Kaygı, 19(II)/2020: 611-635.
Araştırma Makalesi | Research Article

Makale Geliş | Received: 05.07.2020
Makale Kabul | Accepted: 25.08.2020
Yayın Tarihi | Publication Date: 15.09.2020
DOI: 10.20981/kaygi.792030

Osman Gazi BİRGÜL

Arş. Gör. | Res. Assist
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü, Ankara, TR
Middle East Technical University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Philosophy, Ankara, TR
ORCID: 0000-0003-2089-848X
gazibir@metu.edu.tr

Sayıların Onto-Epistemolojik Statüsü: *In Re* ve *Ante Rem* Yapısalcılık Yerine *In Constructio* Önerisi [*]

Öz

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, yapısalcılığın fraksiyonlara ayrılmasına dair kısa bir tarihsel giriş sunulmaktadır. İkinci bölümde, *in re* ve *ante rem* olarak bilinen yapısalcılık fraksiyonlarının sayıların onto-epistemolojik statüsüne dair argümanları güçlü ve zayıf yönleri ile birlikte ele alınmaktadır. Üçüncü bölümde ise bu iki yapısalcılık fraksiyonuna Cantor'un diyagonal argümanı örneği üzerinden itiraz edilmekte ve sayıların onto-epistemolojik statüsünün çağdaş epistemoloji ışığında ele alınması halinde bu iki fraksiyonda gözlemlenen realizm kaynaklı problemleri dışarıda bırakabilecek bir *in constructio* yaklaşım önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: In Re Yapısalcılık, Ante Rem Yapısalcılık, In Constructio, Sayılar, Diagonal Argüman.

Onto-Epistemological Status of Numbers: A Proposal of *In Constructio* as an Alternate to *In Re* and *Ante Rem* Structuralisms

Abstract

This study consists of three parts. In the first part, a brief historic introduction of the division of structuralism into its sub-branches will be presented. In the second part, the weaknesses and strengths of the two structuralist branches, viz. *in re* and *ante rem,* will be analyzed in terms of their arguments regarding the onto-epistemological status of numbers. In the third part, both branches of structuralism will be opposed through the example of Cantor's diagonal argument and an *in costructio* approach will be proposed instead, arguing that the problems resulting from realism encountered in these branches of structuralism can be avoided when the onto-epistemological status of numbers is evaluated in the light of the contemporary epistemology.

Keywords: In Re Structuralism, Ante Rem Structuralism, In Constructio, Numbers, Diagonal Argument..

[*] Bu çalışma, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü'nde Prof. Dr. David Grünberg danışmanlığında yürütmekte olduğum "Conceptualism: A New Onto-epistemological Framework of Sets and Numbers" adlı doktora tez çalışmasında yer alan bir başlığın kapsamı daraltılmış bir versiyonudur.

1. Giriş

Gerek sayılar gerekse de yapılar olsun, matematik felsefesinin en temel ontoloji sorunu matematiksel nesneler[1] olarak sayıların varlığının ve gerçekliğinin açıklanması sorunudur. En temel epistemoloji sorunu ise matematiksel nesnelerin bilgisinin imkânıdır. Literatürde bu sorunlara önerilen açıklamalara bakıldığında felsefi görüşlerin ontoloji ve epistemoloji yelpazesinde epeyce çeşitlendiğini görülecektir. Bu açıklamalardan *in re* ve *ante rem* şeklindeki iki yapısalcılık türünden ayrılan ama kendisi bir yapısalcılık olmayan *in constructio* (bundan sonra IC olarak kısaltılacak) önerimi sunmadan önce bu yapısalcılık türlerinin ortaya çıkışında rol oynayan motivasyonlara ve gidermeye çalıştıkları ontolojik ve epistemolojik kaygılara kısaca değineceğim.

Kabaca 19. yüzyılın son çeyreğine kadarki tarihsel süreçte sayıların adeta Platon'un ideaları gibi deneyimlenemeyen, özellikleri sabit, zihinden bağımsız varlığı olan aritmetik nesneler oldukları gibi Platoncu görüşler[2] hala yaygındı. 20. yüzyılla birlikte Platonculuğa yönelik itirazların başlaması, o itirazlara dair yeni tartışmaları da beraberinde getirdi ve bu yüzyılın ilk yarısı matematik felsefesinin en üretken olduğu dönemlerden biri olduğu kadar dikkatlerin Platonculuğa doğrudan yöneltilemediği yıllar oldu. Haliyle Benacerraf'ın Platoncu geleneğe[3] hem ontolojik hem de epistemolojik bir itiraz niteliğinde olan ve yapısalcılığa da ilham veren *What Numbers Could Not Be* (Bkz: Benacerraf, 1965) adlı makalesinin yayınlanması 1965 yılını buldu. Makalede Benacerraf'ın iki çocuk üzerinden kurguladığı düşünce deneyine göre Ernie ve Johnny[4]

[1] *Nesne, varlık, antite*, vs. gibi pek çok sözcük sayıların ontolojisine dair realist varsayımlar içermektedir. Ben bu varsayımları yazının dördüncü bölümünde açıklayacağım nedenlerden ötürü kabul etmemekteyim. Fakat en azından bu sözcükleri, onları benimseyen literatürü aktarmak için şimdilik kullanmaya devam edeceğim.

[2] Burada Platoncu gelenek olarak adlandırılan görüşler aslında Platon'un sayıya dair görüşlerini devam ettiren bir gelenek değildir. Sayılar adeta Platon'un idealar dünyasına aitlermiş gibi bir ontolojik açıklamanın benimsenmesinden ötürü ikinci literatürde Platonculuk olarak adlandırılmaktadır.

[3] Burada Benacerraf'ın Platonculuk ya da realizm olarak bilinen bu geleneğe itirazı Frege'nin *referans* kavramı üzerinden ilerlemekte ve Frege'nin sayılara dair görüşlerini hedef almaktadır.

[4] Friend, Ernie'nin aslında Ernst Zermelo'ya, Johnny'nin ise Johann von Neumann'a işaret ettiğini belirtir. Fakat Benacerraf, sayıları kurmak için çocukların aldıkları küme kuramsal prosedürlere gelince

adlarındaki çocukların babaları mantıkçıdır ve çocuklara sayı saymayı öğretmeden önce doğrudan küme kuramı öğretmeye başlarlar. Ernie, *N* adında sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin var olduğunu, elemanları arasında 'daha küçüktür' şeklinde geçişken, antisimetrik, yansımayan bir *R* bağıntısı olduğunu öğrenir. Bu bilgilerle *N* kümesine ait elemanların sıralanabileceğini gören Ernie, aksiyomları kullanarak teorem kanıtlayabilmektedir. Dört işlem, üst alma gibi operasyonları da öğrendiği küme kuramsal dilde tanımlayabilen Ernie, bu bilgilerini *N* kümesinin alt kümelerinin büyüklüklerini belirlemede, yani sayı saymada kullanmaya başlar. Jonny'de aynı türden bir eğitimden geçerek bu yetileri kazanır ve bir araya geldiklerinde teoremlerden ve sayılardan konuşan bu iki çocuk matematiksel işlemler de dâhil olmak üzere her konuda anlaşırken *3*'ün *17*'nin elemanı olup olmadığı konusunda fikir ayrılığına düşerler. Öğrendikleri hiyerarşiler şöyledir:

Tablo 1: Ernie'nin Öğrendiği Hiyerarşi

{ø}[5]	{ø ,{ø}}	{ø,{ø}, {ø,{ø}}}	..
1	2	3	..

Tablo 2: Johnny'nin Öğrendiği Hiyerarşi

{ø}	{{ø}}	{{{ø}}}	..
1	2	3	..

Ernie'ye göre *3, 17*'nin elemanı iken Johnny'e göre *17*'nin elemanı *16*'dır ve *3* sadece *4*'ün elemanıdır. Benacerraf, bu noktada Platonculuğa yönelttiği iki itirazdan ontolojiye dair olanını şöyle ifade eder:

Ernie'ye Neumann'ın prosedürünü, Johnny'e de Zermelo'nun prosedürünü öğretmektedir. Bkz: Friend, 2007: 184, sonnot 2.

[5] Benacerraf makalesinde köşeli parantez kullansa da farklı sembol kullanımını engellemek için yazının tamamında küme parantezleri tercih edilmiştir.

> Eğer 3 sayısı gerçekten de *b* adındaki belli bir kümedeyse, *"3"*ün anlamı – dolayısıyla da referansı – üzerine iki doğru açıklamanın olması ve bunların da 3 için iki farklı küme göstermesi mümkün olamaz. Eğer bir *b* kümesi için *3 = b* doğru ise, o halde *b*'den farklı bir *c* kümesi için *3 = c*'nin doğru olması mümkün değildir. … Bir ikilemin içindeyiz. (Benacerraf, 1965: 56).

