

SİMETRİK VE FARKLI ORYANTASYON AÇILARINA SAHİP TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ

Mustafa Oğuz NALBANT¹, Ayla TEKİN²

Accepted: 2020-12-15

DOI: 10.47118/somatbd.825928

ÖZET

Bu çalışmada, simetrik ve farklı oryantasyon açlarına sahip iki tabakalı kompozit kirişlerin dinamik analizi numerik olarak incelenmiştir. İlk kısımda gerçek boyutlara sahip tabakalı kirişin sonlu elemanlar metodu ile analitik çözüm yapılmıştır. Analitik çözümde kiriş Euler-Bernoulli kiriş teorisi kirişi kabul edilmiştir. İkinci kısımda ise sistem sönümsüz serbest titreşime maruz bırakılarak dinamik analizi yapılmıştır. Sistemin numerik analizi için matematik analiz programı olan MATLAB program dili kullanılmıştır. İki tabakalı çeşitli sınır şartlarına sahip kirişlerin; farklı açılarda ve uzunluk-kalınlık oranlarında doğal frekansları elde edilmiştir. Tabakalı kompozit kirişlerde büyük genlikli titreşimler oldukça etkilidir. Bu sebeple frekanslar ilk sekiz mod için tablo haline getirilip yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Elemanlar, Kompozit Malzeme, Dinamik Analiz, Doğal Frekans

DYNAMIC ANALYSIS OF LAYERED COMPOSITE BEAMS WITH SYMMETRIC AND DIFFERENT ORIENTATION ANGLES

ABSTRACT

In this study, the dynamic analysis of two-layer composite beams with symmetric and different orientation angles was analyzed analytically and numerically. In the first part, the analytical solution of the layered beam with real dimensions has been made using the finite element method. In the analytical solution, the beam is accepted based on the Euler-Bernoulli beam theory. In the second part, Natural frequencies of two-layered which have various boundary conditions layered beams were obtained at different angles and length-thickness ratios using the MATLAB program language, which is a mathematical analysis program. Large amplitude vibrations are quite effective in laminated composite beams. For this reason, the frequencies were tabulated and interpreted for the first eight modes.

Keywords: Finite Elements, Composite Material, Vibration, Dynamic Analysis, Natural Frequency

¹ Öğr. Gör., Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Soma Meslek Yüksekokulu, mustafa.nalbant@cbu.edu.tr, Soma, Manisa, Türkiye.

² Dr. Öğr. Üyesi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Soma Meslek Yüksekokulu, ayla.tekin@cbu.edu.tr, Soma, Manisa, Türkiye.

1. GİRİŞ

Mühendislik malzemeleri dört ana başlıkta toplanır. Bunlar metaller, polimerler, seramikler ve kompozitlerdir. Kompozit malzemeler, diğer üç sınıflandırmanın kendi araların makroskobik boyutta birleşmesinden oluşan malzemeler olarak tanımlanabilir. Kompozit malzemeler cam, boron ve grafit gibi yüksek dayanımlı ince liflerin epoksi reçine gibi bağlayıcı bir matris malzeme içine yerleştirilmesi ile değişik üretim yöntemleri kullanılarak elde edilirler. Matris içinde lifler kısa-uzun, sürekli-sürekli ya da çok yönlü yerleşmiş olabilir. İzotropik malzemelere kıyasla kompozit malzemeler; hafiflik, yüksek dayanım, yorulma mukavemeti ve korozyon dirençleri de daha iyidir.

Liflerin çekme dayanımlarının yüksek olmasına rağmen birkaç dezavantajı da vardır. Basınç yüklerini taşıyamazlar ve eksene dik yöndeki mekanik özellikleri kendi eksenleri doğrultusundaki özellikleri gibi iyi değildir. Bu nedenden dolayı lifler bir araya getirilip bir matris malzeme ile desteklenmelidirler. Düşey yönde dayanım artışı zorlanma durumuna göre liflerin düz veya çapraz uygun biçimde yönlendirilmesi ile elde edilir (Atilla G. Ve Caglioglu H, 2011).

