Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **20** (2020) 061302 (975-982) AKU J. Sci. Eng. **20** (2020) 061302 (975-982)

DOI: 10.35414/akufemubid.803483

**Araştırma Makalesi / Research Article**

# Alfa Kenmotsu Pseudo Metrik Manifoldlar Üzerine

**Sermin ÖZTÜRK** [1], **Hakan ÖZTÜRK**[2*]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

[2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, Afyonkarahisar.*

[*] *Sorumlu Yazar, e-posta: hozturk@aku.edu.tr, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1229-3153*

*ssahin@aku.edu.tr, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-8535-0792*

Geliş Tarihi: 01.10.2020 Kabul Tarihi: 07.12.2020

***Anahtar kelimeler***
Alfa Kenmotsu manifold; Pseudo metrik; Sabit eğrilik; Kesit eğriliği

**Öz**

Bu makalenin asıl amacı alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar üzerinde bazı eğrilik özelliklerini incelemektir. Özellikle bu tür manifoldlar üzerinde lokal simetri, global $\phi$-simetri ve lokal $\phi$-simetri gibi tensör koşulları bazı ek şartlar altında göz önüne alınmıştır. Ayrıca, $\eta$-Einstein ve Einstein manifoldlar için gerek ve yeter koşullar çalışılmıştır. Bundan başka, $\xi$-kesit ve $\phi$-kesit eğrilikleri ile ilgili bazı sonuçlar alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar üzerinde verilmiştir. Son olarak, makale alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar için açıklayıcı bir örnekle sonlandırılmıştır.

# On Alpha Kenmotsu Pseudo Metric Manifolds

***Keywords***
Alpha Kenmotsu manifold; Pseudo metric; Constant curvature; Sectional curvature

**Abstract**

The aim of this paper is to investigate some curvature properties on alpha Kenmotsu pseudo metric manifolds. In particular, the tensor conditions such as locally symmetry, globally $\phi$-symmetry and locally $\phi$-symmetry under some additional conditions on such manifolds are considered. Also, the necessary and sufficient conditions for $\eta$-Einstein and Einstein manifolds are studied. Furthermore, some results are related to $\xi$-sectional and $\phi$-sectional curvatures on alpha Kenmotsu pseudo metric manifolds are given. Finally, the paper is concluded with an illustrative example for alpha Kenmotsu pseudo metric manifolds.



## 1. Giriş

Pseudo Riemann metriğine sahip değme metrik manifoldlar üzerinde ilk çalışma Takahashi (1969) ile başlamıştır. Bu çalışmayı takiben birçok yazar bu konu üzerine odaklanmışlar ve özellikle Sasakian manifoldların özel durumlarını çalışmışlardır (Alegre 2011, Calvaruso 2011, Calvaruso *et al.* 2013, Perrone 2014). $\eta$ bir değme 1-form ve $g$, $\eta$ ile birleştirilmiş bir Lorentz metriği olmak üzere, $(\eta, g)$ değme Lorentz yapısının fizikte özel bir önemi vardır (Duggal 1990). Değme manifoldlar incelenmeye başladıktan sonra hemen hemen değme yarı Riemann manifoldlar üzerinde de sistematik bir çalışma Calvaruso ve Perrone (2010) tarafından ortaya koyulmuştur. Yazarlar değme yapılar üzerinde Riemann ve pseudo Riemann metrikleri arasındaki farklılıkları araştırmışlardır. Genel anlamda sabit kesit eğrilikli değme pseudo metrik manifoldları sınıflandırmışlardır. Ayrıca, üç boyutlu durum için lokal simetrik değme pseudo metrik ve homojen değme Lorentz manifoldlarını ele almışlardır.

Diğer yandan, Kenmotsu (1972) bazı özel şartları sağlayan değme Riemann manifoldların bir sınıfını tanımlamıştır. Bu tanımlamadan sonra bu tür manifoldlar Kenmotsu manifoldu olarak adlandırılmıştır (Kenmotsu 1972). Hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldlar alfa Kenmotsu manifoldların genelleştirilmesinden ibarettir (Öztürk *vd.* 2010, Öztürk 2016).