Benacerraf'ın ikilem olarak adlandırdığı bu durum, literatürde özdeşlik (*identity*) problemi olarak bilinen bir ontoloji problemidir. Eğer *3'*ün referansı, özellikleri sabit ve zihinden bağımsız varlığı olan tikel bir aritmetik nesne ise, o halde çocukların takip ettikleri prosedürlerle elde edilen {ø,{ø},{ø,{ø}}} ve {{{ø}}} kümelerinden sadece birinin *3*'ün referansı olması gerekir, çünkü bir ve aynı nesne birbirini dışlayan iki niteliği aynı anda haiz olamaz. Bu ise sanılanın aksine sayıların bir referans olarak adeta Platoncu idealar gibi olmadıklarını ve özelliklerinin sabit olmadığını göstermektedir.

Benacerraf'ın aynı düşünce deneyine dayanarak ortaya koyduğu epistemolojik itiraz ise erişim (*access*) problemi olarak bilinmekte ve küme kuramları arasında epistemolojik üstünlüğün söz konusu olamayacağı sonucunu güçlendirmektedir. Benacerraf, itirazını "3={{{ø}}}?" sorusu üzerinden şöyle dile getirir:

> 3 = {{{ø}}}?" sorusunu lafı dolandırmadan (ve "Ernie'nin açıklaması çerçevesinde" gibi eklentiler yapmaksızın) ciddiye almak demek, bu [erişime dair] sorunu çözmenin başka bir yolunun olmadığı durumda, tamamen yolu kaybetmek demektir. Hayır, eğer böyle bir sorunun cevabı varsa, cevabı destekleyen argümanlar da vardır ama böyle argümanlar yoksa o halde birkaç sayfa önce bahsettiğimiz şartları[6] yerine getirmeyen açıklamalardan "doğru" [*correct*] olması nedeniyle ayrılan bir açıklama da yok demektir. (Benacerraf, 1965: 58)

Benacerraf'ın bu sözleri, en öz haliyle sayıların referansı olan soyut nesnelere erişmeyi mümkün kılan tek bir doğru yöntemin bulunmaması, dahası bu yöntemlerin birbirini dışlayan özellikteki olası referanslar ortaya koyması nedeniyle bu soyut nesnelere erişilemediği anlamına gelmektedir. Haliyle Benacerraf'a göre Platoncu sayı kavramı epistemolojik olarak erişilemez olmaktadır.

Benacerraf'ın bu problemlerden çıkış için önerdiği ve yapısalcılığa ilham veren çözümler ise şöyledir:

[6] Bahsedilen şartlar doğru açıklamanın zorunlulukla doğru olması şartı ve ancak ve ancak bu doğru açıklamada sayılara atanan belirli kümelerin doğru kümeler olması şartıdır. Bkz: Benacerraf, 1965: 57.

i. Sayılar nesne değildir, yapıyı karakterize etmeye yararlar: "… çünkü sayılara dair (yani zorunlu ve yeterli olan) özellikler [*properties*] vererek ancak *soyut bir yapıyı* karakterize etmiş oluruz …" (Benacerraf, 1965: 71)
ii. Yapıdaki öğeler ontolojik bir önem arz etmezler:

> […] bu kuram, her biri [dizideki] diğer öğelerle bağıntılarına atıfta bulunmaksızın tanımlanabilen birbirinden bağımsız tekil [öğelerin] özelliklerine değil, soyut bir yapıya ışık tutmaktadır. Sayılar üzerine düşünmek yerine, ne zaman tikel bir diziyi *sayıların yapısı olarak* ele alırız, ancak o zaman hangi öğenin 3 olduğu ya da 3'e *karşılık geldiği* sorusu anlam kazanmaya başlar." (Benacerraf, 1965: 71).

2. *In Re* ve *Ante Rem* Yapısalcılıklarda Sayılar ve Yapılar

Yapısalcıları *in re* ve *ante rem* olarak iki sınıfta tasnif edildiğinde[7], literatürde öne çıkan isimlerden Hellman ve Resnik'in görüşleri *in re* yapısalcılıkta, Shapiro'nun görüşleri ise *ante rem* yapısalcılıkta konumlanmaktadır. *In re* ve *ante rem* arasındaki en temel farkı görebilmek adına *in re* ifadesini (ontolojik olarak) *gerçekliğin içinde*, *ante rem* ifadesinin ise *gerçeklikten* (ontolojik olarak) *öncelikli* olarak çevirmek hatalı olmayacaktır. Bunu bir örnekle daha açık hale getirmek mümkün: '$x<y$' bağıntısının sembolik ifadesi olarak '$P(xy)$' atomik formülünü düşünelim. *Ante rem* yapısalcılara göre evrende bu formülü örnekleyebilecek hiçbir varlık olmasa bile '<' bağıntısı bir yapıdır, yapıyı örnekleyen varlıklardan ontolojik olarak bağımsız bir şekilde vardır ve bilgimizden bağımsız bile olsa var olacaktır. *In re* yapısalcılar ise genel itibariyle sayı gibi varlıklar üzerinden örneklenmesi söz konusu değilse yapıların var olamayacağını ve örneklediği bir yapı bulunmayan varlıkların da olamayacağını savunmaktadırlar.

In re yapısalcılardan Hellman, yapıları birer imkân (*possibility*) ya da hipotetik yapı olarak değerlendirir (Hellman, 2006: 16-24). Ona göre, fiziksel dünyada birer

[7] Hellman'ın yapısalcılığının genel olarak *kipsel mantık* ifadesindeki *kipsel* sözcüğü ile aynı anlama gelecek şekilde *kipsel yapısalcılık*, bazen de *nominalist yapısalcılık* olarak anılması literatürde oldukça yaygındır. Yine literatürde *in re* yahut eleyici olmayan (*non-eliminative*) olarak anılan tasniflerde Hellman ve Resnik'in isimlerine yer verilirken, *ante rem* yahut eleyici (*eliminative*) olarak anılan sınıf altında Shapiro'nun görüşlerine yer verilir. Ben, konuyu epistemoloji ya da ontoloji yerine onto-epistemoloji merkezinde tartışacağım için onto-epistemolojiye diğerlerinden daha yakın olan *in re* ve *ante rem* şeklindeki tasnifi kullanacağım.

örneği bulunsun ya da bulunmasın tüm yapılar birer imkândır. Salt imkânlar (*mere possibilities*) için var olma durumu söz konusu değildir ve fizik gerçekleriyle örtüşen imkânlar, kendisinin *şanslı rastlantı* (*lucky accident*) adını verdiği ve salt imkânlar dışındaki imkânlar olmak üzere iki çeşittir (Hellman, 2006: 118). Benacerraf ve Goodman gibi herhangi bir küme kuramını diğerine tercih etmenin matematiksel bir gerekçelendirmesinin olmadığını savunan Hellman'a göre (Hellman, 2006: viii), birer yapı olmaları bakımından hangi küme kuramı tercih edilirse edilsin, sayılar ancak içinde yer tuttukları bir yapı var olduğu sürece var olabilirler ve yapılar da ikinci derece mantıkta ifade edilebilen imkânlardan başka bir şey değildir (Hellman, 2006: 73). Bu bakımdan uygulamalı matematik Hellman için birbirine üstünlüğü olmayan mümkün yapılardan birinin gerçeklikte örneklenmesinden ibaret olup Platonculuğun aksine, sayıların yapılardan bağımsız varlığı söz konusu olmadığı gibi yapıların da şanslı rastlantı değillerse varlığı söz konusu değildir. Bu bağlamda Hellman'ı *in re* yapısalcı yapan iki noktadan ilki sayılara ve yapılara birbirinden bağımsız varlık atfetmemesi, ikincisi ise yapıların varlığına deneyimlenebilir/örneklenebilir olmayı şart koşmasıdır. Bu iki nokta Hellman'ın Platoncuları uğraştıran nesne realizmi probleminden kaçınmasını sağlamaktadır. Buna göre sayılar da yapılar da ancak deneyimlenebilen şanslı rastlantı durumlarında var olmaktadırlar. Hellman, deneyimlenebilirliği uygulamalı matematiği açıklarken de kullanmaktadır. Yani hipotetik yapılar ancak aktüel yapılara dönüştüklerinde varlık alanına geçmiş olmaktadırlar, bu geçiş sonucu uygulamalı matematiğin sınırları içine dâhil olmaktadırlar.

