Osmanlı Bilimi Araştırmaları, XV/1 (2013): 96-107

VİDİNLİ TEVFİK PAŞA TARAFINDAN *MEBÂHİS-İ İLMİYE'*DE YAYIMLANAN LOGX VE ARCTANX FONKSİYONLARININ TÜREVLERİNE VE SERİYE AÇILIMLARINA DAİR MAKALE VE DEĞERLENDİRİLMESİ

Ayşe Kökcü[*]

Vidinli Tevfik Paşa 1868 yılında *Mebâhis-i İlmiye*'nin ikinci cildinin 171-179 sayfaları arasında "*Logx ve kavs-i mümâs x'in müştaklarına ve bunların silsileye tevsi'lerine dair ruhban sınıfından Mösyö Sofle'in hâşiyesi*" başlığıyla logx (10 tabanında logaritma x) ve arctanx'in (ters tanjant x fonksiyonu) türevlerinin ve seriye açılımlarının bulunuşunu anlatan bir makale yayımlamıştır. Tevfik Paşa, makalenin kaynağını dipnotta *Nouvelles Annales de Mathématiques*[1] adlı Fransız dergisinin 438'inci sayfası olarak vermiştir.

Makalede, Tevfik Paşa'nın ruhban sınıfından Mösyö Sofle olarak ifade ettiği zat, Abbé Soufflet'tir.[2] Söz konusu makale Soufflet'nin *Nouvelles Annales de Mathématiques'*te 1853 yılında yayımlanan "Note sur les dérivées de Log *x* et arc tang *x* et sur leur dévéloppments en série" başlıklı makalesidir.[3] Bu çalışmamızda, "logx ve arctanx'in türevlerinin bulunması ve seriye açılımları daha önce Osmanlı matematikçileri tarafından incelenmiş miydi?" sorusuna cevap aradık. Bu doğrultuda modern matematiği Osmanlı'ya ilk defa tanıtan matematikçi İshak Hoca'dan başladık.

İshak Hoca'nın 1831 yılında basılan *Mecmûa-ı Ulûm-ı Riyâziyye'*si, Osmanlı'da diferansiyel ve integral hesaptan bahseden ilk eserdir. Eserin ikinci cildinin üçüncü babında sinx ve cosx'in diferansiyellerinin bulunması anlatılmış, fakat ne arctanx'in türevinden ne de bu fonksiyonun seriye açılımından söz edilmiştir.[4] Dördüncü babında ise logx'in diferansiyeli verilmiştir. İshak Hoca logx'in türevinin aritmetik ve geometrik serilerin

---

* Dr., ceydayse@hotmail.com

1 *Nouvelles Annales de Mathématiques* adlı dergi, École Polytechnique ve École Normale'in sınavlarına hazırlanan öğrenciler için Paris'te 1842 yılında yayımlanmaya başlayan bir dergidir (Bkz. Feza Günergun "Matematiksel Bilimlerde İlk Türkçe Dergi: Mebahis-i İlmiye (1867-69)", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, VIII/2, 2007, s. 9-10).

2 Abbé Soufflet, Rennes'de St-Vincent kolejinde matematik öğretmenliği yapmıştır ve doktora tez konusu analitik geometri üzerinedir (Bkz. Feza Günergun, *a.g.m.*, s. 36-37).

3 Feza Günergun, *a.g.m.*, s. 36.

4 Hoca İshak Efendi, *Mecmûa-i Ulûm-ı Riyâziyye*, C. 2, Bulak Matbaası, Mısır, 1260/1845, s. 261-264.

kullanımıyla nasıl bulunduğunu izah etmiştir.[5] Tevfik Paşa'nın *Mebâhis-i İlmiye*'de yayımladığı Soufflet'den çeviride ise logx'in türevi ve seriye açılımı Maclaurin Serisi yardımıyla bulunmuştur.

İshak Hoca fonksiyonların diferansiyeline karşılık gelen tefâzül kelimesini kullanmış, türeve karşılık gelen müştakk kelimesini kullanmamıştır. İshak Hoca'nın eseri Mühendishâneler'de ve Mekteb-i Harbiye'de uzun yıllar ders kitabı olarak okutulmuştur.