Son zamanlarda Wang ve Liu (2016) pseudo Riemann metrik ile verilen hemen hemen Kenmotsu manifoldları çalışmışlar ve bu tür manifoldları hemen hemen Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar olarak isimlendirmişlerdir.

Bilindiği üzere normal hemen hemen Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar Kenmotsu pseudo metrik manifoldlardır. İşte bu çalışmada, alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar incelenecektir.

Bu makale aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlarla ilgili temel ön hazırlık yapılmıştır. Üçüncü bölümde, bu tür manifoldlar için bazı eğrilik özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölüm belli bazı şartları sağlayan alfa Kenmotsu manifoldlar üzerindeki temel bulgulardan oluşmaktadır ve açıklayıcı bir örnek sunulmuştur. Son bölüm ise çalışmanın temel amacını yansıtan tartışma ve sonuca ayrılmıştır.

## 2. Ön Hazırlık

Bu bölümde hemen hemen değme pseudo metrik manifoldlar için bazı genel tanımlar hatırlatılacak ve temel özellikler verilecektir.
$(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir $M$ manifoldu her vektör alanı için,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \eta(\xi) = 1$$

$$\phi(\xi) = 0, \eta \circ \phi = 0 \qquad (1)$$

olacak şekilde $M$ üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı $\phi$, bir vektör alanı $\xi$ ve $\eta$, 1-formuna sahipse $M$ manifolduna bir hemen hemen değme manifoldu denir. Burada (1) bağıntısının ilk eşitliği kullanıldığında diğer eşitliklerin aşikar olduğu görülmektedir. Ayrıca, bir hemen hemen değme yapısı için $\phi$ tensörünün rankı $2n$ dır.

Eğer bir hemen hemen değme manifold

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \qquad (2)$$

olacak şekilde bir pseudo Riemann metriği $g$ ile donatılmış ise bu durumda $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen pseudo metrik manifold olarak isimlendirilir. Burada her vektör alanı için $\varepsilon = \mp 1$ dır. O halde, (2) eşitliği $g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$ ile birlikte

$$\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi) \qquad (3)$$

eşitliğine denktir. Özellikle bir hemen hemen değme pseudo metrik manifold üzerinde $g(\xi,\xi) = \varepsilon$ olduğu açıktır. Böylece karakteristik vektör alanı $\xi$ bir birim vektör alanı olmak üzere, ya uzay benzeri ya da zaman benzeridir. Fakat asla ışık benzeri olamaz.

Bir hemen hemen değme pseudo metrik manifold $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ nin temel 2-formu

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y)$$

ile tanımlıdır. Burada $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Bir hemen hemen değme pseudo metrik manifold $d\eta = \Phi$ şartını sağlıyorsa bir değme pseudo metrik manifold olarak adlandırılır. Burada

$$d\eta = \frac{1}{2}(X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]))$$

dır. $R$ Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $Q$ Ricci operatörü Ricci tensörü yardımıyla

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

biçiminde tanımlıdır. Bir hemen hemen pseudo metrik $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ manifoldunun $1 \le i \le n$ için her zaman bir özel lokal pseudo ortonormal $\{E_i, \phi E_i, \xi\}$ bazı mevcuttur. Bu baza bir lokal $\phi$-bazı denir.

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme pseudo metrik manifold $(\phi,\xi,\eta)$-yapısı ile verilsin. Manifoldu $M \times \mathbb{R}$ olarak düşünelim. Her vektör alanı $X$ için $(X, f\frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtelim. Burada $t$, $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve $f$, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. O halde, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde $J$ hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

ile tanımlıdır. Eğer $J$ integrallenebilir ise o zaman hemen hemen değme pseudo metrik $(\phi,\xi,\eta)$-yapısının normal olduğunu söyleyebiliriz. $J$

kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$[\phi,\phi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi=0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada $[\phi,\phi]$ Nijenhuis tensör alanı olarak bilinmektedir (Yano and Kon 1984).

