



Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Düzensiz Ölçekli Sierpinski Üçgeni $SG(2,3)$ Üzerindeki İçsel Metrik

 Fatma Diğdem KOPARAL^a,  Yunus ÖZDEMİR^{a,*}

^a *Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Eskişehir, TÜRKİYE*

* *Sorumlu yazarın e-posta adresi: yunuso@eskisehir.edu.tr*

DOI: 10.29130/dubited.843613

ÖZET

Bu çalışmada, fraktal geometrinin en önemli nesnelere biri olan Sierpinski üçgeninin bir genellemesi olarak düşünebileceğimiz düzensiz ölçekli bir Sierpinski üçgeni olan $SG(2,3)$ üzerindeki içsel metriğin bir ifadesi kümenin noktalarının bu kümeye has kod temsilleri yardımıyla ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Sierpinski üçgeni, Düzensiz ölçekli Sierpinski üçgeni, İçsel metrik, Jeodezik*

The Intrinsic Metric of the Scale Irregular Sierpinski Triangle $SG(2,3)$

ABSTRACT

In this study, we give an explicit expression of the intrinsic metric on the scale-irregular Sierpinski Triangle $SG(2,3)$, which can be considered as a generalization of the classical Sierpinski triangle, via special code representations of the points.

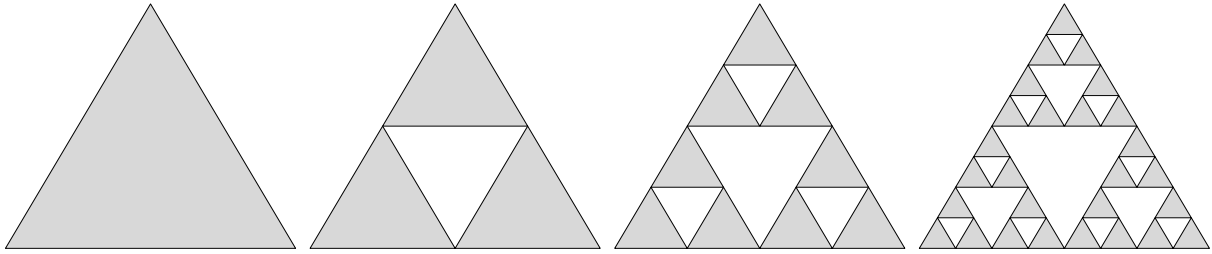
Keywords: *Sierpinski triangle, Scale irregular Sierpinski triangle, Intrinsic metric, Geodesic*

I. GİRİŞ

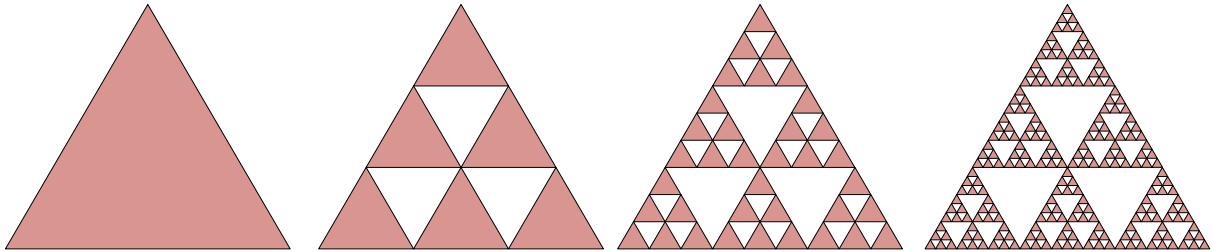
A. DÜZENLİ VE DÜZENSİZ ÖLÇEKLİ SIERPİNSKİ ÜÇGENİ AİLELERİ

Sierpinski üçgeni, fraktal geometrinin en klasik örneklerinden biri olarak literatürde yerine almış ve birçok problem için bir model haline gelmiştir. Üzerinde çok fazla çalışılan bu kendine benzer kümenin farklı genelleştirilmeleri mevcuttur. Bunlardan biri de 1980'li yıllarda [1] literatüre kazandırılmış olan, kısaca düzensiz ölçekli Sierpinski üçgeni ailesi diyebileceğimiz ailedir. Bu kümeler üzerinde çeşitli çalışmalar ilgili yıllardan itibaren yapılmaya devam etmektedir (detaylı bilgi için bkz. [2]-[4]).