Türev konusunun bahsedildiği (tespit edebildiğimiz) en eski tarihli ikinci eser, Vidinli Tevfik Paşa'nın *Zeyl-i Usûl-i Cebr* eseridir. Bu eserle İshak Hoca'nın eseri arasında türev konusunda yazılmış herhangi bir kitaba ya da yayına rastlayamadık. Birinci baskısı Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye Matbaası'nda 1278/1861 yılında yapılan *Zeyl-i Usul-i Cebr*'de serilerle ilgili bir bölüm bulunmaktadır. Tevfik Paşa, bu bölümün ilk başlığı olan "fonksiyonların seriler şeklinde yazılması" başlığı altında logx, a^x , sinx ve cosx'in seriye açılımlarını göstermiştir. Tevfik Paşa, logx'in seriye açılımını *Mebâhis-i İlmiye*'de Soufflet'den aldığı gibi Maclaurin serisini kullanarak yapmıştır.

sinx, cosx ve tanx'in ters fonksiyonlarının türevlerinin, trigonometrik fonksiyonların türevleri kullanılarak nasıl bulunduğunu anlatmıştır. Şöyle ki:

" *y = arctanx fonksiyonunun türevi istenilsin. Öncelikle*

x = tan y olsun.

Buradan $\frac{dx}{dy}$ *bölümünün türevi* $\frac{1}{cos^2 y}$ *olduğundan,* $\frac{dy}{dx}$ *bölümünün türevi* $cos^2 y$ *olur ve* $y' = cos^2 y = \frac{1}{1+tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ *bulunur."*[6]

Tevfik Paşa burada ters trigonometrik fonksiyonların türevlerinin bulunuşunu vermiş ancak, seriye açılımlarını göstermemiştir.

Tevfik Paşa tarafından *Zeyl-i Usûl-i Cebr*'de logx'in türevi ve seriye açılımı da verilmiştir. Sonuç olarak; Osmanlı'da tespit edilebilen en eski diferansiyel ve integral hesap ile ilgili eserler (*Mecmûa-ı Ulûm-ı Riyâziyye (1831)* ve *Zeyl-i Usûl-i Cebr* (1861-62)) dikkate alındığında, arctanx'in türevi ve seriye açılımı ilk defa *Mebâhis-i İlmiye*'de yayımlanan bu makale ile gösterilmiş diyebiliriz.

Vidinli Tevfik Paşa'nın *Mebâhis-i İlmiye*'de 1868 yılında yayımladığı makalenin bölümlerinin transliterasyonu ve günümüz Türkçesine çevirisi art arda aşağıda verilmiştir:

---

[5] Hoca İshak Efendi, s. 264-269.

[6] Vidinli Hüseyin Tevfik, *Zeyl-i Usûl-i Cebr,* Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye Matbaası, İstanbul, 1284/1867-68.

Log*س *ve kavs-i mümâs* س*in müştaklarına ve bunların silsileye tevsi'lerine dair ruhban sınıfından Mösyö Sofle'in hâşiyesi [7]

(1) *Evvelâ der-hâtır oluna ki* ن *bir aded-i sahih-i müsbet olduğu halde*

$$\frac{\text{س}_{١}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{س}_{١} - \text{س}} = \text{س}_{١}^{\text{ن}-١} + \text{س}\,\text{س}_{١}^{\text{ن}-٢} + \ldots + \text{س}^{\text{ن}-١} \quad \textit{olur.}$$

Eğer $\text{س} = \text{س}_{١}$ *kılınur (yani* س *mikdârı* $\text{س}_{١}$*e takarrüb ider) ise* $\frac{\text{س}_{١}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{س}_{١} - \text{س}}$ *in hadd el-gâyesî (yani takarrüb ideceği kıymeti) veyâhûd ta'bir-i diğerle* $\text{س}^{\text{ن}}$*nin müştakı* = $\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ *olur (Çünkü* $\text{س} = \text{س}_{١}$ *oldukda müsâvât-ı mezkûrenin taraf-ı sânisinin her bir haddi* $\text{س}^{\text{ن}-١}$ *olub aded-i hudûdî dahi* ن *olmağla cem'an kıymeti* $\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ *olur). Bu takdirce* س *in müştakı* $\text{س}^{٠}$ *yâhûd* ١ *ve* $\text{س}^{٢}$ *in müştakı* ٢ س *ve umumen* $\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}}$*'in müştakı* ب $\frac{\text{س}_{١}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{س}_{١} - \text{س}}$ *nin hadd el-gâyesî veya* $\text{ن}\,\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ *olur. Ve bil-mukâbele* $\text{س}^{٠}$ *ve* س *ve* $\text{س}^{٢}$ *ve* $\text{س}^{٣}$ *ve ilh. kemmiyetleri* س *ve* $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ *ve* $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ *ve* $\frac{\text{س}^{٤}}{٤}$ *ve ilh. kemmiyetlerinden müştakk olurlar.*

Logx ve arctanx'in türevleri ve bunların seriye açılmalarına dair ruhban sınıfından Mösyö Souffle'nin hâşiyesidir.