Bir hemen hemen Kenmotsu pseudo metrik manifold

$$d\eta=0, \qquad d\Phi=2(\eta\wedge\Phi)$$

şartlarını sağlayan bir hemen hemen değme pseudo metrik manifolddur. Bir normal hemen hemen Kenmotsu pseudo metrik manifoldu bir Kenmotsu pseudo metrik manifold olarak adlandırılır. $(M,\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme pseudo metrik manifold olsun. Eğer $M$ üzerinde keyfi vektör alanları ve $\alpha$ reel sayısı, $\alpha\neq 0$ için,

$$d\eta=0, \qquad d\Phi=2\alpha(\eta\wedge\Phi)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $M$ manifolduna bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold denir (Kim and Pak 2005). Burada özel olarak alfa sabiti 1 alınırsa manifold hemen hemen Kenmotsu pseudo metrik manifolda dönüşür (Kenmotsu 1972).

Şimdi, hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar ile ilgili aşağıdaki önermeleri verelim. Bu önermeler ilerideki hesaplamalarda kullanılacaktır.

**Önerme 2.1** $(2n+1)$-boyutlu $M$ manifoldu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olsun. Bu durumda her $X,Y$ vektör alanları için

$$\phi(\nabla_{\phi X}\phi)Y-(\nabla_X\phi)Y \tag{4}$$

$$=2\alpha\eta(Y)\phi X-\varepsilon(g(\alpha\phi X+hX,Y)\xi)$$

eşitliği sağlanır.

**Önerme 2.2** $(2n+1)$-boyutlu $M$ manifoldu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olmak üzere, $M$ manifoldunun bir alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olması için gerek ve yeter koşul her $X$ ve $Y$ vektör alanları için

$$(\nabla_X\phi)Y=\alpha[\varepsilon g(\phi X,Y)\xi-\eta(Y)\phi X] \tag{5}$$

eşitiğinin geçerli olmasıdır.

**Önerme 2.3** Eğer $(2n+1)$-boyutlu $M$ manifoldu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold ise o zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\nabla_X\xi=-\alpha\phi^2X \tag{6}$$

$$(\nabla_X\eta)Y=\alpha[\varepsilon g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)] \tag{7}$$

$$(L_\xi g)(X,Y)=-2\alpha(-g(X,Y)+\varepsilon\eta(X)\eta(Y)) \tag{8}$$

$$(L_\xi\eta)X=0 \tag{9}$$

$$(L_\xi\phi)X=0 \tag{10}$$

Burada $L$, $M$ üzerinde tanımlanan Lie türevidir.

## 3. Eğrilik Özellikleri

Bu bölümde alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar üzerinde $R$ Riemann eğrilik tensörü yardımıyla hesaplanan temel eğrilik özelliklerini elde edeceğiz. Bulunan bu özelliklere bulgular bölümünde ihtiyaç duyulacaktır. Verilen tüm eğrilik özellikleri aşağıdaki önermede sunulmuştur.

**Önerme 3.1** $(2n+1)$-boyutlu $M$ manifoldu bir alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olsun. O halde, $M$ üzerinde keyfi vektör alanları için,

$$R(X,Y)\xi=\alpha^2[\eta(X)Y-\eta(Y)X] \tag{11}$$

$$R(X,\xi)\xi=\alpha^2\phi^2X \tag{12}$$

$$R(X,\xi)\xi-\phi R(\phi X,\xi)\xi=2\alpha^2\phi^2X \tag{13}$$

$$R(X,\xi)Y=\alpha^2[-\eta(Y)X+\varepsilon g(Y,X)\xi] \tag{14}$$

$$S(X,\xi)=-2n\alpha^2\eta(X) \tag{15}$$

$$Q\xi=-2n\varepsilon\alpha^2\xi \tag{16}$$

$$(\nabla_W R)(X,Y,\xi)=\alpha^3\varepsilon[g(X,W)Y-g(Y,W)X]-\alpha R(X,Y)W \tag{17}$$

eşitlikleri geçerlidir.