Hellman'ın *in re* yapısalcılığına dair bu savlar başlıca iki probleme yol açmaktadır. İlk problem, Hellman'ın uygulamalı matematik için yapılara getirdiği örneklenebilir olma ölçütünün ordinal aritmetiğindeki bazı yapılar gibi soyut matematiğin yapılarını dışlaması ve bu problemin de doğruluk değeri realizmi ile aşılamamasıdır. Sonsuz yapıların[8] örneklenmesi gibi bir problemde fizik ve matematik

[8] Burada *sonsuz* (*infinite*) ve *sınırsız* (*unbounded*) kavramları arasındaki farka değinmek yararlı olacaktır. Bir şey sınırsız olduğu halde sonlu olabilir. Hilbert'in şu örneği yeterince açık görünmekte: Belirli herhangi bir uzamın dışında her zaman daha fazla uzamın var olduğu gerçeğinden yola çıkıldığında ancak

alanlarının sonsuz yapıları örnekleyecek ve Dedekind'in kanıtladığı eşlenebilirlik/kategorisite teoremiyle (*categoricity theorem*) uyum gösterecek şekilde izomorfik ya da en azından homomorfik olup olmadığı konusu bizler için *örneklenerek* bilinebilir değildir. Başka bir ifade ile herhangi bir sonsuz yapıyı bir şanslı rastlantı olarak örneklenemediğinde Hellman'a göre onlar salt hipotetik, dolayısıyla da yok kabul edilmelidirler. Fakat Hilbert'in sezgicilere yönelttiği *Büyük Otel* itirazı (bkz: Hilbert, 2013:730)[9] hatırlanacak olursa, şanslı rastlantı olarak örneklenmesi imkânsız bir yapıyı *anlamak* mümkündür. Yani Kantçı terminoloji ile Hellman matematik ve bilim ilişkisini açıklamak için anlama (*understanding*) ve duymaya (*sensibility*) eş-kapsamlı bir şekilde yer vermeye çalışsa da anlamanın kapasitesi duymanın kapasitesini aşmaktadır. Bu fark ise ordinal aritmetiğinde Hilbert'in *Büyük Otel* itirazını gerçekte böyle bir otele gitmeksizin anlayabilmeyi ya da düşünebilmeyi[10] olanaklı kılmaktadır. Diğer yandan Hellman'ın savunduğu doğruluk değeri realizmine göre (bkz: Hellman, 2006: 2) tüm aritmetik ifadelerin nesnel, zihinden bağımsız doğruluk-değeri vardır. [11] Bu bağlamda Hilbert'in *Büyük Otel* itirazına dair "$1 + \omega = \omega$" şeklinde bir aritmetik ifadesi ortaya konulacak olursa, bunun doğruluk değeri hakkında konuşmak, hipotetik olması nedeniyle var olmayan bir yapıya dair konuşmaya indirgenmekte, neredeyse "*ω tek sayı mıdır?"* şeklindeki bir soruyla aynı kategoriye itilmektedir. Hellman yapıların

---

uzamın sınırsız olduğu sonucuna varılabilir, sonsuz olduğu sonucuna değil (Hilbert, 1967: 372). Ayrıca bkz: Linnebo, 2017: 63-64.

[9] Bu referansa dair küçük bir literatür bilgisi vermenin faydalı olacağını düşünüyorum. Hilbert, Göttingen'de Ocak 1924'teki bir konuşmasında sonlu ötesi konusunda otel örneğini vermesine rağmen bu konuşma 2013'e kadar yayınlanmamıştır. Konuşma yayınlanmadığı için de uzunca bir dönem Hilbert'in bu konuda herhangi bir şey yazmadığı ve paradoksun Gamow'a ait olduğu gibi söylentiler hâkim olduysa da hem paradoks hem de paradoksun altında yatan sonlu ötesine dair görüşler Hilbert'e ait olup otel üzerinden bir sonlu ötesi tartışması ilk olarak (Hilbert'e atıfta bulunmaksızın) Haupt ve Aumann tarafından kaleme alınmış (bkz: Haupt & Aumann, 1938: 19) fakat asıl ününe Gamow'un 1947'de yayınladığı kitabındaki versiyonuyla kavuşmuştur (bkz: Gamow, 1947: 17). Daha detaylı bilgi için bkz: Mart 2014.

[10] Burada *düşünmek* fiilini geçişli bir fiil olarak kullansam da Kant'ın epistemolojisi bağlamında *hakkında düşünmek* (*think about*) şeklinde değil düşünülen şeyin realist anlamda varlığını varsaymadan kullanılan *think of* fiilini kastetmekteyim.

[11] Hellman her ne kadar yapıları imkânlar olarak değerlendirerek Platonculuktan kaçınmaya çalışsa da doğruluk realizmi Hardy'nin ifade ettiği üzere "Matematik teoremleri ya doğrudurlar ya da yanlış; onların doğruluk ve yanlışlıkları da mutlak ve bilgimizden bağımsızdır. *Bazı* açılardan, matematiksel doğruluk nesne realizminin bir parçasıdır", bkz: Hardy, 1929: 4. Hellman'ın kendisi de bu realizmin farkındadır ve bu tutumunu görünen o ki matematiğin evrenselliğini korumak adına savunmaktadır, bkz: Hellman, 2006: 2.

ikinci derece mantıkta ifade edilebilen imkânlar olduğunda ısrar etse bile ifade edilebilirlik örneklenebilirliğin sınırlarını aşmaktadır.

İkinci problem, sonsuz yapıların örneklenmesinde ikinci derece mantığın ifade gücünün ve mümkün dünyaların işe koşulmasının çözümsüz kalmasıdır. Hellman ifade edilebilirlik konusunda her sayıyı geçen, örneğin o sayıdan bir fazla olan bir ardışık sayının ifade edilebilir olması itibarıyla bir imkân olduğunu söylemekte ki bu da sayıların içinde yer aldığı yapının da mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Örneğin, ona göre "*Her sonlu sayı arttırılabilir* ifadesi[12] $\Box\ \forall m \Diamond \exists n\ E(nm)$ şeklinde yazılabilir" (Hellman, 2006: 81). Yine Hellman'a göre bu ifade m sonlu sayısından bir fazla n sayısının bir mümkün dünyada olabileceğini, yani bu ifadeyi kullanmanın aslında $\forall m \exists n\ E(nm)$ şartını sağlayan bir dünyayı onaylamayı gerektirmediğini belirtir (Hellman, 2006: 81). Fakat bu yine de ω'yı örneklememekte, sadece herhangi bir doğal sayıdan daha büyüğüne ulaşabileceğimizi söylemektedir. İfade edilebilirlik tek başına kipsel bir var olma ölçütü olarak alınsa bile Linnebo'nun da işaret ettiği üzere tamamlanmış ve sonsuz sayıda doğal sayı içeren bir küme olarak ω, $\Diamond \forall m \exists n\ E(nm)$ şartını, yani sonsuz ardışıklığın bir küme olarak tamamlanmasını gerektirir fakat $\Box\ \forall m \Diamond \exists n\ E(nm)$ ifadesinden $\Diamond \forall m \exists n\ E(nm)$ ifadesine çıkarım yapmak mümkün değildir (Linnebo, 2017: 67-68).[13] Dolayısıyla, $\Box\ \forall m \Diamond \exists n\ E(nm)$ ifadesi verilen bir doğal sayının ardışığını bulmamızı mümkün kılsa da seriyi tamamlamamızı ve örneklememizi asla garanti etmemektedir. Hellman ω'yı örnekleme konusunda potansiyel sonsuzluk ve kipsel sonsuzluk nosyonlarını harmanlayarak ω'nın varlığına dair kiplik temelinde iddialar önermeyi denese de bu girişim de sonuçsuz kalmaktadır. O, *tamamlanmış olmak* kavramını kafa karıştırıcı bulur ve önerdiği yapısalcılığa göre "sonsuz bütünlerin varlığı … her biri kendince 'yapılandırmacı köklere' dayanan 'Potansiyel Sonsuzluk' ve ikinci-derece kapsam adındaki iki varsayımdan

---

[12] Burada Hellman ilgili ifadeyi "$\Box \forall x \Diamond \exists\ y\ (y\ extends\ x)$" şeklinde sunmaktadır. Ben diğer ifadelerle uyumlu olması açısından ifadeyi m ve n değişkenleriyle birlikte *E(nm): … n, m'den bir fazladır* yüklemiyle kullandım.

[13] Hellman'ın kendisi bu konuda potansiyel sonsuzluk kavramını hem $\Box\ \forall m \Diamond \exists n\ E(nm)$ ifadesini hem de $\Diamond \forall m \exists n\ E(nm)$ ifadesini içerecek şekilde kullandığını belirtmekte fakat aradaki bağı açıklamayarak ω'ya salt imkân gibi davranmaktadır, bkz: Hellman, 2006: 30, dip not 39.

çıkarımlanabilmektedir" (Hellman, 2006: 33). Fakat önerdiği çıkarım, bir ω-serisine yapılandırmacı bir prosedürle ulaşmanın potansiyel sonsuzluğun kapsamında olduğunu söylemekten ileri gidememektedir. Bu kısıtlılığın farkında olan Hellman bunu şöyle dile getirir:

> Oysa fark edildiği üzere, kipsel-varlık iddialarının yol açtığı kendi problemleri bulunmaktadır. Bunları [kipsel varlık iddialarını] dilsel uylaşımlar olarak görmenin, bu da mümkün değilse bir gözlem, ölçümleme ya da formel manipülasyon olarak açıklamanın mümkün olmadığını düşünüyoruz. Kipliği temele alan yaklaşım, standart Platonculuğa üstünlük sağlayamadığı gibi matematiğin temellerinin bu yönüne dair derin felsefi konulara bir çözüm önermenin de çok uzağındadır. (Hellman, 2006: 143-144).

