frac{n-1}{r}}{2}=\frac{\frac{n-1}{r}-1}{2}$ tane '0', $\frac{\frac{n-1}{r}}{2}+1$ tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{\frac{n-1}{r}-1}{2}}{\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}}$$

şeklindedir.

O halde $A_1$ kümesinin herhangi iki elemanın farkı $r$ olmayan toplam alt küme sayısı

$$\binom{\frac{n-1}{r}+1}{0}+\binom{\frac{n-1}{r}}{1}+\binom{\frac{n-1}{r}-1}{2}+\binom{\frac{n-1}{r}-2}{3}+\ldots+\binom{\frac{\frac{n-1}{r}-1}{2}}{\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}}=F_{\frac{n-1}{r}+2}$$

olur.

$A_1$ kümesinin eleman sayısı ile $A_3, A_4, \ldots, A_r$ kümelerinin eleman sayıları aynı olduğundan yukarıda yapılan işlemleri tekrar yapmaya gerek yoktur. $A_2$ kümesinin eleman sayısı farklı olduğundan benzer işlemler yapılabilir.

$A_2$ kümesinin 0 elemanlı alt küme sayısı

$$\binom{\frac{n-1}{r}+2}{0}$$

tanedir.

$A_2$ kümesinin 1 elemanlı alt küme sayısı $\binom{n-1}{r}$ tane '0', 1 tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{n-1}{r}+1}{1}$$

şeklindedir.

$A_2$ kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı $\left(\frac{n-1}{r}-1\right)$ tane '0', 2 tane '1 olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{n-1}{r}}{2}$$

şeklindedir.

$A_2$ kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı $\left(\frac{n-1}{r}-2\right)$ tane '0', 3 tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{n-1}{r}-1}{3}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse;

$k$, çift iken

$A_2$ kümesinin $\frac{\frac{n-1}{r}+2}{2}$ elemanlı alt küme sayısı $\frac{\frac{n-1}{r}}{2}$ tane '0', $\frac{\frac{n-1}{r}+2}{2}$ tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{\frac{n-1}{r}+2}{2}}{\frac{\frac{n-1}{r}+2}{2}}$$

şeklindedir.

O halde $A_2$ kümesinin herhangi iki elemanın farkı $r$ olmayan toplam alt küme sayısı

$$\binom{\frac{n-1}{r}+2}{0}+\binom{\frac{n-1}{r}+1}{1}+\binom{\frac{n-1}{r}}{2}+\binom{\frac{n-1}{r}-1}{3}+\ldots+\binom{\frac{\frac{n-1}{r}+2}{2}}{\frac{\frac{n-1}{r}+2}{2}}=F_{\frac{n-1}{r}+3}$$

olur.

$k$, tek iken

$A_2$ kümesinin $\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}$ elemanlı alt küme sayısı $\left(\frac{n-1}{r}+1\right)-\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}=\frac{\frac{n-1}{r}}{2}$ tane '0', $\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}$ tane '1' olmak üzere kod yöntemi ile

$$\binom{\frac{\frac{n-1}{r}}{2}+1}{\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}}$$

olarak bulunur.

O halde $A_2$ kümesinin herhangi iki elemanın farkı $r$ olmayan toplam alt küme sayısı

$$\binom{\frac{n-1}{r}+2}{0}+\binom{\frac{n-1}{r}+1}{1}+\binom{\frac{n-1}{r}}{2}+\binom{\frac{n-1}{r}-1}{3}+\ldots+\binom{\frac{\frac{n-1}{r}}{2}+1}{\frac{\frac{n-1}{r}+1}{2}}=F_{\frac{n-1}{r}+3}$$

olur.

Sonuç olarak $A=\{1,2,3,4,\ldots,n\}$ kümesinin herhangi iki elemanın farkı $r$ olmayan alt küme sayısı, $k$

sayısının çift veya tek olması Fibonacci sayılarının kombinasyonlu gösteriminde farklılık göstermesine rağmen her $k$ pozitif tamsayısı için

$$F_{\frac{n-1}{r}+2}.F_{\frac{n-1}{r}+3}.F_{\frac{n-1}{r}+2}.F_{\frac{n-1}{r}+2}.F_{\frac{n-1}{r}+2}.F_{\frac{n-1}{r}+2}.\mathrm{K}\,.F_{\frac{n-1}{r}+2}=\left(F_{\frac{n-1}{r}+2}\right)^{r-1}.F_{\frac{n-1}{r}+3}$$

olur.