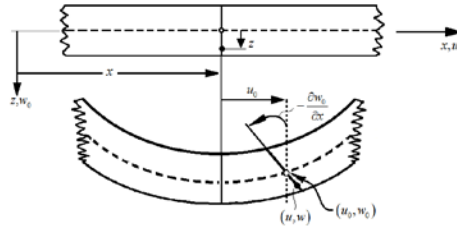
Kompozit malzemelerle ilgili (Lurie K.A., Guigen Z., Helen L., Sachin M., Min W. 2020, Cherkaev A.V. 2018, ve D.D.L. Chung, 2018) gibi farklı alanlarda yapılan akademik çalışma mevcuttur. Kompozit kirişlerin titreşim analizi de (K.M.A. Hossain, S. Hasib, T. Manzur, Alimirzaei S., Mohammadimehr M., Abdelouahed T. 2020 ve Farzad E., Ali D. 2018) gibi yine birçok araştırmacı için konu olmuş ve olmaya devam etmektedir.

Bu çalışmada, simetrik ve farklı oryantasyonlar açılarında sahip iki tabakalı kompozit kirişlerin titreşim analizi analitik ve numerik olarak incelenmiştir. İlk kısımda gerçek boyutlara sahip tabakalı kirişin sonlu elemanlar metodu ile analitik çözümü yapılmıştır. Analitik çözümde kiriş Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayalı kabul edilmiştir. İkinci kısımda ise matematik analiz programı olan MATLAB program dili kullanılarak iki tabakalı çift taraflı çeşitli sınır şartlarına sahip kirişlerin; simetrik ve farklı oryantasyonlar açılarında ve uzunluk-kalınlık oranlarında doğal frekansları elde edilmiştir. Tabakalı kompozit kirişlerde büyük genlikli titreşimler oldukça etkilidir. Bu sebeple frekanslar ilk sekiz mod için tablo haline getirilip yorumlanmıştır.

2. KLASİK KİRİŞ TEORİSİ

Euler Bernoulli kiriş teorisi olarak ta bilinen klasik kiriş teorisi, enine kesme deformasyonunu ve normal gerinim etkilerini ihmal eder (Atilla O., Emrah M. 2012).

\mathcal{E} gerinim ile u aksenal yer değiştirme arasındaki bağıntı şu şekilde verilir,



Şekil 1. Euler Bernoulli Kiriş Teorisi

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Eksenel yer değiştirme u ile kesitin θ dönüşü arasındaki ilişki (Wang, C.M., Reddy, J.N., Lee, K.M. 2000),

$$du = -z d\theta \quad (2)$$

Kiriş w sapması ile kesit dönüşü θ arasındaki ilişki şu şekilde yazılabilir (Petyt, M. 1990),

$$\theta \cong \frac{dw}{dx} \quad (3)$$

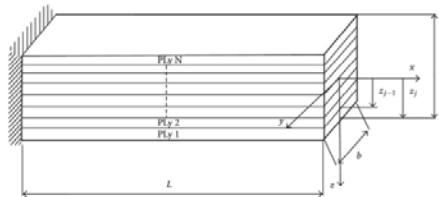
Denklem (3) ve (2), denklem (1)'de yerlerine yazılırsa(Petyt, M. 1990),

$$\varepsilon = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4)$$

Elde edilir. Denklemden kirişin eğriliği κ şu şekilde elde edilebilir(Petyt, M. 1990),

$$\kappa = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5)$$

3. TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞİN MATEMATİKSEL MODELİ



Şekil 2. Tabakalı Kompozit Kirişin Geometrisi (Balci, M., Nalbant, M.O., Kara, E., Gundogdu, O. 2014)

Tabakalı kompozit Euler-Bernoulli kirişi için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi Hooke yasasında şu şekilde verilir (Wang, C.M., Reddy, J.N., Lee, K.M. 2000)

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (6)$$

Burada D eğilme rijitlik matrisini verirken σ gerilimi temsil etmektedir. Malzemenin doğrusal ortotropik olduğu varsayılmıştır.