Resnik, Hellman'ın sadece örneklenebilen yapılara gerçeklik atfetmesine rağmen adeta tümeller gibi muamele ettiği yapıların gerçek olabilmesi için örneklenebilirlikten daha makul bir gerekçelendirme olmadığını belirtir ve mantıksal bakımdan mümkün olmanın kümeler bağlamında da bilinemez olması, somut sonsuzların varlığı ihtimalinin epistemolojik gerekçelendirme olmaksızın işe koşulması (bkz: Resnik, 2005: 67-81) gibi nedenlerle Hellman'ın yapısalcılığından uzak durur. Kendi *in re* görüşünün realist karakterini ise şu üç tez ile ifade eder: "(1) matematiksel nesneler bizlerden ve yapılandırmalarımızdan (*constructions*) bağımsız varlığa sahiptir, (2) çağdaş matematiğin büyük kısmı doğrudur, (3) matematiksel hakikatler bizim inançlarımızdan, kuramlarımızdan ve kanıtlarımızdan bağımsızca varlıklarını sürdürürler" (Resnik, 2005: 4). Tartışmanın bağlamı gereği tezlerden birincisini matematiksel nesnelerin ontolojisi, ikinci ve üçüncüsünü ise doğruluk değeri realizmi bağlamında tartışmak uygun görünmektedir.

Birinci tezle ilgili başlıca iki problem ortaya çıkmaktadır. Bu tez ve yol açtığı problemler arasındaki ilişkiyi daha anlaşılır kılmak için Resnik'ten bir başka alıntıya yer vermek yararlı olacaktır:

> Benim iddiam, matematikte yapılar içinde düzenlenmiş 'içsel' oluşumlu nesnelerin bulunmadığı, sadece yapıların bulunduğudur. Matematiğin nesneleri … yapılarda yer alan [ama kendileri] yapısız noktalar ya da

> konumlardır. … yapıların dışında ne bir özdeşlikleri ne de özellikleri vardır (Resnik, 1981: 530).

Burada bahsedilen dâhili kompozisyon somut nesneler bağlamında fiziksel, kimyasal ya da geometrik özellikler olarak örneklendirilebilir. Fakat aynı durum sayılar için söz konusu değildir. Resnik sayıların özdeşliği (*identity*) konusunda şöyle der:

> Doğal sayı olan 2'nin Zermelo İki'si ile aynı olmaması konusuna gelince, görünen o ki doğal sayı olan 2, pozitif tam sayı olan 2, pozitif rasyonel sayı olan 2, pozitif reel sayı olan 2 ve pozitif karmaşık sayı olan 2 hep aynı 2'dir. Bu konuda sessiz kalmak şöyle dursun, matematik pratiği bu sayılar arasında hiçbir fark görmemektedir (Resnik, 2005: 214).

Bu alıntıyla birlikte birinci tezin yol açtığı iki problemlerden ilki Linnebo'nun da işaret ettiği üzere sayıların yapılar dışında pek çok özelliğinin bulunması ve bunların göz ardı edilmesidir. Bunlar "soyut olmak, doğal sayı olmak, gezegenlerin sayısı olmak, Dedekind'in favori sayısı olmak gibi" (Linnebo, 2017: 163) özelliklerdir. Eğer Resnik doğal sayı olmanın doğal sayılar dizisinin yapısı içinde mümkün olduğunu, Dedekind'in en sevdiği sayı özelliğinin yine Dedekind'in sevdiği ve sevmediği sayılar şeklinde ayrık kümelerden oluşan bir yapıda mümkün olduğu gibi bir itirazda bulunsaydı bile bu onu daha ciddi olan ikinci problemden kurtarmaya yetmeyecekti.

İkinci problem ise, aynı olduğu iddia edilen tüm *2*'lerin farklı yapılarda farklı özellikler kazanarak özdeşliklerini yitirmeleridir. Resnik'in şu ifadesi sayısal özdeşlik ve özellik bakımından özdeşlik bağlamında problemlere yol açan bir ifadedir: "… benim paradigmam olan matematiksel nesneler geometrik noktalardır, özdeşlikleri yalnızca birbirileri ile olan ilişkileri üzerinden tanımlanabilir" (Resnik, 2005: 4). İkinci problem bağlamında bu ifadenin bir karşı modelini düşünecek olursak, örneğin doğal sayı olarak *2*, bir *1* sayısının ardışığı iken reel sayı olarak *2*'den hemen önce gelen sayı *1* değildir. Dolayısıyla, $!\exists x P(x2)$[14] ifadesi her yapıda sağlanamayan bir yüklem olmaması nedeniyle sayıların farklı olduğunu göstermektedir. Aslında Resnik, söz konusu birbirini kuşatan yapılarda aralıkları az yoğun olandan çok yoğun olana doğru geçtikçe sayıların yeni özellikler kazandığını göz ardı etmektedir. Bu itiraz karmaşık

[14] *P(xy)*: … y, dizide x'ten büyük sayıların en küçüğüdür.

sayıların yapısı gibi diğer sayı kümelerinin çoğunu kapsayan bir yapıyı temel aldığında bile cevapsız kalmaktadır. Karmaşık sayı yapısının bir öğesi olması bakımından *2*'nin özelliklerinin bilgisi onun doğal sayı olması bakımından özelliklerinin bilgisini kapsarken, tersi bir kapsama söz konusu değildir. Bu ise birinci tezde geçen, nesnelerin yapılandırmalarımızdan bağımsızca var oldukları iddiasıyla – aksi yönde epistemolojik bir açıklama sunulmadığı sürece – çelişmektedir. Çünkü birinci problem bağlamında sayıların özelliklerinin bizim onları nasıl yapılandırdığımıza bağlı olduğu, ikinci problem bağlamında ise sayıların birbirileri arasındaki üzerinden değil, bizim ilişkilendirmemiz üzerinden özdeşlik kazanabileceği/kazanamayacağı yorumlarını yapmak da gayet meşru görünmektedir.

İkinci ve üçüncü tezler ele alınacak olursa, sayıların ontolojik statüsü konusunda ise agnostisizmi benimseyen Resnik, "eğer matematiksel nesneler varsa, matematiksel realizm bunların bilinemez olduğunu işaret ediyor gibi görünüyor" (Resnik, 2005: 84) demektedir. Bu ifadede amaçladığı şey, bilgisine sahip olmadığı nesnelerin varlığını iddia etmek değil, Benacerraf'ın etkisi ile söz gelimi *2* sayısının tek bir referansı varsa bile bunun bilinemeyeceği, dolayısıyla epistemolojik temelden yoksun bir ontolojik iddiayı desteklemediğini dile getirmektir. Bu da Resnik'in görüşlerini açıklamak için bir epistemolojik çerçeveye ihtiyaç duyduğu anlamına gelmekte. Bunun farkında olan Resnik örüntü tanıma (*pattern recognition*) temelinde bir açıklama yapmakta (bkz: Resnik, 2005: 224-243), örüntünün bilgisinin örüntüyü tanımaktan farklı olduğunu ve örüntülerin kendilerini değil onlara uyan örnekleri tanıdığımızı belirtir (Resnik, 2005: 225). Fakat önerdiği epistemolojik açıklama genel olarak sayı ve yapıların birbirinden bağımsız varlığının olamayacağını öne sürerken realizmin sonucu olarak örüntü ve örnek ayrımı üzerinden neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak[15] ayrımı

[15] Burada bu iki kavram hakkında bir açıklama yapmak yerinde olacaktır. Öncelikle epistemolojide neyi-bilmek (*know-that*) ve nasılı-bilmek (*know-how*) kavramları geniş bir literatürde tartışılmıştır. Bunlardan nasılı-bilmek kavramının epistemoloji literatüründe artık neredeyse doğal bir yetenek anlamında kullanıldığını söylemek yanlış olmayacaktır. Bu makaledeki temel iddialardan birinin matematik bilgisinin önermesel veya prosedürel bir bilgi türü değil, edimsel (*performative*) ve yapıtsal (*artifactual*) bilgi türüne ait olduğu göz önünde bulundurulursa, doğal yeteneklerin tartışmanın dışında kaldığı açıktır. Dolayısıyla bu iki kavram yerine neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak kavramlarını kullanmayı tercih ettim. Neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak kavramlarının birbirinden ayrılamayacağı iddiası

yapmaktadır. Dahası, Resnik'in *epistemik yapısalcılık* adını verdiği pozisyonunun sayı kavramının gelişim serüvenine getirdiği yarı epistemolojik yarı antropolojik açıklama (bkz: Resnik, 2005: 265-270), edimsel (*performative*) ve yapıtsal (*artifactual*) bir bilgi türü olarak nasıl-yapılandırmanın imkânının epistemolojik koşullarına hiç değinmeyerek yapılandırmalarımızın matematiğe dair fikirlerimizi nasıl etkileyebileceğini göz ardı etmektedir.

Shapiro'nun *ante rem* yapısalcılığına gelindiğinde sayıların ve yapıların ontolojisine dair iddiaların bir epistemolojik temel üzerinde öne sürüldüğü, dolayısıyla epistemolojik problemlerin ontoloji alanında da sorunlara yol açtığı görülecektir. Ben bu sırayı tersten takip ederek önce sayı ve yapıların ontolojisine dair iddialarına yer vereceğim. Shapiro yapılara dair şöyle bir tarif sunar:

> Benim *ante rem* yapısalcılığıma göre bir matematik dalının konusu matematikçiler veya bilim insanları topluluğundan, onların zihinlerinden, dillerinden, yaşam biçimlerinden bağımsızca ve objektif bir şekilde var olan bir yapı veya yapılar sınıfıdır. … Dolayısıyla, *ante rem* yapısalcılık geleneksel Platonculuğun bir versiyonudur, en azından matematiğin ontolojisi ve metafiziği bakımından (Shapiro, 2011: 131).