**3. durum:** $n = rk + 2$ olsun. Bu şekilde devam edilirse son durum,

***r*. durum:** $n = rk + (r - 1)$ şeklindedir.

Tüm durumlar için 'kod yöntemi' ikinci durumda yapıldığı gibi hesaplanırsa her birinde bulunması gereken ifade Çizelge 1'de gösterilmiştir.

**Çizelge 1.** Sıralı Nesnelerin Herhangi İkisinin Art Arda Olmaması veya Aralarındaki Farkın $r$ Olmaması

| $n$ sayısının durumları | $k$ elemanlı alt küme sayısı | $k$+1 elemanlı alt küme sayısı | Sonuç |
|---|---|---|---|
| **1.** $\boldsymbol{n \equiv 0\,(mod\ r)}$ | $r$ | $0$ | $\left(F_{\frac{n}{r}+2}\right)^{r}.\left(F_{\frac{n}{r}+3}\right)^{0}$ |
| **2.** $\boldsymbol{n \equiv 1\,(mod\ r)}$ | $r-1$ | $1$ | $\left(F_{\frac{n-1}{r}+2}\right)^{r-1}.\left(F_{\frac{n-1}{r}+3}\right)^{1}$ |
| **3.** $\boldsymbol{n \equiv 2\,(mod\ r)}$ | $r-2$ | $2$ | $\left(F_{\frac{n-2}{r}+2}\right)^{r-2}.\left(F_{\frac{n-2}{r}+3}\right)^{2}$ |
| **4.** $\boldsymbol{n \equiv 3\,(mod\ r)}$ | $r-3$ | $3$ | $\left(F_{\frac{n-3}{r}+2}\right)^{r-3}.\left(F_{\frac{n-3}{r}+3}\right)^{3}$ |
| ... | ... | ... | ... |
| **r.** $\boldsymbol{n \equiv m\,(mod\ r)}$ | $r-m$ | $m$ | $\left(F_{\frac{n-m}{r}+2}\right)^{r-m}.\left(F_{\frac{n-m}{r}+3}\right)^{m}$ |

## 3.1. 'Kod Yöntemi'nin Problemler Üzerinde Açıklanması ve 'Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' Teoreminin uygulanması

### 3.1.1. Problem 1. (UİMO 2012)

$A = \{1,2,3,4,5,6,\ldots,16,17\}$ kümesinin, herhangi iki elemanının farkı 4 olmayan kaç alt kümesi vardır?

**Çözüm 1 (kod yöntemi ile çözümü):**

$A$ kümesinin elemanları 4 ile bölünerek kalanları 0, 1, 2 ve 3 olacak şekilde 4 farklı ayrık alt kümeye parçalansın.

$A_1 = \{4,8,12,16\} = \{n \in N^+ : n \equiv 0\,(mod\ 4)\}$

$A_2 = \{1,5,9,13,17\} = \{n \in N^+ : n \equiv 1\,(mod\ 4)\}$

$A_3 = \{2,6,10,14\} = \{n \in N^+ : n \equiv 2\,(mod\ 4)\}$

$A_4 = \{3,7,11,15\} = \{n \in N^+ : n \equiv 3\,(mod\ 4)\}$

Oluşan bütün kümelerin artış miktarı sorudaki sayı ile aynı olduğundan kod yöntemi kullanabilir.

$A_1$ kümesi ile başlansın.

Kümenin 0 elemanlı alt kümesi boş küme olduğundan 0 elemanlı alt küme sayısı 1'dir.

Kümenin 1 elemanlı alt küme sayısını bulmak için seçilen elemanlar '1' ile, seçilmeyen elemanlar '0' ile gösterilsin. Seçilen sayılar yani '1'ler '0'ların ayırdığı aralıklardan seçilmelidir.

_0_0_0_

Kümede seçilen '1' sayısı 1 tane, '0' sayısı 3 tane olduğu için 3 tane '0' konularak aralıklar çizilsin.