(1) Öncelikle hatırlanmalı ki, n pozitif bir reel sayı olmak üzere,

$$\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x\,x_1^{n-2} + \cdots + x^{n-1} \text{ olur.}$$

Eğer $x_1 = x$ (yani x değeri x_1'e karşılık gelir) olur ise $\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$ in limiti (yani yaklaştığı değer) veya başka bir tabirle, x^n nin türevi = $n\,x^{n-1}$ olur ($x_1 = x$ olduğunda eşitliğin her iki tarfının her bir terimi x^{n-1} olup, terim sayısı *n* olduğundan, toplamı $n\,x^{n-1}$ olur). Bundan dolayı *x* in türevi x^0 veya *1,* x^2 in türevi *2x* ve ax^n nin türevi $a \times \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$ nin limiti veya nax^{n-1} olur. Buna karşılık x^0 , *x,* x^2, x^3,... vs. nicelikleri *x,* $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^4}{4}$,... vs. niceliklerinden türetilir.

[7] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XII, P 438.

***(2)** logx’in müştakı tarif-i mucibince* $\frac{\text{لغ}(\text{س}+\text{د}) - \text{لغ س}}{\text{د}}$ *veya* $\frac{\text{لغ}(\text{١}+\frac{\text{د}}{\text{س}})}{\text{د}}$

veya د *ile* ه *aynı zamanda asgar-ı nâmütenâhi oldukları halde* $\text{د}=\text{هس}$ *kılınarak* $\frac{\text{لغ}(\text{١}+\text{ه})}{\text{هس}}$ *ta‘birinin hadd el-gâyesi olur.*
Velâkin

....: $(\text{١}+\text{ه})^{\text{٢}} : (\text{١}+\text{ه}) : \text{١}$

....: *ve* ٢مه *ve* مه *ve* ٠ *ve*

Logaritma nisbet-i ale’l-vilâlarından ه *ne olur ise olsun logaritma ta‘rifi mûcibince*

$$\text{لغ}(\text{١}+\text{ه}) = \text{مه} \text{ olmağla}$$

$$\text{Müştakk لغ س} = \frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{\text{مه}}{\text{هس}} \text{ olur.}$$

Ve çünkü $\text{لغ}(\text{١}+\text{ه})^{\frac{\text{١}}{\text{ه}}} = \frac{\text{لغ}(\text{١}+\text{ه})}{\text{ه}} = \text{م}$ *olub bundan lâzım gelür ki* $(\text{١}+\text{ه})^{\frac{\text{١}}{\text{ه}}}$ *mikdârı* م *mübeddeli* $\text{لى} = \text{١}$ *olan logaritmanın kâidesi olub bu kâide* ى *ile iş’âr olunarak*

$$\text{لغ ى} = \text{م} \text{ olur.}$$

(Bu takdirce müştakk $\text{لغ س} = \frac{\text{لغ ى}}{\text{س}}$ *dir ve eğer logaritmanın kâidesi* ى *i‘tibâr olunur ise müştakk* $\text{لغا س} = \frac{\text{١}}{\text{س}} =$ *olur)*

(2) logx’in türevi (tanımı gereğince): $\frac{log(x+h)-logx}{h}$ veya $\frac{log(1+\frac{h}{x})}{h}$ veya h ile α sonsuz küçük düşünülürse, $h = \alpha x$ alınarak $\frac{log(\alpha+1)}{x\alpha}$ in limiti olur.

Veya

1 : (1+ α) : $(1+\alpha)^2$ *: ...,*

0 ve *k α* ve *2k α* ve ...