Sayıların yapılarla ilişkisi konusunda ise şöyle der: "Sayı konumdur, yapının içinde bulunan yerdir. Aynı şey reel sayılar, Öklid geometrisindeki noktalar, küme kuramı hiyerarşisindeki elemanlar ve matematiğin cebirsel olmayan tüm nesneleri için geçerlidir" (Shapiro, 1997: 77-78). Yalnız Shapiro'ya göre sayıların özü onların yapıdaki diğer sayılarla olan ilişkisi üzerinden tanımlanmalıdır.[16] Buna göre "2 sayısının özü 0'ın ardışığının ardışığı ve 3'ten hemen önceki sayı olması, ilk asal sayı olması vb. ilişkilerdir" (Shapiro, 1997: 72). Fakat bu yapının varlığı, yapının sayılara ontolojik olarak öncelikli olması iddiasıyla birlikte öne sürülmektedir. Shapiro için "Doğal sayılar yapısı '6' sayısından önceliklidir, tıpkı 'beyzbol savunması' yapısının 'pasör'

ise bilgiyi edimsel ve yapıtsal olarak ele alan yaklaşımların çoğunda karşımıza çıkmakta ve en temelde Wittgenstein, Rorty vb. isimlerin uygunluk kuramına (*the correspondence theory of truth*) itiraz ederken kullandıkları anti-realist savlara dayanan ve Allen gibi bilgiye bir yapıt olarak yaklaşan isimlerden esinlenen onto-epistemolojik bir tutumdur.

[16] Shapiro, bu yaklaşımı ile özdeşlik bağlamında Resnik'te ortaya çıkan farklı dizilimlerde sayıların kazandığı farklı özellikler sorunuyla karşılaşmamaktadır. Fakat aynı problem, aşağıda değineceğim üzere, sayılar bağlamında değil asli yapı bağlamında Shapiro'da da ortaya çıkmaktadır.

konumundan öncelikli olması veya 'ABD hükümeti' yapısının 'başkan yardımcısı' konumundan öncelikli olması gibi" (Shapiro, 1997: 9). Bu iddialar bağlamında başlıca dört sorunla karşılaşılmaktadır.

İlk sorun yapıların bilgisinin nasıl elde edildiği ile ilgili olarak metodoloji sorunudur. Shapiro sayıların bilgisine dair soyutlama (*abstraction*), gösterim (*projection*) ve betimleme (*description*) olmak üzere üç katmanlı bir epistemolojik açıklama sunar (bkz: Shapiro, 1997: 109-118). Bu açıklamaya göre önce küçük yapıları fark ederek başlarız, örneğin *başkan*, *başkan yardımcısı*, *ekonomi bakanı* şeklinde üç nesnenin birbiri ile olan ilişkisi gibi. Gösterim ise yapıların farklı nesnelere uygulanabilirliğini mümkün kılan basamaktır, örneğin söz konusu ilişkinin *yönetim kurulu başkanı*, *yönetim kurulu başkanı yardımcısı* ve *ekonomiden sorumlu kurul üyesi* gibi. Betimleme ise, sayılamayacak kadar çok nesne arasında ilişki kurulmasını anlaşılır kılan öğedir. Fakat bu adımların tam tersi bir metot olan tümdengelimi matematiğin yöntemi olarak ifade eden Shapiro (Shapiro, 1997: 98), nesnelerden yapıları soyutlama şeklinde tümevarımsal bir metodu yapıların bilgisine dair epistemolojik bir açıklama olarak sunmaktadır. Shapiro'nun tarif ettiği bu çerçeveye, örneklenebilirliklerinden bağımsızca Platoncu anlamda var olan yapılarda sadece yer tutucular olarak konumlandırılan sayı nosyonu da eklenirse, bu tavrın epistemik erişim problemine yol açtığı ve uygulanamayan-örneklenemeyen bir yapının bilgisinin nasıl elde edildiği sorusunu gündeme getireceği açıktır. Nitekim en başta duyu verisi üzerine kurulu gibi görünen bu epistemolojik açıklama, matematiğin uygulanamayan-örneklenemeyen yapılara erişimini ilk basamakta kaybetmektedir. Bu bakımdan yapılara dair nesnelerinden ve zihinlerden bağımsız bir ontolojik statünün bilgisinin reddedilmesini makul bulmaktayım.

Betimleme adındaki üçüncü basamak irdelendiğinde bu problem daha aşikâr hale gelmektedir. Bu bağlamda betimlemenin bazı indeks kümeleri gibi sayılamayacak kadar çok nesneden oluşan yapıları tanımlamada faydalı olabileceği açıktır. Fakat sayılamaz sayıda çok nesneden oluşan yapıların içerdiği nesneler hakkında onların aynı niteliğe sahip olduğunun bilgisini bize veren betimleme değil matematiksel tümevarımdır.

Başka bir ifade ile bu özellik bilgisine nasıl ulaştığımız sorusunun cevabını betimleme vermemekte, betimlenin kendisi de matematiksel tümevarım temelinde açıklanabilmekte, dolayısıyla betimleme adımı temel bir açıklama sunmamaktadır. Örneğin kaça denk geldiğini bilmediğimiz *n* pozitif tam sayısına kadar olan tüm pozitif tam sayıları toplamda kullanılan Gauss yöntemini ele alacak olursak, her ne kadar formülün kendisi toplama karşılık gelen *x* sayısına nasıl ulaşacağımızın yöntemini betimlese de bu betimlemeyi mümkün kılan şey sadece başta pozitif doğal sayılar kümesinin alan/yapı olarak tanımlanması değil, bu tanıma ek olarak matematiksel tümevarımdır. Matematiksel tümevarımı mümkün kılan epistemolojik koşullara dair bir açıklama ise elbette betimlemeyi de kapsamına dâhil ederek daha etraflı bir açıklama sunacaktır.

İkinci sorun, yapılar ve birer sistem olmaları bakımından içerdikleri nesneler ve aralarındaki ilişkilerin *biçimsellik* kavramı ile birlikte nasıl ele alınacağının belirsiz olmasıdır. Shapiro'nun "nesneler arasındaki karşılıklı ilişkileri vurgulayan ve sistemin içindeki nesnelerin birbirileri ile ilişkilerini etkilemeyen tüm özelliklerini göz ardı eden soyut bir sistem biçimi" (Shapiro, 1997: 74) şeklindeki yapılar ve ilişkilerini konu edinen tanımında geçen *ilişki* ve *sistem* sözcükleri de *biçimsellik* kavramının muğlak olması nedeniyle bu epistemolojik açıklamayı bir noktada tıkamaktadır. Shapiro ilişkiler, sistemler ve onların biçimselliği hakkında içlerinde yer alan diğer nesneler ve ilişkilerinin de tanımlandığı ve sadece bu nesnelerin, aralarındaki ilişkilerin ve Tarski'nin mantıksal nosyonlarının terminolojisi kullanılarak üst-derece dilde tamamen tanımlanabildiklerini, akabinde de matematiksel bir yapıdaki ilişkilerin bu şekilde tanımlanabilirlikleri bağlamında biçimsel olduğunu söyler (Shapiro, 1997: 99). Hodes ise biçimsellik ile ilgili soruna şöyle işaret eder:

> Ben bunu tatmin edici bir şekilde anlamayı başaramadım. 'Sistem' nedir? Biçimsellik, (metindeki diğer ifadelerden anlaşıldığı gibi) ilişkilerin mutlak birer niteliği midir yoksa biçimsellik göreli midir? Eğer ikincisi ise, hangi sistemler biçimsel olmasa da olur? Yoksa biçimselliğin göreli olduğu sadece bir tane mi sistem var ve eğer durum buysa o zaman bu sistem nedir? Belki de yapının kendisidir? Bu tanımın kendisi için üst derece dilin hangi kaynakları işe koşulmuştur? Bu sorular cevapsız kaldığı sürece Shapiro'nun

> biçimselliğe dair açıklaması aydınlatıcı olmaktan uzak kalacaktır (Hodes, 2002: 470).

Üçüncü sorun, küme kavramının salt bir yapı olarak ele alınması durumunda yapının konumları olan elemanlar değiştiğinde kümenin kimliği değişirken yapısının değişmediği iddiasıdır. Bu sorun yapıların nesnelere olan önceliği ile doğrudan ilgilidir. Brown bu konuda Benacerraf'ın örneğine benzer bir örnek vererek başlar: "Zermelo'nun tanımına göre bir yandan 2∈3 (yani, $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\{\emptyset\}\}\}$ iken diğer yandan $2 \notin 4'\text{tür}$. Von Neumann'ın tanımına göre ise her sayı daha büyük bir sayının elemanı olabilmektedir" (Brown, 2008: 65). Buradan, eleman olmak ilişkisinin hangi kümenin hangi kümede konumlanacağı konusunda, dolayısıyla da küme kuramlarından türetilen sayıların birbirileri arasındaki hiyerarşik ilişkide belirleyici oldukları açıktır. Buna ek olarak, bir kümenin elemanları

> […] yer aldıkları kümelere (ya da yapılara) karşı bir tür öncelik sahibidirler. Eğer küme sadece bir yapı olsaydı, elemanlarını değiştirmek bir yapı olarak onu değiştirmezdi. … Fakat bir kümenin kimliği tamamen elemanlarına bağlıdır- elemanı değiştirdiğinizde küme de değişir (Brown, 2008: 66).