**İspat** (6) eşitliği ve $R$ Riemann eğrilik tensörü göz önüne alındığında

$$R(X,Y)\xi=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_Y\nabla_X\xi-\nabla_{[X,Y]}\xi$$

$$=\nabla_X(-\alpha\phi^2Y)-\nabla_Y(-\alpha\phi^2X)$$

$$+\alpha\phi^2([X,Y])$$
$$= -\alpha\nabla_X\phi^2 Y + \alpha\nabla_Y\phi^2 X + \alpha\phi^2[X,Y]$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde yer alan kovaryant türev ifadeleri açıldığında

$$\nabla_X(-\alpha\phi^2 Y) = \alpha\nabla_X Y - \alpha\eta(\nabla_X Y)\xi - \alpha^2\varepsilon g(X,Y)\xi - \alpha^2 X\eta(Y)$$

$$\nabla_Y(-\alpha\phi^2 X) = \alpha\nabla_Y X - \alpha\eta(\nabla_Y X)\xi - \alpha^2\varepsilon g(Y,X)\xi - \alpha^2 Y\eta(X)$$

ve

$$\nabla_{[X,Y]}\xi = \alpha\nabla_X Y - \alpha\nabla_Y X - \alpha\varepsilon\eta(\nabla_X Y)\xi + \alpha\varepsilon\eta(\nabla_Y X)\xi$$

yazılır. Bu ifadeler yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa (11) eşitliği elde edilir. Burada $\eta(X) = \varepsilon g(\xi, X)$ dır. (11) eşitliğinde $Y$ yerine $\xi$ yazılırsa (12) eşitliğine ulaşılır.

$M$ üzerinde Jakobi operatörü keyfi vektör alanı $X$ için

$$l(X) = R(X,\xi)\xi$$

olmak üzere, $l(X)$ operatörüne sol taraftan $\phi$ tensörünü uygularsak

$$\phi l(X) = -\alpha^2\phi X$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $X$ yerine $\phi X$ alarak son iki ifade taraf tarafa çıkarılırsa (13) eşitliği elde edilmiş olur. Ayrıca, (11) eşitliğinin her iki tarafının keyfi $Z$ vektör alanına göre iç çarpımı alınırsa

$$g(R(X,Y)\xi, Z) = \alpha^2[\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)]$$

yazılır. Burada $R$ Riemann eğrilik tensörü özelliğinden dolayı

$$g(R(X,Y)\xi, Z) = -g(R(Z,\xi)X, Y)$$

olup

$$R(Z,\xi)X = -\alpha^2\eta(X)Z + \alpha^2 g(X,Z)\xi$$

dır. Bu son denklemde $Z$ yerine $X$ ve $X$ yerine $Y$ vektör alanları seçilirse (14) eşitliğinin ispatı açıktır. Bundan başka, $M$ üzerinde lokal bir pseudo ortonormal $\phi$-bazını $1 \leq i \leq n$ için $\{E_i, \phi E_i, \xi\}$ şeklinde alalım. $S$ Ricci eğrilik tensörü ve (3.1) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1}\varepsilon_i g(R(E_i,X)\xi, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(E_i,X)\xi, E_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(\phi E_i,X)\xi, \phi E_i) \\ &+ \varepsilon_{2n+1} g(R(\xi,X)\xi, \xi) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_{2n+1} g(R(\xi,X)\xi,\xi) = 0$ dır. Bu son eşitlik düzenlenirse (15) denklemine ulaşılır. (15) eşitliği yardımıyla $Q$ Ricci operatörünün tanımından

$$Q\xi = \varepsilon S(\xi, Y)\xi$$

yazılır. Böylece (16) eşitliğinin ispatı aşikar olarak görülür. Son olarak, (11) eşitliğinin her iki tarafının keyfi $W$ vektör alanı boyunca kovaryant türevini hesaplarsak