Birim kenar uzunluklu eşkenar üçgen alıp, her bir kenarını $N > 1$ eşit parçaya ayıracak şekilde noktaları işaretledikten sonra bu noktalardan uzunluğu $1/N$ olan eşkenar üçgenleri oluşturalım ve bu üçgenlerden aşağıya doğru bakanları (veya en başta aldığımız üçgene göre ters duranları) atalım. Her bir küçük eşkenar üçgene aynı prosedürü uygulayıp devam edelim. Bu şekilde devam ettiğimizde (uygun bir metriğe göre limit durumunda) $SG(N)$ ile gösterdiğimiz (ve mod- N Sierpinski üçgeni olarak da bilinen) (düzenli) Sierpinski üçgenine ulaşırız ($N = 2$ ve $N = 3$ için bkz. Şekil 1 ve Şekil 2). $N = 2$ durumunda elde edilen küme bilinen klasik Sierpinski üçgenidir.

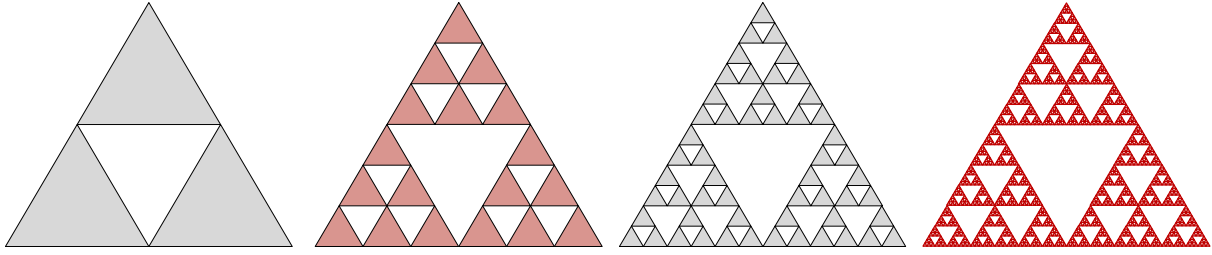


Şekil 1. $N=2$ için elde edilen $SG(2)$ kümesi klasik Sierpinski üçgenidir: ilk 3 adım



Şekil 2. $N=3$ için elde edilen $SG(3)$ kümesi: ilk 3 adım

Farklı bir genelleme olarak da düzensiz ölçekli Sierpinski üçgeni ailesini şu şekilde tanımlayabiliriz: Elemanları 1'den büyük tam sayılar olan bir a_n dizisi için, her adımda sabit bir argüman uygulamak yerine, i . adımda $SG(a_i)$ için yukarıda tanımladığımız prosedürü uygulayalım. Yani yine birim kenar uzunluklu eşkenar üçgenen başlayarak, i . adımdaki her bir alt-eşkenar üçgene bir kenarını a_i tane eşit parçaya bölerek (o eşkenar üçgen içinde $a_i \cdot (a_i + 1)/2$ adet kenar uzunluğu $1/a_i$ oranında küçülmüş eşkenar üçgenler oluşacaktır) prosedürümüzü uygulayalım. Bu şekilde elde edilen kümeye bir düzensiz ölçekli Sierpinski üçgeni denir. Örnek olarak dizimizin elemanlarını $2,3,2,3,2, 3 \dots$ şeklinde alırsak elde edilecek olan küme Şekil 3'te görünmektedir. Elbette genel tanımda dizinin elemanları bu şekilde tekrar etmek durumunda değildir (daha fazla örnek için bkz. [1]). Bu çalışmada üzerinde durulacak küme tam olarak Şekil 3'te de verilen ve $SG(2,3,2,3,2,3, \dots)$ veya kısaca $SG(2,3)$ ile göstereceğimiz küme olacaktır.