Seçilen bir sayı dört aralığın birinden seçilecektir. Örneğin; 0 1 0 0 gibi. Bu ifade $A_1$ kümesinde {8} alt kümesine karşılık gelmektedir. Bu işlem, kombinasyon kullanılarak 4 seçenekten 1 tane seçileceği için $\binom{4}{1}$ olur.

Kümenin 2 elemanlı alt küme sayısını bulmak için seçilen '1' sayısı 2 tane, '0' sayısı 2 tanedir.

_0_0_

Bu işlem, kombinasyon kullanılarak 3 seçenekten 2 tanesi seçileceği için $\binom{3}{2}$ şeklinde olur.

Buna göre $A_1$ kümesinin verilen koşula uygun alt küme sayısı, Fibonacci sayı dizisi terimlerinin kombinasyon ile ilişkisi kullanılarak

$$\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}=8=F_6$$

şeklinde bulunur.

$A_2$ kümesi için de aynı yöntem uygulansın.

Kümenin 0 elemanlı alt kümesi boş küme olduğundan 0 elemanlı alt küme sayısı 1'dir.

Kümenin 1 elemanlı alt küme sayısını bulmak için seçilen '1'sayısı 1 tane, '0' sayısı 4 tanedir.

_0_0_0_0_

5 boşluktan bir tanesi '1' olacağından kümenin 1 elemanlı alt küme sayısı $\binom{5}{1}$ olur.

Kümenin 2 elemanlı alt küme sayısını bulmak için seçilen '1' sayısı 2 tane, '0' sayısı 3 tanedir.

_0_0_0_

4 boşluktan iki tanesi '1' olacağından kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı $\binom{4}{2}$ olur.

Kümenin 3 elemanlı alt küme sayısını bulmak için seçilen '1' sayısı 3 tane, '0' sayısı 2 tanedir.

_0_0_

3 boşluktan üç tanesi '1' olacağından kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı $\binom{3}{3}$ olur. Buna göre $A_2$ kümesinin verilen koşula uygun alt küme sayısı

$$\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3}=13=F_7$$

olur.

$A_3$ ve $A_4$ kümelerinin eleman sayısı $A_1$ ile aynı olduğundan sonuç bu kümeler için de aynıdır. Buna göre $A$ kümesinin herhangi iki elemanının farkı 4 olmayan alt küme sayısı

$$\binom{8}{1}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}=\left(F_6\right)^3.F_7=6656$$

tanedir.

**Çözüm 2 (alanyazında yer alan çözüm):**

$A = \{1,2,3,4,5,6,...,16,17\}$ kümesinin, $4$ ile bölümünden kalanları $0,1,2,3$ olan $4$ farklı kümeye ayrılsın. Bunlar;

$X = \{1,5,9,13,17\}$, $Y = \{2,6,10,14\}$, $Z = \{3,7,11,15$, $T = \{4,8,12,16\}$ olmak üzere $4$ tanedir. Bu 4 kümeye de kendi içindeki elemanlar ile herhangi iki elemanının farkı $4$ olmayan alt kümeler eklenmelidir. Oluşan kümeler $X', Y', Z'$ ve $T'$ ile gösterilsin.

$X' = \{1,5,9,13,17,\{1,9\},\{1,13\},\{1,17\},\{5,13\},\{5,17\},\{9,17\},\{1,9,17\}\}$, $s(X') = 12$

$Y' = \{2,6,10,14,\{2,10\},\{2,14\},\{6,14\}\}$, $s(Y') = 7$

$Z' = \{3,7,11,15,\{3,11\},\{3,15\},\{7,15\}\}$, $s(Z') = 7$

$T' = \{4,8,12,16,\{4,12\},\{4,16\},\{8,16\}\}$, $s(T') = 7$

şeklinde olur. $A$ kümesinde istenen durumlar için oluşturulabilecek ve herhangi iki elemanının farkı $4$ olmayan alt kümeler;