Bu durum ise ilk bakışta Shapiro'nun yapılarda yer alan nesnelerin birbirileriyle ilişkilerini etkileyen özelliklerinin yapı için önemli olduğuna dair savını destekler gibi görünse de sayıların Zermelo ve von Neumann'daki karşılıklarından hareketle iki farklı doğal sayı kümesi yapısının olduğu sonucuna çıkar. Haliyle, her ne kadar Shapiro sayıların özünün diğer sayılarla olan ilişkisinden ibaret olduğunu, *2*'nin özünün doğal sayılar yapısındaki ikinci konumdan, *6*'nın özünün ise altıncı konumdan ibaret olduğunu söylese de (Shapiro, 1997: 72) bu söylem sayıların özünü açıklamada yine sayıların kendilerine başvurmakta, onların diğer sayılarla ilişkilerinin yapıları değiştiren boyutunu göz ardı etmektedir. Bu göz ardı ediş ise "Nasıl dile getirilirse getirilsin, yapısalcılık iki sistemin 'aynı' yapıyı örneklediği nosyonunu temel almaktadır" (Shapiro, 1997: 90) ifadesiyle birlikte ele alındığında ortaya çıkan bu iki doğal sayı yapısının hangi *asli* yapıyı örneklediği şeklindeki cevapsız soruya yol açmaktadır. Aslında bu Benacerraf'ın probleminin hangi yapının doğal sayılar yapısı olduğu şeklinde yapısal düzeyde ortaya çıkan bir versiyonudur. Eğer böyle bir asli yapı varsa bile yukarıda bahsi geçen üç adımlı epistemolojik açıklama da bu yapının bilgisine erişim imkânı sunmadığından, *ante rem* yapısalcılık bilgisine erişilemeyen yapıların varlığı şeklindeki ontolojik ve epistemik bir problem barındırmaktadır.

Dördüncü sorun ise Shapiro'nun sonsuz bir yapının var olduğuna dair ontolojik iddiasıdır. Bu yapının var olduğunu doğrudan bir aksiyom olarak verme yolunu seçen Shapiro, varoluşsal niceleyiciyi realist bir tutumla *vardır* şeklinde yorumlar: "Yapıların varlığına dair ilk aksiyomumuz basit bir aksiyomdur ama ontolojik açıdan belli bir öneme sahiptir: **Sonsuzluk:** İçinde sonsuz sayıda konum bulunan en az bir yapı vardır" (Shapiro, 1997: 93). Varlıksal niceleyici olarak ∃'nin nasıl yorumlanması gerektiği sorununa geçmeden önce sonsuzluk aksiyomunun küme kuramındaki karşılığına da yer vermek gerekmekte: $\exists I\big(\emptyset \in I \wedge \forall x \in I\ (x \cup \{x\}\ \in I)\big)$.[17] Bu noktada sonsuz yapı da dâhil matematiksel nesnelerin varlığını doğrudan Shapiro'nun aksiyomu ile iddia etmek Dedekind'in yaptığı gibi, tüm sayıları kapsayan bir alan var sayarak geniş bir ontolojik envanter tanımlamak ve o bilinmeyen envanterden dilenen yapıyı elde ederken envanterin kendisi olarak sonsuz yapının ontolojik ve epistemolojik statüsünü gündeme getirmeyi gerektirecektir. Ben yapılandırmacıların ∃ yorumunu onto-epistemolojik açıdan daha güvenli bulmaktayım: yani, *vardır* yerine *yapılandırılabilir* şeklindeki yorum. Bu yorum sonsuz yapının nasıl yapılandırılabileceğine yönelik transandantal bir açıklama gerektirecektir, başka bir ifade ile sonsuz yapıyı kavramanın epistemolojik koşullarını açıklamak *aksiyom* gibi sihirli bir sözcük kullanarak ontolojik bir iddiada bulunmaktan daha kolay ve daha güvenlidir. Bu bakımdan Shapiro'nun aksiyomu yerine Kant'ın Zaman formunun ardışıklık ve eşzamanlılık şeklindeki iki öğesini aynı anda düşünmek probleme bir çözüm önerisi olarak ele alınabilir. Buna göre, eğer sayılar arasındaki ilişki sadece ardışıklık ile açıklanmaya çalışıldığında Spinoza'nın itirazına cevap vermek güçleşir. Nitekim Spinoza'nın sonsuz sayıyı reddetmesinin nedeni ardışıklığın sadece bir sonraki nesneye ulaşmayı sağlasa da sonsuz tane nesnenin tamamına ulaşmayı mümkün kılmamasıdır. Dolayısıyla en az bir tane sonsuz bir

[17] Burada ∃ niceleyicisinin bir yüklem olarak alınmadığı açık olduğundan Kantçı çerçevede varlığın bir yüklem olmadığı iddiasını bu tartışmanın dışında bırakacağım.

yapının yapılandırılabilir olduğu savı ardışıklıktan fazlasını gerektirecektir, yani eşzamanlılığı. Bu yapılardan biri olarak ω, doğal sayılar kümesi, yani ardışık ve sonlanmayan bir nesne diziliminin kümesi olmak durumundadır. Bu dizilimin tek tek sayıları saymaya gerek kalmadan kavramsallaştırılarak anlaşılmasını mümkün kılan dizilimin sürekli ardışıklık olarak kavramsallaştırılmasıdır. Bu da sonsuzca uzayıp giden dizilimin kendisiyle eşzamanlı olan tamamlanmış bir bütün olarak düşünülmesiyle mümkün olmaktadır.

3. *In Constructio* Önerisi

Bu öneriyi ifade etmeden önce onto-epistemoloji kavramı üzerine birkaç söz etmek yerinde olacaktır. Yukarıda ele aldığım problemler epistemoloji ve ontoloji problemleriydi. Fakat matematik felsefesinde ontoloji ve epistemolojiyi birbirinden seçik alanlar olarak ele almak her halükârda matematiksel bilginin nesnesine dair ontoloji sorunları ve nesnelerin bilgisine dair epistemoloji sorunları yaratmaktadır. Fakat onto-epistemoloji kavramı, edimsel ve yapıtsal bilginin neliği konusunda neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak kavramlarının özünde birbirinden ayrılamayacağı savı üzerine kurulu olduğundan söz konusu problemlerin ele alınışına farklı bir perspektif sunabilir. Burada önermek istediğim IC önerisini de onto-epistemolojik bir perspektif üzerinden Kant’a kadar geriye götürmek mümkündür. Bilindiği üzere Kant’ın transandantal felsefesi anti-realist bir akımın da öncülüğünü yapmıştır. Bu bağlamda Nietzsche’nin konfor karşıtı tavrı, Wittgenstein’ın ve Rorty’nin uygunluk kuramına karşı eleştirileri gibi bağlamlar düşünüldüğünde gelinen noktanın hakikat-sonrası dönem olduğu görülecektir. Ontoloji ve epistemolojinin kadim soruları olan varlığın ve bilginin ne olduğu soruları bu hakikat-sonrası dönemde yeniden formüle edilerek cevaplandırılmaya çalışılmaktadır. Burada dikkate değer nokta, perspektifin değişmiş olmasıdır. Bir örnek olarak Barry Allen’ın bilgiye dair şu tespitine yer vereyim:

> Söylediğim gibi, eğer bir yapıt bir performansın ya da kasıtlı edimin bir sonucuysa ki yapıtlar arasına tahmin edilen ve edilemeyen sonuçlar ve yan-ürünleri de dâhil edelim, o zaman modern insan nörolojisi de evrimsel bir yapıttır, ata türlerin yapıtlarının bir yapıtı. Ve eğer nörolojimiz yapıtsal ise o

> zaman onun karakteristik ürünleri de öyledir: yani algı verileri, kavramlar ve düşünceler (Allen, 2004: 264).

Buna göre matematikte neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak arasındaki ayrım önemini kaybetmekte, matematiksel bir nesneler birer yapıt olarak yapılandırma ediminin sonucu olmakta ve matematiğin bilgisi de yapıtların özne tarafından yapılandırılabilirliğinin[18] bilgisi olmaktadır. Bu noktada matematiğe dair bilginin yapıtsal ve edimsel bilgi olduğunu belirtmek gerekmektedir. Bu perspektiften bakarak Cantor'un diagonal argümanını ve Erdinç Sayan'ın kullandığı bir ağaç diyagramını karşılaştırmak[19] matematiksel bilginin yapıtsal ve edimsel yönünü daha belirgin hale getirecektir. Bu noktada diyagonal argümanı tartışmak üzere şu tabloya yer verelim:

Tablo 3: Diyagonal Argümandaki *d* Sayısı (Sayan, 2018: 4)

1.	0.**1**0111011000...	
2.	0.1**1**010111000...	
3.	0.10**1**00101101...	
4.	0.011**0**1110001...	
5.	0.1000**0**100011...	
6.	0.11000**1**10100...	$=d$
7.	0.100100**0**1110...	
8.	0.0010111**0**001...	
9.	0.01111011**1**00...	
10.	0.001110010**1**1...	
11.	0.0101000101**0**...	