1 nolu eşitlikteki her terim aşağıdaki 7-9 nolu denklemlerdeki gibi tanımlanmıştır.

$$\{\sigma\}^i = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{T^i} \quad (7)$$

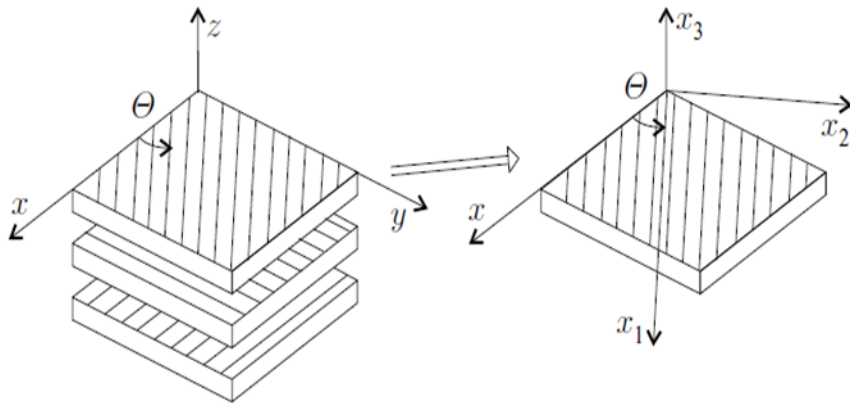
$$\{\varepsilon\}^i = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^{T^i} \quad (8)$$

$$[Q]^i = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^i \quad (9)$$

$[Q]^i$ Denklemde verilen i . katman için indirgenmiş elastik sabitler matrisini temsil eder (Reddy, J., N., Wang, C., M., Lee, K., H., 1997).

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (10)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$



Şekil 3. x,y,z koordinat sisteminden, x_1, x_2, x_3 koordinat sistemine geçiş ve tabaka açıları

$$[\sigma]_{x_1-x_2} = [T][\sigma]_{x-y} \quad (11)$$

Burada $[T]$, sırasıyla gerilim ve şekil değiştirme için dönüşüm matrisleridir.

$[\bar{Q}]$ rijitlik matrisi ise

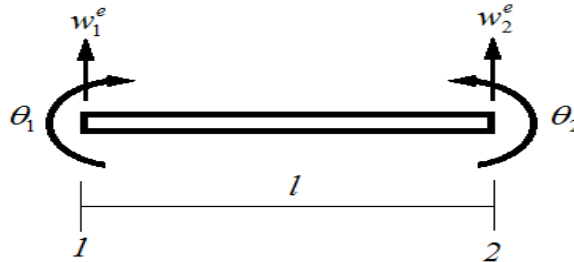
$$[\bar{Q}] = [T][Q][T]^T \quad (12)$$

İşlemler yapıldığında tabakaların rijitlik matrisleri şu şekilde tanımlanır (Balci, M., Nalbant, M.O., Kara, E., Gundogdu, O. 2014),

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

4. SONLU ELEMENLAR MODELİ

Euler Bernoulli eğme kiriş teorisine uymak için her biri iki serbestlik derecesine sahip iki mesnete sahip düzlemsel bir kiriş elemanı seçildi. Kiriş sapması "w" olarak serbestlik derecesine ve "θ" kesitinin dönüşüne sahip olan kiriş elemanı Şekil 4'te gösterilmektedir.