Logaritmanın tanımı gereğince α kadar artırılırsa

$$k\,\alpha = \log(\alpha+1) \text{ olur.}$$

$$\log x\text{'in türevi} = \frac{k\alpha}{\alpha x} = \frac{k}{x} \text{ olur.}$$

Çünkü $k = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ olur ve bundan dolayı $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ miktarı başlangıcı *k=1* olan modül logaritmik sistemin tabanı *e* ile gösterilirse,

$$k = \log e \text{ olur.}$$

(Bu durumda $\log x = \frac{\log e}{x}$ dir ve eğer logatitmanın tabanı *e* sayısı dikkate alınırsa, *In x* in türevi $\frac{1}{x}$ olur.)

---

(3) *Zâhirdir ki (س +١) لع müştakı م / (س +١) dir. Zirâ س +١ yerine ع vaz‘ olundukda sûret-i sâbıka hâsıl olur. Velâkin ١ in ١+س e sâde taksimî ile bulunur ki (س +١) لع nin müştakı م / (س +١) = (…+ س٣ - س٢ + س - ١) م olur. Ve bil-mukabele (…+ س٤/٤ − س٣/٣ + س٢/٢ − س/١) م = (س +١) لع olur.*

Kaldı ki kemmiyet-i mütehavvilenin kıymet-i vâhidden a‘zam oldukda silsile-i mezburenin daha ziyâde mütekaribe olan bir diğer silsileye tahvîli ma‘lumdur. Ve bu da ١=م farz olunarak لعا٢ ve ba‘de لعا٤ ve لعا٥ ve bundan لعا ١٠ hesâb olunub bundan dahî kâidesi ١٠ olan logaritma usûlünde م mübeddelinin kıymeti olarak ١ / لعا١٠ bulunur. (Çünkü ١=م farzıyla ١٠ adedinin logaritması ١٠ لعا ile iş‘ar olundukda her hangi kâideye nazaran م لغا١٠ = لع١٠ veya

لع١٠ / م لعا١٠ = م

olub لع١٠ nin kâidesi ١٠ farz olundukda bi-t-tab‘ ١ / لعا١٠ = م olur)

(3) *log(x+1)*in türevi $\frac{k}{(x+1)}$ dir. *(x+1)* yerine *y* konulduğunda ise *logy* eski şeklini alır. *1* in *1+x*'e bölümü ile *log(x+1)* in türevi, $\frac{k}{(x+1)}$ = *k (1-x+*x^2 *-*x^3*+...)* olur. Ve bundan dolayı

$$log\ (x+1) = k(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...) \text{ olur.}$$

Değişken niceliklerin tek bir değerden büyük olduğu durumda, bir serinin yakınsak olan bir diğer seriye dönüşümü gerçekleşebilir.

k = 1 kabul edilerek ln_2, ln_4, ln_5 ve bunlardan ln_{10} hesaplanabilir. Tabanı *10* olan logaritmada *h*'in değeri olarak $\frac{1}{ln10}$ bulunur. (Çünkü *k = 1* kabul edilirse, *10* sayısının logaritması ln_{10} ile gösterilir ve herhangi bir tabana nazaran log_{10} = *h* ln_{10} veya

$$k = \frac{log10}{ln10}$$

olup, *log10* un tabanı *10* kabul edilirse $k = \frac{1}{ln10}$ olur.)

---

(4) $$\frac{ceyb\text{س}}{tamâm\!-\!ı\ ceyb\ \text{س}} - \frac{ceyb\ \text{س،}}{tamâm\!-\!ı\ ceyb\ \text{س،}} = mümâs\ \text{س} - mümâs\ \text{س،}$$

$$= \frac{ceyb\ (\text{س} - \text{س،})}{tamâm\!-\!ı\ ceyb\ \text{س،}\ tamâm\!-\!ı\ ceyb\ \text{س}}$$

olmağla س *kavsinin kendi mümâsına nazaran müştakı veya*

$$\frac{\text{س} - \text{س،}}{mümâs\ \text{س} - mümâs\ \text{س،}} \text{ nin hadd el-gâyesi}$$

$tamâm - ı\ ceyb\ \text{س،}\ tamâm - ı\ ceyb\text{س}\ \ x\ \frac{(\text{س} - \text{س،})}{ceyb\ (\text{س،} - \text{س})}$ *in hadd el-gâyesi olub*

bu da = *tamâm-ı ceyb*$^{\text{٢}}$ س $= \frac{\text{١}}{kat'^{\text{٢}}\ \text{س}}$ *ve mümâs* س *yerine* ع *vaz'iyle* $= \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{ع}^{\text{٢}}}$

olur.