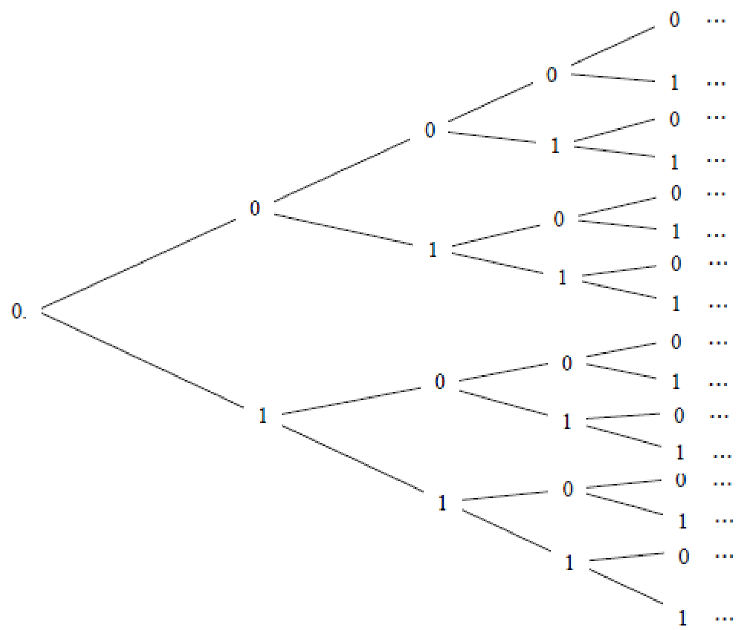
...

[18] Burada önemli bir noktayı açıklamak yerinde olacaktır. Matematik felsefesinde yapılandırmacılık olarak bilinen ve Brouwer, Dummett, Heyting gibi isimler tarafından önerilen yaklaşımı benimsediğimi söyleyemem. Yapılandırmacıların kendi aralarındaki farklılaşmalar bir kenara, genel olarak aktüel sonsuzluğun reddinden matematiksel kanıtlarda hangi çıkarım kurallarının ve prensiplerin kullanılacağına kadar pek çok konuda onlardan farklı düşünmekteyim.

[19] Bu karşılaştırma hakkında şunu belirtmem gerekir: Sayan'ın metnindeki ana fikre katılmamakla birlikte onun önerdiği ağaç diyagramını oldukça önemli bulmaktayım. Cantor'un metni konusunda ise Cantor her ne kadar diyagonal argümanını tablolaştırmasa da Sayan bu argümanı sade bir şekilde *0* ve *1* rakamlarını kullanarak tablolaştırmış. On rakamı da içeren diyagramlar çok yer kaplayacağından sadelik adına Sayan'ın tablolarını alıntılayacağım. Bu konuda Cantor ve Sayan'ın metinleri için sırasıyla bkz: Cantor, 1891: 920-922 ve Sayan, 2018.

En sade haliyle ifade etmek gerekirse, Cantor'un argümanına göre sonsuz ve *reductio* olarak tamamlanmış varsayılan bir sayı kümesini tablodaki gibi alt alta yazdığımızda kalın yazılmış sayılar da bir d sayısı oluşturur: $d = 0.\mathbf{11100100110}\ldots$. Her ne kadar bu sayı kümesi sonsuz ve tamamlanmış olsa da d sayısını bu kümede bulmak mümkün değildir. Argümana göre buradan yola çıkarak [0,1) aralığındaki tüm reel sayıların yer aldığı bu kümenin aslında tamamlanmamış olduğu sonucuna varabiliriz. Dahası tabloya bu sayıyı eklemek de çözüm değildir çünkü 0.*xyz* … şeklinde ilerleyen sayıların hepsinde *x* yerine *0* ya da *1* yazıldığında kalın yazılan sayıların yeri değişecek ve [0,1) aralığında kalınarak yeni bir diyagonal sayı elde edilecektir. Şimdi Sayan'ın sunduğu ağaç diyagramına[20] bakalım:

Tablo 4: Sayan'ın Ağaç Diyagramı (Sayan, 2018: 16)



[20] Cantor'un diyagonal argümanı ve Sayan'ın ağaç diyagramı karşılaştırıldığında karşılaşılan en temel felsefi farklardan biri de reel sayıların listelenip listelenemeyeceği konusundaki görüş ayrılığıdır. Cantor bu sayıların listelenemeyeceğini savunurken Sayan'ın bu konudaki tavrı net olmamakla birlikte bu sayıların diyagonal bir tablo yerine bir ağaç diyagramında listelenmesi mümkün görünmektedir. Fakat buradan Sayan'ın reel sayıları, dolayısıyla da sonsuz öğeli bir dizinin tam listesini verdiğini düşünmek hatalı olacaktır. Bunun yerine Sayan'ın savını şöyle ifade edersek daha yerinde olacaktır: Matematikçiler diyagonal tablo yerine ağaç diyagramı kullanırlarsa diyagramın dışında kalan bir sayı göstermek mümkün olmayacaktır, yani ağaç diyagramı tüm reel sayıları içerecek şekilde genişleyebilen bir diyagramdır ve bu özellik Cantor'un diyagonal argümanını tablolaştırdığımızda ortadan kalkmaktadır.

Diyagonal argüman d sayısı örneğinden yola çıkarak kümenin tamamlanmamış olduğu sonucuna varırken Sayan'ın ağaç diyagramı d sayısı ve $[0,1)$ aralığındaki tüm reel sayıları içeren bir kümeyi betimlemektedir. Bu kümeye A diyecek olursak $A = \{\forall x \colon x \in \mathbb{R}\ \wedge (x \geq 0) \wedge (x < 1)$ kümesinin sonsuz elemanlı ve tamamlanmış bir küme olduğunu söylemek mümkündür.

IC önerisi burada 'd sayısını bilmek demek ne demektir?' sorusuyla gündeme getirilebilir. Yapısalcıların argümanları hatırlanacak olursa, *d* sayısı hakkında seçenekler şunlardır: Hellman: (1) şanslı bir rastlantıda yer alan bir sayı, (2) salt imkân olan bir yapıda yer alan bir sayı; Resnik: (3) bizlerden ve yapılandırmalarımızdan bağımsız bir varlığa sahip bir sayı; Shapiro: (4) yapının içinde yer alan bir konum, (5) yapıdaki diğer sayılarla ilişkisi üzerinden tanımlanan ve yapılandırmalarımızdan bağımsızca var olan bir konumdur. Bu seçenekleri karşıt örnek olarak birer istisna ya da karşı-argüman ile sırasıyla ele alacak olursak,

(1) *d* sayısının şanslı bir rastlantıda yer aldığını söyleyemeyiz, zira bu *d* sayısı da dâhil olmak üzere bir yapı olarak birinci tablo fiziksel dünyada örneklenebilir değildir.

(2) *d* sayısı salt imkân olan bir yapıda yer almamaktadır. Zira *d*'nin yer aldığı yapılar olarak birinci ve ikinci tablonun salt imkân olmadığı, yapılandırılabilir olmanın gerçeklik için yeterli olduğu itirazı, *imkân* kavramını fiziksel dünyada örneklendirilemeyenlerle sınırlandırmayıp daha geniş bir alana yayan anti-realist bir metafiziğe dayandırılarak meşru bir şekilde öne sürülebilir.

(3) *d* sayısı bizlerden ve yapılandırmalarımızdan bağımsız bir varlığa sahip bir sayı olamaz. Çünkü birinci tabloda *d* sayısı aslında diğer sayıların hangi sırayla alt alta dizildiğini betimleyen bir yönerge gibi hareket etmektedir. Sayıca sonsuz olsa bile, birinci tabloda sıralanan sayılar karışık bir şekilde verildiğinde teorik olarak *d* sayısına bakarak bunları tekrar aynı sıraya dizmek mümkündür. Dolayısıyla dizilimin kendisini bir yapılandırma olarak ele alacak olursak *d* sayısı bu yapılandırmadan bağımsız bir varlığa sahip olmayacaktır.

(4) *d* sayısına yapının içinde yer alan bir konum demek mümkün değildir, çünkü Shapiro'nun yapı kavramı sayılara ontolojik olarak önceliklidir. Fakat (3) için yer verdiğim gerekçelere dayanarak *d* sayısının birinci tablodaki yapıda yer almaması ve yapının *d* sayısına öncelikli olduğunun düşünülmesi söz konusu değildir, çünkü *d* bir bakıma yapının kendisinin sayı biçiminde ifade edilmiş halidir.

(5) Yapıdaki sayıların nasıl dizildiğini belirten bir yönerge olarak *d* sayısını yapıdaki diğer sayılarla ilişkisi üzerinden tanımlamak mümkün olsa da onu yapılandırmalarımızdan bağımsız bir varlığı olan bir konum olarak ele almak mümkün değildir, çünkü *d* sayısı bir dizlim olarak yapılandırmanın kendisini ifade etmektedir.