Şekil 4. Düzlem Eğme Kiriş Eleman

Euler Bernoulli Tabakalı eğme kirişin rijitlik ve global kütle matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunmuştur (Balci, M., Nalbant, M.O., Kara, E., Gundogdu, O. 2014),

$$[k]_e = t \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] dx \quad (13)$$

$$[m_e] = \int_e \rho [N]^T [N] dV \quad (14)$$

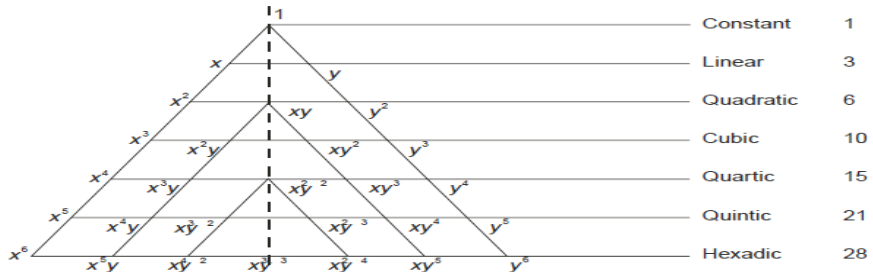
Eğme kirişi elemanı için geliştirilen kütle ve rijitlik matrisleri bir Euler-Bernoulli kirişini temsil edecek şekilde birleştirilirse,

$$[M] = \sum_{e=1}^n m^e$$

$$[K] = \sum_{e=1}^n k^e$$
(15)

[M] ve [K] sırasıyla global kütle matrisi ve rijitlik matrislerini, n ise modelde kullanılan sonlu elemanların sayısını ifade eder.

Şekil Fonksiyonunun Eldesi



Şekil 5. Pascal Üçgeni

Ortotropik malzemeye sahip kompozit malzemeden yapılan tabakalardan oluşturulmuş kiriş elemana ait şekil fonksiyonunun eldesi için kullanacak olduğumuz çökme değeri için şekil 5'te görülen pascal üçgeninden faydalanılmıştır.

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$
(16)

$$w = \{P\}^T \{a\}$$
(17)

Burada w (çökme) değerimizin birinci türevi bize θ (dönme) değerimizi vermektedir (Abreu, G.L.C.M.; Riberio, J.F.; Steffen, V. 2004).

Denklemden (17), a katsayı vektörü ve P, enterpolasyon polinom terim vektörüdür. Katsayı ve enterpolasyon polinom terim vektörü aşağıdaki formatta verilmiştir.

$$\{a\} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4\}^T$$

$$\{P\} = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\}^T$$
(18)

Kirişin yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi verilir (Kollar, L.P.; Springer, G.S. 2003),

$$w = Nd$$
(19)

Denklem (19)'u denklem (16)' da yerine koyarsak,

$$\{d\} = [X] \{a\} \quad (20)$$

Elde edilir. Eşitlikteki X 4×4 'lük genişletilmiş yer değiştirme matrisini ifade eder. Burada katsayı vektörü elde edilir,

$$\{a\} = [X]^{-1} \{d\} \quad (21)$$

Elde edilen katsayı vektörü denklem (17) de yerine yazılırsa,

$$w = \{P\}^T [X]^{-1} \{d\} \quad (22)$$

Elde edilir. Denklem(22), denklem (21)'e entegre edilip düzenlenirse şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir(Balci, M., Nalbant, M.O., Kara, E., Gundogdu, O. 2014).

$$N = \{P\}^T [X]^{-1} \quad (23)$$

5. DİNAMİK ANALİZ

Sönümsüz serbest titreşime maruz kalan kirişin hareket denklemi (24) nolu Denklemde verilmiştir. (Gökmen A., Hasan Ç., E. Sahin C., Muzaffer T., Ugur Y. 2008).

Küresel sistem için hareket denklemi,

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0 \quad (24)$$

Aşağıdaki biçimde harmonik bir çözüm önerirsek,

$$\{q\} = \{\psi\} \sin(\omega t) \quad (25)$$

Denklem (25), denklem (24)'e entegre edilirse,

$$-[M] \{\psi\} \omega^2 \sin(\omega t) + [K] \{\psi\} \sin(\omega t) = 0 \quad (26)$$

elde edilebilir. Denklem (26) ise daha sonra yeniden düzenlenirse, aşağıdaki özdeğer problem formunu alır,

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\psi\} = 0 \quad (27)$$

Özdeğerler titreşim frekanslarını temsil ederken, özvektörler titreşim modlarını temsil etmektedir (Balci, M., Nalbant, M.O., Kara, E., Gundogdu, O. 2014).