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X,Y,\xi) &= \nabla_W R(X,Y)\xi - R(\nabla_W X, Y)\xi \\ &- R(X,\nabla_W Y)\xi - R(X,Y)\nabla_W\xi \\ &= \alpha^2[\eta(\nabla_W X)Y + g(X,\nabla_W\xi)Y + \eta(X)\nabla_W Y \\ &- \eta(\nabla_W Y)X - g(Y,\nabla_W\xi)X \\ &- \eta(Y)\nabla_W X] - \alpha^2[\eta(\nabla_W Y) \\ &- \eta(Y)\nabla_W X] - \alpha^2[\eta(X)\nabla_W Y \\ &- \eta(\nabla_W Y)X] + \alpha R(X,Y)\phi^2 W \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikle birlikte (6) eşitliği de hesaba katılırsa (17) eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 4. Bulgular

Bu bölümde alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar üzerinde bazı eğrilik özellikleri yardımıyla özellikle sabit ve kesit eğriliklerini kullanarak bazı sonuçlar elde edeceğiz. Öncelikle hesaplamalarda kullanacağımız temel tanımları verelim.

**Tanım 4.1** $(2n+1)$-boyutlu $M$ manifoldu bir alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olmak üzere, keyfi $Y$ vektör alanı için $K(\xi, Y)$ ve $K(Y, \phi Y)$ ile sembolize edilen $Y$ vektör alanına göre $\xi$-kesit ve $\phi$-kesit eğrilikleri sırasıyla,

$$K(\xi, Y) = \frac{R(\xi, Y, Y, \xi)}{\varepsilon g(Y, Y) - (\eta(Y))^2}$$

ve

$$K(Y, \phi Y) = \frac{R(\phi Y, Y, Y, \phi Y)}{g(Y, Y)\left[-\varepsilon\big(\eta(Y)\big)^2 + g(Y, Y)\right]}$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer $Y \in Çek\eta$ olarak seçilirse

$$K(\xi, Y) = \frac{R(\xi, Y, Y, \xi)}{\varepsilon g(Y, Y)}$$

ve

$$K(Y, \phi Y) = \frac{R(\phi Y, Y, Y, \phi Y)}{[g(Y, Y)]^2}$$

dir. Burada $Y$ vektör alanı ya uzay benzeri ya da zaman benzeridir (Wang and Liu 2016).

**Tanım 4.2** $M$, bir hemen hemen değme manifold olsun. Her vektör alanı $X, Y, Z$ ve $W$ için

$$\phi^2(\nabla_W R)(X, Y, Z) = 0$$

şartı sağlanıyorsa $M$ global $\phi$-simetrik olarak adlandırılır. Eğer vektör alanları $Çek\eta$ cümlesine ait iseler $M$ ye lokal $\phi$-simetrik denir (Yano and Kon 1984).

**Tanım 4.3** $M$, bir $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme pseudo metrik manifold olsun. Her vektör alanı $X$ ve $Y$ için

$$S(X, Y) = \lambda_1 g(X, Y) + \lambda_2 \eta(X)\eta(Y) \qquad (18)$$

özelliği geçerli ise $M$ manifolduna $\eta$-Einstein denir. Burada $\lambda_1$ ve $\lambda_2$ düzgün fonksiyonlardır. Özel olarak, $\lambda_2 = 0$ ise manifold Einstein manifolduna dönüşür (Yano and Kon 1984).

**Teorem 4.1** $M$, bir $(2n+1)$-boyutlu alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olsun. Eğer $M$ lokal simetrik ise o zaman $M$ manifoldu $-\varepsilon\alpha^2$ sabit eğriliğine sahiptir.

**İspat** Öncelikle, (17) eşitliğini göz önüne alırsak lokal simetrik özelliğinden dolayı ($\nabla R = 0$)

$$0 = \alpha^3\varepsilon[g(X, W)Y - g(Y, W)X] - \alpha R(X, Y)W$$

yazılır. Buradan

$$\alpha R(X, Y)W = \alpha^3\varepsilon[g(X, W)Y - g(Y, W)X]$$

dır. O halde,

$$R(X, Y)W = -\alpha^2\varepsilon[g(Y, W)X - g(X, W)Y]$$

olup sabit eğrilik tanımından ispat açıktır.

**Teorem 4.2** $M$, bir $(2n+1)$-boyutlu alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olsun. Eğer $M$ global $\phi$-simetrik ve $\varepsilon$ uzay benzeri olarak seçilirse ise o zaman $M$ manifoldu $-\alpha^2$ sabit eğriliğine sahiptir.