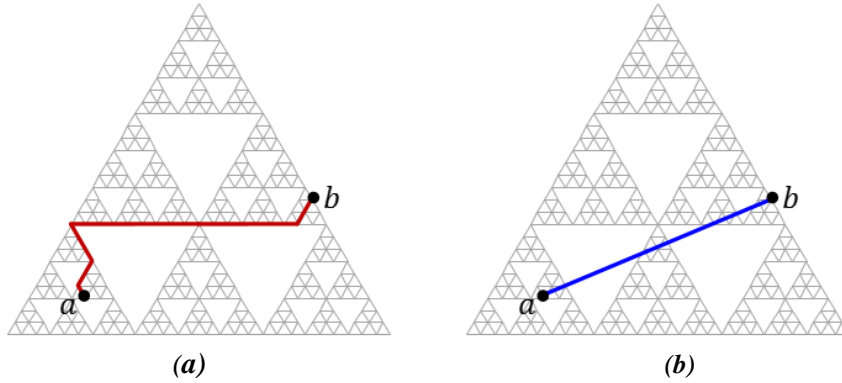


Şekil 3. 2,3,2,3,2, 3... dizisine karşılık gelen $SG(2,3)$ kümesi: ilk 4 adım

Aslında $SG(2,3)$ kümesini, içinde hem klasik Sierpinski üçgeni $SG(2)$ 'nin hem de $SG(3)$ 'ün yaşadığı bir kendine benzer küme olarak değerlendirebiliriz.

B. İÇSEL METRİK UZAYLAR

Bir metrik uzayın bir altkütmesi üzerindeki içsel metrik kısaca şu şekilde tanımlanabilir: A kümesi ve bu küme içinde farklı x, y elemanları verilsin. Bu durumda $d(x, y)$ değerini, A içinde kalarak x ile y noktalarını birleştiren ve uzunluğu sonlu olan tüm eğrilerin uzunluklarının infimumu olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonu A üzerinde bir metrik olur ve içsel (intrinsic) metrik olarak adlandırılır (detay için bkz. [5]). Şekil 4a ve Şekil 4b'de $SG(3)$ üzerindeki farklı iki nokta arasında sırasıyla içsel metriğe ve Öklid metriğine göre jeodezikler görünmektedir.



Şekil 4. a) $SG(3)$ üzerindeki içsel metriğe göre iki nokta arasında bir jeodezik, b) Düzlemdaki Öklid metriğine göre iki nokta arasındaki jeodezik

Bir küme üzerindeki içsel metrik yapı ile ilgili çok fazla çalışma literatürde mevcuttur. Bunun yanında son yıllarda giderek artan bir ilgi çekmesi ve uygulama alanı bulması itibari ile kendine benzer kümeler üzerindeki içsel metrikler ve bu metrik uzayların özellikleri de incelenmeye başlanmıştır. Bu konuda, özellikle de yukarıda bahsi geçen Sierpinski üçgeni $SG(2)$ ve $SG(3)$ üzerinde ve farklı kendine benzer kümeler üzerinde yakın zamanda yapılan çalışmalar mevcuttur [6]-[9]. Bu çalışmalarda, ilgili küme üzerindeki içsel metrik farklı bir araç kullanılarak ifade edilmiş ve bu metriğe göre küme üzerindeki jeodezikler araştırılmıştır.

Bir sonraki bölümde bu çalışmalar hızlıca özetlenecek olup, bu makalenin temel amacı olarak $SG(2,3)$ ile gösterdiğimiz kendine benzer küme üzerindeki içsel metrik, benzer araçlarla (noktaların kod temsilleri kullanılarak) fakat kümeye uygun farklı bir argümanla ifade edilecektir.