- 0 elemalı kümelerden $s(\varnothing') = 1$ tane
- 1 elemanlı kümelerden $s(X') + s(Y') + s(Z') + s(T') = 12 + 7 + 7 + 7 = 33$ tane
- 2 elemanlı kümelerden $s(X',Y') + s(X',Z') + s(X',T') + s(Y',Z') + s(Y',T') + s(Z',T')$

$$= \binom{12}{1}.\binom{7}{1} + \binom{12}{1}.\binom{7}{1} + \binom{12}{1}.\binom{7}{1} + \binom{7}{1}.\binom{7}{1} + \binom{7}{1}.\binom{7}{1} + \binom{7}{1}.\binom{7}{1} = 339 \text{ tane}$$

- 3 elemanlı kümelerden $s(X',Y',Z') + s(X',Y',T') + s(X',Z',T') + s(Y',Z',T')$

$$= \binom{12}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1} + \binom{12}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1} + \binom{12}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1} + \binom{7}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1} = 2107 \text{ tane}$$

- 4 elemanlı kümelerden

$$s(X',Y',Z',T') = \binom{12}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1} = 4116 \text{ tane bulunur.}$$

Dolayısıyla istenen durum için toplam alt küme sayısı $1 + 33 + 399 + 2107 + 4116 = 6656$ tane olur.

**Çözüm 3 ('Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' teoremi ile çözümü):**

Problem metni incelendiğinde teoremdeki değişkenlerin $n = 17$, $r = 4$, $17 \equiv 1\ (mod\,4)$; $m = 1$ şeklinde olduğu görülür. O halde teorem kullanılırsa,

$$\left(F_{\frac{17-1}{4}+2}\right)^{4-1}.\left(F_{\frac{17-1}{4}+3}\right)^{1} = \left(F_6\right)^3.F_7$$

olur ve Fibonacci sayı dizisi terimlerinin kombinasyon ile ilişkisi göz önüne alınarak $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ sayıları yerine yazılırsa problemin cevabı

$$\left(F_6\right)^3.F_7 = \left(8\right)^3.13 = 6656$$

olarak bulunur.

### 3.1.2. Problem 2.

$A = \{1,2,3,4,5,6,...,16,17\}$ kümesinin, herhangi iki elemanının farkı $3$ olmayan kaç alt kümesi vardır?

**Çözüm 1 (kod yöntemi ile çözümü):**

$A$ kümesinin elemanları arasındaki artış sayısı soruda verilen fark ile aynı olmadığı için kod yöntemi kullanılamaz. $A$ kümesinin elemanları 3 ile bölünerek kalanları $0$, $1$, $2$ ve $3$ olacak şekilde 3 farklı ayrık alt kümeye parçalansın.

$A_1 = \{3,6,9,12,15\} = \{n \in N^+ : n \equiv 0\ (mod\ 3)\}$

$A_2 = \{1,4,7,10,13,16\} = \{n \in N^{+}: n \equiv 1\ (mod\ 3)\}$

$A_3 = \{2,5,8,11,14,17\} = \{n \in N^{+}: n \equiv 2\ (mod\ 3)\}$

Oluşan bütün kümelerin artış miktarı sorudaki sayı ile aynı olduğundan kod yönteminde Problem 1'in çözümündeki sonuçlar kullanılarak kombinasyon biçiminde yazılabilir. $A_1$ kümesi ile başlansın.

Problem 1'de ayrıntılı bir şekilde uygulanan kod yöntemi ile kombinasyon yazılırsa $A_1$ kümesinin alt küme sayısı

$$\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3}=13=F_7$$

olur.

$A_2$ kümesi için de aynı yöntem uygulansın. Kombinasyon şeklinde yazılırsa $A_2$ kümesinin alt küme sayısı

$$\binom{7}{0}+\binom{6}{1}+\binom{5}{2}+\binom{4}{3}=21=F_8$$

olur.

$A_3$ kümesinin eleman sayısı $A_2$ kümesi ile aynı olduğundan sonuç bu küme için de aynıdır. Sonuç olarak $A$ kümesinin herhangi iki elemanının farkı 3 olmayan alt küme sayısı

$$\binom{13}{1}.\binom{21}{1}.\binom{21}{1}=F_7.\left(F_8\right)^2=5733$$

tanedir.

**Çözüm 3 ('Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' teoremi ile çözümü):**

Problem metni incelendiğinde teoremdeki değişkenler $n=17,\ r=3,\ 17\equiv 2\ (mod\,3);\ m=1$ değerlerini alır. Elde edilen değerler teoremde kullanılırsa

$$\left(F_{\frac{17-2}{3}+2}\right)^{3-2}.\left(F_{\frac{17-2}{3}+3}\right)^{2}=F_7.\left(F_8\right)^2=5733$$

olarak bulunur.