**İspat** Hipotezden dolayı $M$ global $\phi$-simetrik olsun. Bu durumda (17) eşitliğinin her iki tarafına soldan iki kez $\phi$ tensör alanı uygulanırsa

$$0 = \phi^2((\nabla_W R)(X, Y, \xi)) = \alpha^3\varepsilon[g(X, W)\phi^2 Y - g(Y, W)\phi^2 X] - \alpha\phi^2(R(X, Y)W)$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha\phi^2(R(X, Y)W) = \alpha^3\varepsilon[g(X, W)\phi^2 Y - g(Y, W)\phi^2 X]$$

dır. Bu son eşitlikte (1) eşitliği ve

$$\eta(R(X, Y)W) = \alpha^2[\eta(Y)g(X, W) - \eta(X)g(Y, W)]$$

denklemi birlikte düşünülürse

$$0 = -\alpha^3\varepsilon g(X, W)Y + \alpha^3\varepsilon g(X, W)\eta(Y)\xi + \alpha^3\varepsilon g(Y, W)X - \alpha^3\varepsilon g(Y, W)\eta(X)\xi + \alpha R(X, Y)W - \alpha^3\eta(Y)g(X, W)\xi + \alpha^3\eta(X)g(Y, W)\xi$$

bulunur. Burada $g(\xi, \xi) = \varepsilon = +1$ uzay benzeri olarak seçildiğinde

$$-\alpha R(X, Y)W = \alpha^3[g(Y, W)X - g(X, W)Y]$$

denklemine ulaşılır ki bu son denklemde manifoldun sabit eğriliğinin $-\alpha^2$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3** $M$, bir $(2n+1)$-boyutlu alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold olsun. Eğer $M$ lokal $\phi$-

simetrik ise o zaman $M$ manifoldu $-\varepsilon\alpha^2$ sabit eğriliğine sahiptir.

**İspat** Hipotez gereğince, $M$ lokal $\phi$-simetrik olduğundan (17) eşitliği yardımıyla

$$0 = \alpha^3\varepsilon[g(X,W)\phi^2 Y - g(Y,W)\phi^2 X] - \alpha\phi^2(R(X,Y)W)$$

yazılır. Keyfi vektör alanları $Çek\eta$ cümlesinde tanımlı olduklarından yukarıdaki denklem

$$0 = \alpha^3\varepsilon[g(Y,W)X - g(X,W)Y] + \alpha(R(X,Y)W)$$

haline dönüşür. Bu son denklem düzenlenirse manifoldun sabit eğriliğinin $-\varepsilon\alpha^2$ olduğu görülür. Bu da ispatı sonlandırır.

**Teorem 4.4** $(2n+1)$-boyutlu bir $M$ alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldunun $\eta$-Einstein manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$S(X,Y) = \lambda_1 g(X,Y) + \lambda_2\eta(X)\eta(Y)$$

denklemi için $\lambda_1 = \frac{r+2n\varepsilon\alpha^2}{2n}$ ve $\lambda_2 = -\frac{\varepsilon r+2n(2n+1)\alpha^2}{2n}$ fonksiyonlarının mevcut olmasıdır. Burada $r$, manifoldun skaler eğriliğidir.

**İspat** (18) eşitliğinde $Y$ yerine $\xi$ vektör alanını alırsak

$$S(X,\xi) = \lambda_1\varepsilon\eta(X) + \lambda_2\eta(X)$$

Bulunur. Ayrıca, (15) eşitliği ile bu son eşitlik birlikte hesaba katılırsa

$$-2n\alpha^2 = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2 \tag{19}$$

elde edilir. Bundan başka, (18) eşitliğine kontraksiyon yapılırsa

$$r = \lambda_1(2n+\varepsilon) + \varepsilon\lambda_2 \tag{20}$$

bulunur. (19) ve (20) eşitlikleri yardımıyla

$\lambda_1 = \frac{r}{2n} + \varepsilon\alpha^2$ ve $\lambda_2 = -\left(\frac{\varepsilon r}{2n} + (2n+1)\alpha^2\right)$

hesaplanır. Son olarak, (18) eşitliği göz önüne alındığında ispat iki taraflı olarak aşikardır.