II. $SG(2)$ VE $SG(3)$ ÜZERİNDEKİ NOKTALARIN KOD TEMSİLLERİ VE İÇSEL METRİK

Bu bölümde, [6], [7] ve [8] çalışmalarında detayı bulunabilecek olan $SG(2)$ ve $SG(3)$ üzerindeki içsel metrik ifadeleri özetlenecektir.

A. SG(2) İÇİN KOD GÖSTERİMİ VE İÇSEL METRİK

Bu bölümde öncelikle itere fonksiyon sistemi ve atraktör kavramları özetlenecektir. 1981 yılında Hutchinson bu teorideki köşe taşı çalışmalardan biri olarak değerlendirebilecek olan [10] çalışmasını yayımlamış ve bu çalışmada kendine benzer kümelerin bir matematiksel modelini ortaya koymuştur:

(X, d) bir tam metrik uzay ve f_1, f_2, \dots, f_n bu metrik uzay üzerinde büzülme katsayıları r_i olan büzülme dönüşümleri olmak üzere, $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sistemine büzülme katsayısı $\max_{1 \leq i \leq n} r_i$ olan bir itere fonksiyon sistemi (IFS) denir. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ itere fonksiyon sistemi verildiğinde, X 'in boştan farklı tüm kompakt altkümelerinden oluşan ve d 'nin belirlediği h Hausdorff metriği ile tek türlü belirli olan $\mathcal{H}(X)$ tam metrik uzayı üzerinde, $F: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, $B \in \mathcal{H}(X)$ için

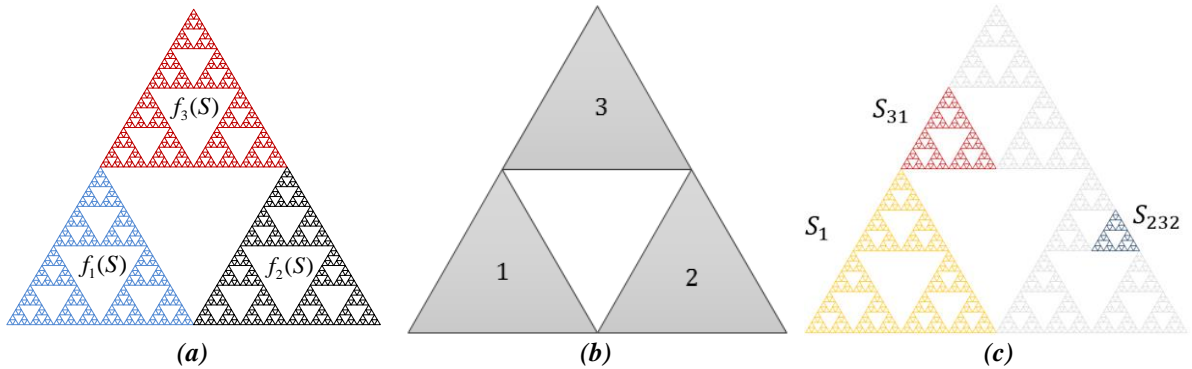
$$F(B) = \bigcup_{i=1}^n f_i(B)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü bir büzülme dönüşümüdür ve sabit nokta teoreminden bu dönüşümün sabit noktası vardır ve tektir. Ayrıca, bu sabit nokta (kompakt küme) herhangi bir $B \in \mathcal{H}(X)$ için $B, F(B), \dots, F^n(B), \dots$ dizisinin Hausdorff metriğine göre limiti olarak elde edilir. İşte bu sabit noktaya verilen IFS'nin atraktörü denir (itere fonksiyon sistemleri ve kendine benzer kümeler ile ilgili detaylı bilgi için bkz. [10-14]).