6. NUMERİK ANALİZ

Bu çalışmada, tabakalı kompozit kirişin sayısal modeli, MATLAB’te ankastre-ankastre, basit-basit ve ankastre-serbest sınır koşulları ile oluşturulmuştur. İki tabakalı kompozit kiriş [0/45] , [-45/45] ve [0/0] tabaka oryantasyon açılarında analiz edilmiştir. Doğal frekansları farklı uzunluk-kalınlık oranlarında sekiz mod olarak bulunmuştur.

MATLAB'da kullanılacak tabakalı kompozit kirişin geometrik ve fiziksel özellikleri aşağıdaki Tablo 1'de verilmiştir. Çeşitli şartlarda yapılan analizler aşağıdaki tablolarda derlenmiştir.

Tablo 1: Tabakalı kompozit kirişin geometrik ve fiziksel özellikleri

$E_x=30\text{Gpa}$	$E_y=3.5\text{Gpa}$	$E_z=3.5\text{Gpa}$
$G_{xy}=1.7\text{Gpa}$	$G_{xz}=1.7\text{Gpa}$	$G_{yz}=0.70\text{Gpa}$
$\nu_{xy}=0.21$	$\nu_{yz}=0.21$	$\rho=1315\text{kg/m}^3$
$L_x=2\text{m}$	$h=0.05\text{m}$	

Çeşitli şartlarda yapılan analizler aşağıdaki tablolarda derlenmiştir.

Tablo 2. [0/45] Tabaka Açılarında Sahip Ankastre-Serbest Kirişin Doğal Frekans Tahminleri (Hz)

L_x / h	Serbest Titreşim Doğal Frekansı (Hz)							
	Mod I	Mod II	Mod III	Mod IV	Mod V	Mod VI	Mod VII	Mod VIII
20	1,4	9,2	25,8	50,6	83,6	125,0	174,4	232,4
50	2,3	14,7	41,3	81,0	133,9	200,0	279,3	371,9
100	0,5	3,6	10,3	20,2	33,4	50,0	69,8	92,9
200	0,1	0,9	2,5	5	8,3	12,5	17,4	23,2
300	0,06	0,4	1,1	2,2	3,7	5,5	7,7	10,3
400	0,03	0,2	0,6	1,2	2,1	3,1	4,3	5,8
500	0,02	0,1	0,4	0,8	1,3	2,0	2,7	3,7

Tablo 3. [-45/45] Tabaka Açılarında Sahip Ankastre-Serbest Kirişin Doğal Frekans Tahminleri (Hz)

L_x / h	Serbest Titreşim Doğal Frekansı (Hz)							
	Mod I	Mod II	Mod III	Mod IV	Mod V	Mod VI	Mod VII	Mod VIII
20	8,4	52,7	147,5	289,1	477,8	713,8	997,0	1327,3
50	1,3	8,4	23,6	46,2	76,4	114,2	159,5	212,3
100	0,3	2,1	5,9	11,5	19,1	28,5	39,8	53,0
200	0,08	0,5	1,4	2,9	4,7	7,1	9,9	13,2
300	0,03	0,2	0,6	1,2	2,1	3,1	4,4	5,9
400	0,02	0,1	0,3	0,7	1,2	1,7	2,5	3,3
500	0,01	0,08	0,2	0,4	0,7	1,1	1,5	2,1

Tablo 4. [0/0] Tabaka Açıklarına Sahip Ankastre-Serbest Kirişin Doğal Frekans Tahminleri (Hz)