## 3.1. 'Kod Yöntemi' ile Genelleştirilen 'Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' Teoreminin Algoritma, Akış Şeması ve 'Python' Program Dili ile İfade Edilmesi

Çalışmada elde edilen teorem, bilgisayar dilinde algoritma ve akış şeması kullanılarak ifade edilmiş olup çalışmanın uygulama sahası genişletilmiş ve çalışma daha özgün hale gelmiştir.

### 3.2.1. Algoritma

Çalışmada elde edilen teoremin algoritması sıralı adımlar kullanılarak Ana ve Teorem Algoritması olmak üzere iki bölüm biçiminde Çizelge 2 ve Çizelge 3'deki gibi tasarlandı.

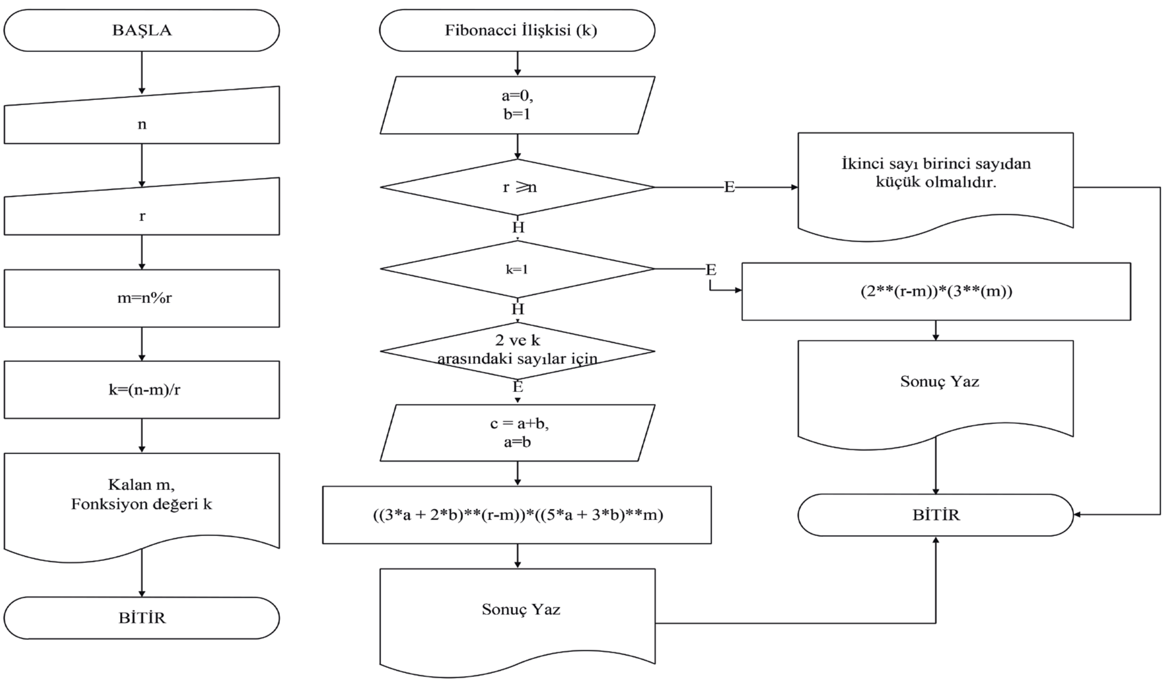
**Çizelge 2.** Genelleştirme İçin Yazılan Ana Algoritma

| | |
|---|---|
| Adım 1 | BAŞLA |
| Adım 2 | El ile girdi "n" |
| Adım 3 | El ile girdi "r" |
| Adım 4 | m=n%r |
| Adım 5 | k=(n-m)/r |
| Adım 6 | Yaz "Kalan m, Fonksiyon değeri k" |
| Adım 7 | BİTİR |