'*d* sayısını bilmek demek ne demektir?' sorusuna geri dönecek olursak, ben d'nin bilgisinin yapıtsal ve edimsel olduğunu düşünüyorum. Buna göre *d* sayısı yapılandırmaların sonunda ortaya çıkan bir yapıttır. Yapılandırmalar üçüncü ve dördüncü tabloda olduğu üzere farklılaşabilir. Fakat iki tablo arasındaki en temel fark şudur: Eğer dizilimi bir yapılandırma olarak ele almak mümkünse, üçüncü tablo yapılandırmanın kendisini *d* olarak bir sayı formunda ifade etmektedir. Dördüncü tablo ise yapılandırma ve sayıları birbirinden ayırmaktadır, yani yapının kendisi bir ağaç diyagramı olarak karşımıza çıkmakta ve sayılar onda konumlanmaktadır. Dördüncü tablo bağlamında sayıların ve yapının birbirinden ne kadar ayrılabilir olduğu sorusunu ise neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak arasındaki ayrımın matematiksel bilgi bağlamında ortadan kalktığı iddiasıyla birlikte yanıtlamaya çalışayım.

İlk olarak matematiksel bilginin edimsel ve yapıtsal olduğu öncülünden ve ikinci olarak da birer yapıt olarak yapıların ve birer edim olarak yapılandırmaların birbirinden ayrılamayacağı öncülünden hareketle yapının var olduğu ama yapılandırmanın olmadığı ya da yapılandırmanın gerçekleşip de bunun sonucunda bir yapının ortaya çıkmaması durumlarının saçma olacağı açıktır. Burada dile getirilmeyen temel ön kabul matematiksel nesnelere dair anti-realist ve agnostik bir tutumdur. Başka bir ifade ile matematiksel bağıntılar onto-epistemolojik olarak onları yapılandıran bir zihinden bağımsız düşünülemezler, yani matematiksel bağıntılar doğada zihinden bağımsız var olan ilişkiler değil doğayı anlarken düşüncelerini yapılandıran zihinlerin birer ürünü olan yapılardır. Bu bakımdan doğada insanlığın bilmediği matematiksel bağıntıların Platoncu ya da realist bir eğilimle varlığını iddia etmek epistemik erişim problemine neden olacaktır, nitekim yukarıda ∃ niceleyicisinin *vardır* yerine *yapılandırılabilir* şeklinde anti-realist yorumunun bir üstünlüğü de bu erişim problemini engellemesidir. Diğer yandan bu anti-realist tutum doğada insanlığın bilmediği matematiksel bağıntıların var olmadığını iddia etmemektedir. Zira doğası bakımından matematiksel bilgi edimsel ve yapıtsal ise "Neyi bilmekteyiz?" sorusuna matematik literatürünü göstererek cevap verebilirken "Neyi bilebiliriz?" sorusuna edimsel ve yapıtsal bilginin imkânını örnek gösterebiliriz. Bu ise onto-epistemoloji ile mümkündür ve en temelde insanın neleri bilebileceğine dair bir soruşturmayı gerekli kılmaktadır. Matematiksel bilginin edimsel ve yapıtsal karakterini göz önünde bulundurursak, gelecekte doğayı daha farklı ve gelişmiş bir matematiksel perspektifle kavramamızı ve yorumlamamızı mümkün kılan keşifler veya paradigmatik değişimlerin gerçekleşme ihtimalini göz ardı edemeyiz. Dolayısıyla, doğada insanlığın bilmediği matematiksel bağıntıların varlığı konusunda epistemolojik açıdan agnostik bir tutum benimsemek ve ontolojik açıdan da anti-realist bir tutum benimsemek yukarıda bahsi geçen önerilerden daha avantajlı ve makul görünmektedir.

Ağaç diyagramına geri dönecek olursak bu diyagram bir yapıttır ve bu yapıt reel sayıların bir dizi şeklinde yapılandırılması edimiyle ortaya çıkmaktadır. Eğer bir yapıt olarak diyagramdan reel sayıların bir dizi şeklinde yapılandırılması edimini dışlarsak geriye boş bir diyagram kalmaz, diyagram da edimle birlikte yok olur. Diyagramı Ryle'ın meşhur Oxford ziyaretçisi örneği (bkz. Ryle, 1949: 16) üzerinden bir analoji ile ele alacak olursak Oxford bir yapı ve reel sayıları da Oxford'daki binalar olarak ele alıp bu ayrılmazlığı modellemek mümkündür. Buna göre, iki kişinin Oxford'u gezmeye gittiğini düşünelim. Bunlardan A, B'ye üniversiteyi tanıtmaktadır. Kütüphane, yurt gibi çeşitli binaların önünden geçmekteler ve A her yeni binaya geldiklerinde B'ye o binanın adını ve hangi amaçlarda kullanıldığını anlatmaktadır. Gezi bittiğinde A, B'ye şunu sorar: "Oxford'u nasıl buldun?". B ise buna şöyle cevap vermiş olsun: "Ben Oxford'u görmedim, hâlbuki bana Oxford'u tanıtacağını düşünüyordum, sense bana kütüphane, yurt gibi binaları tanıttın. Oxford nerede?" Bu soru karşısında hemen herkes bu binaların hep birlikte Oxford yerleşkesi olduğu, binaları çıkarınca geriye Oxford'dan da bir şey kalmayacağı cevabını verir. Dördüncü tabloda da sayıları tablodan çıkardığımız bir senaryoyu ele almadan önce sayıların tabloya nasıl yerleştiğini, yani tablonun nasıl yapılandırıldığına bakmamız gerekir. Buradaki diyagram kullanılan rakamların çeşitliliğine göre daralan veya genişleyen bir yapılandırmayı örneklemektedir, yani ağaç diyagramı en başta sayılar temel alarak yapılandırıldığı için sayılar bu diyagramın yapılandırılmasından ayrı düşünülemez.

Sonuç

Sonuç olarak, sayıların zihnin ürünü olduğunu söyleyen Gauss'u ve bilginin yapıtsal olduğunu savunan Allen'ı göz önünde bulundurarak, matematiksel bilginin yapıtsal ve edimsel olduğu kanısı onto-epistemoloji bir çerçeve içinde ortaya konulduğunda matematiksel nesnelerin statüsüne dair daha problemsiz bir yaklaşım sunabilir. Başka bir ifade ile neyi-yapılandırmak ve nasıl-yapılandırmak birbirinden ayrılmadığı için matematiksel nesnelerin ontolojik ve epistemolojik statülerini soruşturmak için *in re* veya *ante rem* bir perspektif yerine bu statü problemini onto-epistemolojik bir problem olarak ele almak ve IC bir perspektif tercih etmek daha verimli olacaktır.

KAYNAKÇA

ALLEN, Barry (2004). *Knowledge and Civilization*, Colorado: Westview Press.

BENACERRAF, Paul (1965). "What Numbers Could Not Be", *The Philosophical Review*, 74 (1).

BROWN, James Robert (2008). *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, 2. Basım, New York: Routledge.

CANTOR, G. (2005). "*On an Elementary Question in the Theory of Manifolds"*, çev. E. William, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics,* ed. E. William, Cilt 2, Oxford: Clarendon Press.

FRİEND, Michèle (2007). *Introducing Philosophy of Mathematics*, Stocksfield: Acumen.

GAMOW, George (1947). *One, Two, Three ... Infinity: Facts and Speculations of Science*, New York: Viking Press.

HARDY, G. H. (1929). 'Mathematical Proof', *Mind*, 38 (149).

HAUPT, O.; Augmann, George (1938). *Differential- und Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse*, Berlin: Walter de Gruyter & Co.

HELLMAN, Geoffrey (2006). *Mathematics without Numbers: towards a Modal-Structural Interpretation*, New York: Clarendon Press.

HILBERT, D. (1967). "On the Infinite", *From Frege to Gödel*, ed. J. Van Heijenoort, Cambridge: Harvard University Press.

HILBERT, David (2013). "Über das Unendliche", Ed. Ewald, William; Sieg, Wilfried. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetics and Logic 1917-1933,* Heidelberg: Springer-Verlag.

HODES, H. (2002). "Review: Stewart Shapiro's Philosophy of Mathematics", *Philosophy and Phenomenological Research,* 65 (2).

LINNEBO, Øystein (2017). *Philosophy of Mathematics*, New Jersey: Princeton University Press.

MART, Helge Kragh (2014). "The True (?) Story of Hilbert's Infinite Hotel", Erişim Tarihi: 2020, (https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1403/1403.0059.pdf).

RESNIK, Michael D. (1981). "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference." *Noûs*, 15 (4).

RESNIK, Michael D. (2005). *Mathematics as a Science of Patterns*, New York: Clarendon Press.

RYLE, Gilbert (1949). *The Concept of Mind*, Chicago: The Uiversity of Chicago Press.

SAYAN, Erdinç (2018). *Contra* Cantor: How to Count the "Uncountably Infinite". (Yayınlanmamış yazı).

SHAPIRO, Stewart (2011). "Epistemology of Mathematics: What are the Questions? What Count as Answers?", *The Philosophical Quarterly*, 61 (242).

SHAPIRO, Stewart (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, New York: Oxford University Press.