L_x / h	Serbest Titreşim Doğal Frekansı (Hz)							
	Mod I	Mod II	Mod III	Mod IV	Mod V	Mod VI	Mod VII	Mod VIII
20	19,3	120,9	338,5	663,3	1096,5	1637,9	2287,7	3045,7
50	3,08	19,3	54,1	106,1	175,4	262,0	366,0	487,3
100	0,7	4,83	13,5	26,5	43,8	65,5	91,5	121,8
200	0,2	1,2	3,3	6,6	10,9	16,3	22,8	30,4
300	0,08	0,5	1,5	2,9	4,8	7,2	10,1	13,5
400	0,04	0,3	0,8	1,6	2,7	4,1	5,7	7,6
500	0,03	0,2	0,5	1,0	1,7	2,6	3,6	4,8

Tablo 5. [0/0] Tabaka Açıklarına Sahip Ankastre-Ankastre Kirişin Doğal Frekans Tahminleri (Hz)

L_x / h	Serbest Titreşim Doğal Frekansı (Hz)							
	Mod I	Mod II	Mod III	Mod IV	Mod V	Mod VI	Mod VII	Mod VIII
20	120,9	338,5	663,3	1096,5	1637,9	2287,7	3045,7	3912,1
50	19,3	54,1	106,1	175,4	262,0	366,0	487,3	625,3
100	4,83	13,5	26,5	43,8	65,5	91,5	121,8	156,4
200	1,2	3,3	6,6	10,9	16,3	22,8	30,4	39,1
300	0,5	1,5	2,9	4,8	7,2	10,1	13,5	17,5
400	0,03	0,8	1,6	2,7	4,1	5,7	7,6	9,7
500	0,2	0,5	1,0	1,7	2,6	3,6	4,8	6,3

Tablo 6. [0/0] Tabaka Açıklarına Sahip Basit-Basit Kirişin Doğal Frekans Tahminleri (Hz)

L_x / h	Serbest Titreşim Doğal Frekansı (Hz)							
	Mod I	Mod II	Mod III	Mod IV	Mod V	Mod VI	Mod VII	Mod VIII
20	54,1	216,5	487,3	866,3	1353,7	1949,3	2653,2	3465,3
50	8,6	34,6	77,9	138,6	216,5	311,8	424,5	554,4
100	2,1	8,6	19,4	34,6	54,1	77,9	106,1	138,6
200	0,5	2,1	4,8	8,6	13,5	19,4	26,5	34,6
300	0,2	0,9	2,1	3,8	6,0	8,6	11,7	15,4
400	0,1	0,5	1,2	2,1	3,3	4,8	6,6	8,6
500	0,08	0,3	0,7	1,3	2,1	3,1	4,2	5,5

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ortotropik malzemeye sahip kompozit malzemeden yapılan simetrik ve farklı oryantasyonlar açıklarına sahip iki tabakalı kirişin çeşitli sınır şartları altında serbest titreşim davranışları incelenmesi amaçlanmıştır. Elemanın sonlu elemanlar metodu kullanılarak deplasmanları, şekil fonksiyonu, dirençlilik matrisi, rijitlik matrisi ve kütle matrisi, başarıyla elde edilmiştir.

Daha sonra MATLAB programında kirişin farklı uzunluk-kalınlık oranlarında simetrik ve farklı oryantasyonlar açılarına sahip tabakalardan oluşan durumlarında serbest titreşim doğal frekansları ilk sekiz mod olarak elde edildi. Bu çalışmalar sonucunda şu sonuçlar elde edildi.

- Farklı uzunluk-kalınlık oranlarına sahip kirişlerin doğal frekanslarının değiştiği, oranın artıkça doğal frekansların azaldığı gözlemlenmiştir.
- Tablo 2 ve Tablo 3'te kiriş çapraz açılı tabakalardan oluşmaktadır. Tablo 4'te ise kiriş simetrik açılara sahip tabakalardan oluşmaktadır. Bu üç tablonun verileri karşılaştırıldığında çapraz açılı kirişlerin serbest titreşim doğal frekanslarının simetrik açılı kirişin değerlerinden daha düşük olduğu tespit edilmiştir.
- Tablo 4, 5 ve 6'te simetrik açılı tabakadan oluşan kiriş analiz edilmiştir. Veriler karşılaştırıldığında, Ankastre-Serbest sınır şartlarına sahip kirişin en düşük, Ankastre-Ankastre sınır şartlarına sahip kirişin ise en yüksek serbest titreşim doğal frekans değerlerine sahip olduğu gözlemlenmektedir.