**Çizelge 3.** 'Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' Teoremi Algoritması

| | |
|---|---|
| Adım 1 | Fibonacci İlişkisi |
| Adım 2 | Oku "a = 0, b = 1" |
| Adım 3 | Eğer r ≥ n |
| Adım 4 | Yaz "İkinci sayı birinci sayıdan küçük olmalıdır.", Adım 14'e git |
| Adım 5 | Değilse |
| Adım 6 | Eğer "k = 1" |
| Adım 7 | (2**(r-m))*(3**(m)) |
| Adım 8 | Yaz sonuç, Adım 14'e git |
| Adım 9 | Değilse |
| Adım 10 | 2 ve k arasındaki sayılar için |
| Adım 11 | Oku "c = a+b , a = b, b = c" |
| Adım 12 | ((3*a + 2*b)**(r-m))*((5*a + 3*b)**m) |
| Adım 13 | Yaz sonuç |
| Adım 14 | BİTİR |

### 3.2.2. Akış Şeması




**Şekil 1.** Genelleştirme İçin Yapılan Akış Şeması

### 3.2.3. Teoremin 'Python' Program Dili ile İfade Edilmesi

```
==========================================
sayı girin17
 2. sayı girin4
kalan 1 Fonksiyon Değeri 4.0
>>> Fibonacciİlişkisi(4)
6656
>>>
```

**Şekil 2.** Problem 1.in 'Python' Programı İle Çözümü

### 3.2.4. 'Python' Program Kodu

```
FibonacciİIlişkisi 13.01.2020.py - C:/Users/fj/Desktop/[redacted]/FibonacciİIlişkisi 13.01.2020.py (3.8.0)
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
n=int(input('sayı girin'))
r=int(input(' 2. sayıyı girin'))
m=n%r
k=(n-m)/r
print("kalan",m, "Fonksiyon Değeri",k)
def Fibonacciİlişkisi(k):
    a = 0
    b = 1
    if r >= n:
        print("2. sayı 1. sayıdan küçük olmalıdır.")
    elif k == 1:
        return (2**(r-m))*(3**(m))
    else:
        for i in range(2,k):
            c = a + b
            a = b
            b = c
        return ((3*b + 2*a)**(r-m))*((5*b + 3*a)**m)
```

**Şekil 3.** 'Python' Program Kodu

## 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

"Sıralı ardışık nesnelerin herhangi ikisinin art arda olmaması veya aralarındaki farkın r olmaması" şartlarını sağlayan problemler için alanyazında yer alan çözümler de incelenerek derleme yapıldı ve çalışmadaki 'kod yöntemi' çözümü ile diğer çözümler karşılaştırıldı. Kod yöntemi ile çözülen problemlerde ilgili alt küme sayısının Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğu sonucuna varıldı. Dolayısıyla $n$ tane sıralı ardışık nesnenin $1,2,3,4,\ldots,n$ şeklinde gösterilmesiyle oluşan $n$ tane nesneden seçilen herhangi iki nesnenin farkı $r$ olmayan grup sayısı $n \equiv m(mod\ r)$ olmak üzere

$$\boxed{\left(F_{\frac{n-m}{r}+2}\right)^{r-m} . \left(F_{\frac{n-m}{r}+3}\right)^{m}}$$

'Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' teoremi elde edildi. Bu teorem yardımıyla olimpiyat sorusu tekrar çözülerek daha önceki çözümlere göre kısa ve net olduğu sonucuna varıldı.

Teorik matematik ile desteklenerek 'Fibonacci Sayıları Aracılığıyla Sayma' teoremi, algoritma ve mantıksal tasarım basamakları kullanılarak 'Python' program diliyle yazılıp problemin çözümünde kullanılan "0" ve "1" kodlarının 21. yy. becerileri ile ilişkilendirilmesi sağlanmıştır. Yine bu problemler de programa '$n$' ve '$r$' verileri girilerek çözdürülmüştür.

## KAYNAKLAR

Nesin, A. (2003). "0-1 dizileri ve Fibonacci sayıları". Matematik Dünyası Dergisi, 12(2).

Öztürk, F. (1995). Kombinatorik sayma problemleri. Ankara: A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.

Bulut, F. (2017). "Pascal Üçgeni, Kombinasyon ve Tümevarım Kullanarak Fibonacci Dizisinin N. Elemanını Bulma". El-Cezerî Fen ve Mühendislik Dergisi, 4 (3): 429-435.