(4) *tan* x_1*-tan x* $= \frac{sin\, x_1}{cosx_1} - \frac{sinx}{cosx} = \frac{sin(x_1 - x)}{cosx_1 - cosx}$ olursa, *x* yayının kendi tanjantına nazaran türevi veya limiti;

$$lim \frac{x_1 - x}{tanx_1 - tanx} \text{ olur.}$$

$$\frac{x_1 - x}{sin\ (x_1 - x)} \times cosx_1 cosx = cos^2 x = \frac{1}{sec^2 x} = \frac{1}{1+u^2} \text{ olur.}$$

(5) $\text{١}i\ \text{١} + \text{ح}^{\text{٢}}$ *ile taksîm iderek müştak-ı mezbûr*

$\ldots + \text{ح}^{\text{٦}} - \text{ح}^{\text{٤}} + \text{ح}^{\text{٢}} - \text{١}$ *olmağla bil-mukabele* ح *mümâsının kavsi veya* س

$$\ldots + \frac{\text{ح}^{\text{٧}}}{\text{٧}} - \frac{\text{ح}^{\text{٥}}}{\text{٥}} + \frac{\text{ح}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \text{ح}$$

(veya $\text{س} = \ldots + \frac{\text{mümâs}\ \text{س}^{\text{٥}}}{\text{٥}} + \frac{\text{mümâs}\ \text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \text{mümâs}\ \text{س}$ *) olur.*

Eğer $\text{ح} = \frac{\text{١}}{\text{٥}}$ *kılınur ise silsile-i mezbûre* ح *mümâsına mukabil bir* و *kavsinin kıymetini virüb velakin mümâs* $\text{٢و} = \frac{\text{٥}}{\text{١٢}}$ [8] *ve mümâs* $\text{٤و} = \frac{\text{١٢٠}}{\text{١١٩}}$ *ve mümâs* $(\frac{\pi}{\text{٤}} - \text{و}\ \text{٤}) = \frac{\text{١}}{\text{٢٣٩}}$ *olmağla eğer* $\frac{\text{١}}{\text{٢٣٩}} = \text{ح}$ *vaz'olunur ise silsile-i sâbıka*

$\frac{\pi}{\text{٤}} - \text{٤و}$ *kavsinin kıymetini i'ta ider.*

İmdî

$$\text{kavs-i mümâs}\ \frac{\text{١}}{\text{٢٣٩}} - \text{٤}\ \text{kavs} - \text{i mümâs}\ \frac{\text{١}}{\text{٥}}\ \text{yahûd}$$

$$(\ldots + \frac{\text{١}}{\text{٥}^{\text{٥}} x\, \text{٥}} - \frac{\text{١}}{\text{٥}^{\text{٣}} x\, \text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٥}})\ \text{٤} = \frac{\pi}{\text{٤}}$$

$$(\ldots + \frac{\text{١}}{\text{٢٣٩}^{\text{٣}} x\, \text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٢٣٩}}) -$$

olur. (Silsile-i mezbûre π *nin hesâbı için gâyet mütekârîbe bir silsile olub diğer vecihle dahî isbâtları vardır)*[9].

(5) *1'i 1+*u^2 ile bölersek, bulunmak istenilen türev,

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \ldots \text{ olursa, } \mathit{arctan}\ u \text{ veya } x,$$

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \ldots$$

$$(\text{veya } x = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^7 x}{7} + \ldots) \text{ olur.}$$

---

8 $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (Mebâhis-i İlmiye, s. 177).

9 *Mebâhis-i İlmiye*, Cilt 2, İstanbul 1285/1868-1869, s. 171-179.

Eğer $u = \frac{1}{5}$ kabul edilirse, yukarıdaki seride *tan u*'ya karşılık bir α yayının değeri;

$$tan2\alpha = \frac{5}{12}, \; tan4\alpha = \frac{120}{119},$$

$$tan\ (4\ \alpha\text{-}\ \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239} \text{ olur.}$$

Eğer $u = \frac{1}{239}$ kabul edilirse, yukarıdaki seride;

$$4\ \alpha\text{-}\ \frac{\pi}{4} \text{ yayının değeri bulunur.}$$

$$4\ arc\ tan\ \frac{1}{5} \text{ - } arc\ tan\ \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\ (\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} - \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots) - (\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots) \text{ olur.}$$

Değerlendirme

Vidinli Tevfik Paşa tarafından 1868 yılında *Mebâhis-i İlmiye*'de yayımlanan yukarıdaki makale; Abbé Soufflet'in *Nouvelles Annales de Mathématiques* isimli Fransız dergisinin 12. sayısında 1853 yılında yayımladığı makalenin çevirisidir. Makalede logx'in ve arctanx'in türevleri ve seriye açılımları verilmiştir. logx ve arctanx'in seriye açılımları Maclaurin Serisi yardımıyla bulunmuştur.