**Teorem 4.5** $(2n+1)$-boyutlu bir $M$ alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldunun Einstein manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$S(X,Y) = -2n\alpha^2\varepsilon g(X,Y) \tag{21}$$

şartının sağlanmasıdır.

**İspat** $M$ bir Einstein manifoldu olsun. O zaman

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y) \tag{22}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\lambda$, düzgün bir fonksiyondur. (22) denkleminde $Y = \xi$ için (15) eşitliği yardımıyla

$$-2n\alpha^2 = \lambda\varepsilon$$

bulunur. Bu son eşitlikten ispat açık olarak görülür. Burada $\varepsilon^2 = 1$ dir.

**Önerme 4.1** $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold $M$ olsun. Bu durumda $M$ manifoldunun her $Y \in Çek\eta$ vektör alanına göre belirlenen $\xi$-kesit eğriliği $-\varepsilon\alpha^2$ dir.

**İspat** Her $Y \in Çek\eta$ için $\xi$-kesit eğriliği formülü ve (14) eşitliği kullanılırsa

$$K(\xi,Y) = \frac{-\varepsilon^2\alpha^2 g(Y,Y)}{\varepsilon g(Y,Y)}$$

elde edilir ki bu da istenen sonuçtur.

**Önerme 4.2** $(2n+1)$-boyutlu bir $M$ alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldu her keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned}\phi R(X,Y)W - R(X,Y)\phi W = \\ -\varepsilon\alpha^2[-g(X,W)\phi Y + g(Y,W)\phi X - \\ g(\phi X,W)Y + g(\phi Y,W)X]\end{aligned} \tag{23}$$

ve

$$R(X,Y)W = R(\phi X,\phi Y)W \tag{24}$$

$$\begin{aligned}-\varepsilon\alpha^2[-g(X,W)Y + g(Y,W)X \\ - g(\phi Y,W)\phi X\ g(\phi X,W)\phi Y]\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

**İspat** (11) eşitliği yardımıyla elde edilen

$$\eta(R(X,Y)W) = \alpha^2[\eta(Y)g(X,W) - \eta(X)g(Y,W)]$$

denkleminin bir sonucu olarak

$$R(X,Y)W = \alpha^2[g(X,W)Y - g(Y,W)X] \tag{25}$$

dır. (25) eşitliği kullanılarak

$$R(X,Y)\phi W - \phi R(X,Y)W$$

farkını hesapladığımızda (23) eşitliğine ulaşırız. Benzer olarak,

$$R(\phi X, \phi Y)W - R(X,Y)W,$$

ifadesinden (24) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Önerme 4.3** $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo metrik manifold $M$ olsun. Bu durumda her $Y \in Çek\eta$ vektör alanına göre belirlenen $\phi$-kesit eğriliği için

$$K(Y, \phi Y) = \alpha^2 \left[ \left( \frac{g(\phi X, X)}{g(X,X)} \right)^2 - 1 \right]$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat** (25) eşitliğinden

$$R(\phi Y, Y, Y, \phi Y) = \alpha^2 [g(\phi Y, Y) g(Y, \phi Y) - g(Y,Y) g(\phi Y, \phi Y)]$$

yazılır. Her $Y \in Çek\eta$ için yukarıdaki denklemle birlikte $\phi$-kesit eğriliği formülü hesaba katılırsa

$$K(Y, \phi Y) = \frac{\alpha^2 [g(\phi X, X)^2 - g(X,X)^2]}{g(X,X)^2}$$

bulunur. Bu da istenen sonuçtur.

**Örnek 4.1** 3-boyutlu $M \subset {R_1}^3$ manifoldu,

$$M = \{(x,y,z) \in {R_1}^3 : z \neq 0\}$$

cümlesi ile verilsin. $M$ üzerinde bir taban ise

$$E_1 = e^{2z^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), E_2 = e^{2z^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$E_3 = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

şeklinde seçilsin.