8. KAYNAKLAR

- [1] **Abreu, G.L.C.M.; Riberio, J.F.; Steffen, V.** 2004, "Finite element modeling of a plate with localized piezoelectric sensors and actuators", Journal of the Braz. Soc. Of Mech. Sci, vol. 26 (2), pp. 117- 128.
- [2] Alimirzaei S., Mohammadimehr M., Abdelouahed T. 2020, "Nonlinear analysis of viscoelastic micro-composite beam with geometrical imperfection using FEM: MSGT electro-magneto-elastic bending, buckling and vibration solutions", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 71, No. 5 (2019) 485-502.
- [3] **Atilla G. , Caglioglu H., 2011**, "Vibration analysis of delaminated composite beams using analytical and FEM models", Indian Journal of Engineering & Material Sciences, Volume 18, Pages 7-14.
- [4] **Atilla O., Emrah M. 2012**, "Free vibration analysis of cross-ply laminated composite beams by mixed finite element", formulation international journal of structural stability and Dynamics, volume 12, No 6, pages 17, DOI: 10.1142/s0219455412500563.
- [5] Balci, M., Nalbant, M.O., Kara, E., & Gundogdu, O. 2014, "Free Vibration Analysis of a Laminated Composite Beam with Various Boundary Conditions", International Journal of Automotive and Mechanical Engineering, 9, 1734-1746.
- [6] **D.D.L. Chung**, 2018, "Thermoelectric polymer-matrix structural and nonstructural composite materials", Advanced Industrial and Engineering Polymer Research, Volume 1, Issue 1, Pages 61-65.
- [7] Farzad E., Ali D. 2018, "On thermo-mechanical vibration analysis of multi-scale hybrid composite beams", Journal of Vibration and Control, Vol 25, Issue 4, page(s): 933-945, <https://doi.org/10.1177/1077546318806800>.

- [8] **Gökmen A., Hasan Ç., E. Sahin C., Muzaffer T., Ugur Y. 2008**, “Free Vibration Analysis of the Laminated Composite Beams by Using DQM”, Journal of Reinforced Plastics and Composites DOI: 10.1177/0731684407087561.
- [9] **Guigen Z., Helen L., Sachin M., Min W. 2020**, “Composites”, Biomaterials Science (Fourth Edition), Academic Press, Pages 415-429, ISBN 9780128161371.
- [10] **Jones, R., M.**, 1975, “Mechanics of Composite Materials”, Newyork, Hemisphere.
- [11] **K.M.A. Hossain, S. Hasib, T. Manzur, 2020**, “Shear behavior of novel hybrid composite beams made of self-consolidating concrete and engineered cementitious composites”, Eng. Structures, Volume 202.
- [12] **Kollar, L.P.; Springer, G.S.** 2003, “Mechanics of Composite Structures”, Cambridge Universty, 480, New York.
- [13] **Lurie K.A., Cherkaev A.V.** 2018, "Effective Characteristics of Composite Materials and the Optimal Design of Structural Elements. In: Cherkaev A.V., Kohn R. (eds) Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Cham.
- [14] **Petyt, M.** 1990, “Introduction to Finite Element Vibration Analysis”, Cambridge University, 558, New York.
- [15] **Reddy, J., N., Wang, C., M., Lee, K., H.**, 1997, “Relationships Between Bending Solutions of Classical and Shear Deformation Beam Theories”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, 26, 3373-3384.
- [16] **S.S. Bhavikatti**, 2007 “Finite Element Analysis”, New age international Publishers.
- [17] **Wang, C.M., Reddy, J.N., Lee, K.M. 2000**. “Shear deformable beams and plates relations with classical solutions”, Elsevier, 296, Oxford.