Makalenin Osmanlı dönemi matematiği açısından önemi, arctanx'in türevi ve seriye açılımının ilk defa *Mebâhis-i İlmiye*'de yayımlanan Vidinli'nin makalesiyle gösterilmiş olmasıdır.[10]

Makalenin transliterasyonunu verirken Vidinli Tevfik Paşa'nın matematiksel gösterimlerini aynıyla vermeyi uygun bulduk. Böylece, logaritmanın (log) gösterimi için لغ işaretini, doğal logaritma fonksiyonu olan ln'in gösterimi için لعا işaretini kullandığını görüyoruz.[11] Ayrıca, ters trigonometrik fonksiyon 'arc' için قوس kavs kelimesini kullanmıştır.

[10] Osmanlı dönemi matematiğinde (Mühendishâneler ve Mekteb-i Harbiye'de yazılmış matematik eserleri başta olmak üzere) yapmış olduğumuz araştırma neticesinde, İshak Hoca ile Vidinli Tevfik Paşa arasında türevle ilgili eseri olan herhangi bir şahsa rastlayamadık.

[11] İshak Hoca logaritma için herhangi bir işaret kullanmamıştır.

EK *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome 12 (1853), p. 438-441.

NOTE SUR LES DÉRIVÉES DE LOG x ET ARC TANG x ET SUR LEURS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE;

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET,
Professeur, docteur ès sciences mathématiques.

1°. Rappelons d'abord que

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \ldots + x^{m-1},$$

m étant entier et positif. Si l'on fait $x_1 = x$, ou aura, limite de $\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou dérivée de $x^m = mx^{m-1}$. Ainsi la dérivée de x sera x^0 ou 1, celle de x^2 sera $2x$, et en général celle de ax^m sera limite de $a \times \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou max^{m-1}. Réciproquement, x_0, x, x^2, x^3, etc., *dériveront* respectivement de x, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^4}{4}$.

2°. La dérivée de $\log x$ est, par définition, la limite de

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h}, \text{ ou de } \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}, \text{ ou de } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x},$$

si l'on fait $h = \alpha x$, α et h étant infiniment petits en même temps.

Or les progressions logarithmiques

$$\begin{array}{l} 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 \ldots, \\ 0 \;.\; k\alpha \;.\; 2k\alpha \ldots, \end{array}$$

donnent, par *définition*,

$$k\alpha = \log(1+\alpha),$$

(439)

quel que soit α; donc la dérivée de

$$\log x = \frac{k\alpha}{\alpha x} = \frac{k}{x};$$

puisque nous avons

$$k = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

il s'ensuit que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est la base du système logarithmique dont le module $k = 1$, et en la désignant par e, nous aurons

$$k = \log e.$$

3°. Il est évident que la dérivée de $\log(1+x)$ est $\frac{k}{1+x}$, puisque, en remplaçant $1+x$ par y, on serait ramené au cas précédent. Or, une simple division de 1 par $1+x$ donne

$$\frac{k}{1+x} = k(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$$

pour dérivée de $\log(1+x)$; donc, réciproquement,

$$\log(1+x) = k\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Du reste, on sait transformer cette série en une autre très-convergente pour une valeur quelconque de la variable plus grande que l'unité. En supposant $k = 1$, on calculera donc $l\,2$, et, par suite, $l\,4$, $l\,5$; d'où l'on déduira $l\,10$ et $\frac{1}{l\,10}$ pour valeur numérique du module k dans le système dont la base est 101. Le module une fois connu, la même série donnera les logarithmes vulgaires.

Remarque. Il semble peu naturel de définir le nombre e par le binôme $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ considéré seul en dehors des

(440)

progressions logarithmiques et de le calculer d'avance. Nous préférons la marche précédente, puisque l'on évite ainsi d'employer les séries avant les dérivées. (Voir *les Dérivées et les séries simplifiées*; chez Mallet-Bachelier.)