Ayrıca, $M$ üzerindeki metrik tensör de

$$g = (\frac{1}{e^{4z^2}})(\varepsilon_1 dx^2 + \varepsilon_2 dy^2) + \varepsilon_3 dz^2$$

biçiminde tanımlansın. Burada aşikar olarak,

$$\phi(\xi) = 0, \phi(E_1) = E_2, \phi(E_2) = -E_1$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X) E_3, \qquad \eta(X) = \varepsilon g(E_3, X)$$

$$\eta(E_3) = g(E_3, E_3) = \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_i = g(E_i, E_i), \qquad i = 1,2,3$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \varepsilon \eta(X) \eta(Y)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $M$ bir hemen hemen değme pseudo metrik yapıya sahiptir. O halde bu yapının hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik yapıda olduğunu söylemeliyiz. Bu durumda $M$ üzerinde $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ denklemlerinin geçerli olduğunu göstermeliyiz. $\eta = dz$ olduğundan $d\eta = 0$ olduğu aşikardır. Bundan başka, $\Phi(e_1, e_2) = -\varepsilon_i$ olmak üzere,

$$\Phi = -\varepsilon_i \frac{1}{e^{4z^2}} (dx \wedge dy)$$

bulunur. Buradan

$$d\Phi = -2\varepsilon_i 4z(\eta \wedge \Phi)$$

elde edilir. Burada Nijenhuis tensör alanı özdeş olarak sıfır olduğundan manifoldumuz normal olup alfa Kenmotsu pseudo metrik yapıdadır. Bu örnekte alfa fonksiyonu sabit olmayan düzgün bir fonksiyon olarak alınmıştır.

## 4. Tartışma ve Sonuç

Bu makalede, alfa Kenmotsu pseudo metrik manifoldlarla ilgili bazı sonuçlar bulunmuştur. Özellikle bu tür manifoldlar için bazı eğrilik özellikleri araştırılmıştır. Bu çalışmadaki asıl amacımız gelecek çalışmalarda planladığımız hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo metrik yapı üzerindeki incelemelerimize başlangıç teşkil etmesidir.

**Teşekkür**

Bu çalışma, Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 17.FEN.BİL.11 numaralı proje ile desteklenmiştir. Ayrıca, yapıcı yorumları ve katkılarından dolayı saygıdeğer hakemlere teşekkür ederiz.

## 5. Kaynaklar

Alegre, P., 2011. Semi invariant submanifolds of Lorentzian Sasakian manifolds. *Demonstratio Mathematica,* **44**, 391–406.

Calvaruso, G., 2011. Contact Lorentzian manifolds. *Differential Geometry and its Applications,* **29**, 541–551.

Calvaruso, G. and Perrone, D., 2010. Contact pseudo-metric manifolds. *Differential Geometry and its Applications,* **28**, 615–634.

Dileo, G. and Pastore, A. M., 2009. Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η-parallelism. *Differential Geometry and its Applications*, **27**, 671–679.

Duggal, K.L., 1990. Space time manifolds and contact structures. *Internat. J. Math. & Math. Sci*, **13**, 545–554.

Kenmotsu, K., 1972. A class of contact Riemannian manifold, *Tôhoku Math. Journal,* **24** , 93–103.

O'Neil, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, New York.

Öztürk, H., 2016. On Almost α-Kenmotsu Manifolds with Some Tensor Fields, *AKU J. Sci. Eng.*, **16**, 256–264.

Öztürk, H., Aktan N. and Murathan C., 2010. On α-Kenmotsu manifolds satisfying certain conditions. *Applied Sciences*, **12**, 115–126.

Perrone, D., 2014. Contact pseudo-metric manifolds of constant curvature and CR geometry. *Results in Mathematics,* **66**, 213–225.

Takahashi, T., 1969. Sasakian manifold with pseudo-Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. Journal*, **21**, 271–290.

Yano, K. and Kon, M., 1984, Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

Wang, Y. and Liu, X., 2016. Almost Kenmotsu pseudo-metric manifolds. *Analele Stiintifice ale Universitatii Al I Cuza din Iasi - Matematica,* **62**, 241–256.