4°. On a

$$\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x_1 - x)}{\cos x_1 \cos x};$$

donc la dérivée de l'arc x par rapport à tang x ou la limite de $\dfrac{x_1 - x}{\operatorname{tang} x_1 - \operatorname{tang} x}$ égale la limite de

$$\frac{x_1 - x}{\sin(x_1 - x)} \times \cos x_1 \cos x = \cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + u^2},$$

tang x étant remplacée par u.

5°. En divisant 1 par $1 + u^2$, cette dérivée devient

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \ldots.$$

Donc réciproquement l'arc tang u ou x égale

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \cdots$$

Si l'on fait $u = \frac{1}{5}$, cette série donnera la valeur d'un arc α correspondant; mais

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tang} 4\alpha = \frac{120}{119},$$

et

$$\operatorname{tang}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239},$$

et si l'on pose

$$u = \frac{1}{239},$$

la série précédente donnera la valeur de

$$4\alpha - \frac{\pi}{4};$$

(441)

donc

$$4 \operatorname{arc tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc tang} \frac{1}{139},$$

ou

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} - \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

Kaynaklar

- Günergun, Feza "Matematiksel Bilimlerde İlk Türkçe Dergi: Mebahis-i İlmiye (1867-69)", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, VIII/2, 2007.
- Hoca İshak Efendi, *Mecmûa-i Ulûm-ı Riyâziyye*, C. 2, Bulak Matbaası, Mısır, 1260/1845, s. 261-264.
- *Mebâhis-i İlmiye*, Cilt 2, İstanbul 1285/1868-1869, s. 171-179.
- Stewart, James, *Calculus Concepts and Contexts*, Thomson Brooks/Cole, ABD, 2006.
- Vidinli Hüseyin Tevfik, *Zeyl-i Usûl-i Cebr,* Üçüncü Baskı, Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye Matbaası, İstanbul, 1284/1867-68.
- L'Abbé Soufflet, "Notes sur les dérivées de log *x* et arc tang *x* et sur leurs développements en série," *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome 12 (1853), p.438-441.

The article published by Vidinli Tevfik Pasha in the journal *Mebâhis-i İlmiye* on the derivatives and series expansions of Logx and Arctanx functions, and its evaluation

In 1868, Vidinli Hüseyin Tevfik Pasha published an article in the journal of *Mebâhis-i İlmiye*, titled "*Postscript of Monsieur Sofle which was about derivatives and series expansions of logx and arctanx*". This article is the translation of the article which Abbé Soufflet published in the journal of *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 12 volume in 1853.

In this paper, I could do an assessment about how derivatives and series expansions of logx and arctanx were introduced into the mathematics of Ottoman period. And thus, I tried to indicate why Vidinli's article is significant for the mathematics of Ottoman period.

Key words: Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa, *Mebâhis-i İlmiye*, the mathematics of Ottoman period, logx, arctanx.

Vidinli Tevfik Paşa Tarafından *Mebâhis-i İlmiye'*de Yayımlanan Logx ve Arctanx Fonksiyonlarının Türevlerine ve Seriye Açılımlarına Dair Makale ve Değerlendirilmesi

Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa 1868 yılında *Mebâhis-i İlmiye*'de "*Logx ve kavs-i mümâs x'in müştaklarına ve bunların silsileye tevsi'lerine dair ruhban sınıfından Mösyö Sofle'in hâşiyesi"* adlı bir makale yayımlamıştır. Bu makale, Abbé Soufflet'in *Nouvelles Annales de Mathématique* isimli Fransız dergisinin 12. sayısında 1853 yılında yayımladığı makalenin çevirisidir. Makalede logx'in ve arctanx'in türevleri ve seriye açılımları verilmiştir.

Burada logx ve arctanx'in türevleri ve seriye açılımlarının Osmanlı dönemi matematiğine nasıl girdiği hakkında bir değerlendirme yapılmaya çalışılmıştır. Böylece Vidinli'nin yayımlamış olduğu bu makalenin Osmanlı dönemi matematiği açısından değerinin ortaya konulmasına gayret edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa, *Mebâhis-i İlmiye*, Osmanlı dönemi matematiği, logx, arctanx.