$SG(2)$, yani klasik Sierpinski üçgeni de 3 adet (benzerlik dönüşümü olan) büzülme dönüşümünün belirlediği bir itere fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade edilebilir. Öklid metriği ile donatılmış \mathbb{R}^2 tam metrik uzayı üzerinde büzülme katsayıları $\frac{1}{2}$ olan $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3$)

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad f_2(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad f_3(x, y) = \left(\frac{x+1/2}{2}, \frac{y+\sqrt{3}/2}{2}\right)$$

dönüşümlerinden oluşan $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ itere fonksiyon sisteminin atraktörü Şekil 5a'da görünen Sierpinski üçgenidir (klasik Sierpinski üçgeninin ilk tanımlandığı çalışma için bkz. [15]).



Şekil 5. a) Üç benzer kopyasının bir birleşimi olan Sierpinski üçgeni $S = SG(2)$, **b)** Kümenin alt benzer kopyalarının kodları (aslında üçgeni bu alt kopyalara götüren büzülmelerin indisleri), **c)** 1. 2. ve 3. seviyeden bazı alt-üçgenlerin kodları

Üzerinde bilinen metrik ile önemli bir metrik uzay olan $\Sigma_3 = \{w = w_1 w_2 \dots w_k \dots \mid w_i \in \{1, 2, 3\}\}$ kod uzayını düşünelim. Bu uzaydan Sierpinski üçgenine (bu bölümde kısalık hatırına S ile gösteriyoruz)

$$w \rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} (f_{w_1} \circ f_{w_2} \circ \dots \circ f_{w_k})(S) \quad (1)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm (bu dönüşümün özellikleri ve detayları için bkz. [16]), Σ_3 'ün her bir noktasını Sierpinski üçgeninin bir elemanına götürmektedir. Tersine, Sierpinski üçgeninin her bir noktasına bu kod uzayından en az bir nokta karşılık getirilmiş olur (bu eşleme bire-bir değil). Aslında Sierpinski üçgeninin (konveks zarfı olan eşkenar üçgenin köşe noktaları hariç) köşe noktaları diye adlandırılan noktalarının her birinin tam olarak iki farklı kod temsili vardır. Σ_3 'ün herhangi bir elemanı (bir kod dizisi) verildiğinde, (1) denkleminde ifade edilen dönüşüm (ve Cantor Arakesit Teoremi) yardımıyla S üzerinde olduğunu bildiğimiz bir eleman elde edilmektedir ve her bir eleman bu şekilde en az bir kod dizisi yardımıyla bulunabilmektedir.

Burada kod uzayının elemanlarının Sierpinski üçgenini veren büzölmelerin indisleri olduğuna dikkat edelim. Bir şekilde Şekil 5b'deki gibi kümenin tüm seviyelerdeki benzer kopyalarını da kodlamış oluyoruz (bkz. Şekil 5c). Örneğin sabit bir k doğal sayısı için k uzunluklu (yani k tane harften oluşan) $\sigma = w_1 w_2 \dots w_k$ kelimesi için $f_{\sigma}(S) = (f_{w_1} \circ f_{w_2} \circ \dots \circ f_{w_k})(S)$ kümesi S 'nin $1/2^k$ oranında küçültülmüş bir kopyasıdır. k . Seviyede bu kopyalardan 3^k tane bulunmaktadır. k . Seviyeden bir alt-Sierpinski üçgeni olarak adlandırdığımız bu küme $S_{\sigma} = S_{w_1 w_2 \dots w_k}$ şeklinde de gösterilmektedir. σ 'ya bir harf eklediğimizde bir önceki S_{σ} 'nin içinde yaşayan bir kademe daha küçük bir kopya elde edilir, σ 'nın uzunluğu sonsuza giderken de bu iç içe geçmiş kümelerin arakesiti aslında bize Sierpinski üçgeninin tek bir elemanını verecektir. İşte bu sonsuz uzunluklu kelimeye bu noktanın bir kod temsili diyoruz (bu temsil yukarıda da bahsedildiği üzere tek olmayabilir). Örneğin, S 'nin birinci kademede S_0 ve S_1 alt üçgenlerinin tek kesişim noktasının iki farklı kod temsili vardır: $01111 \dots = 0\bar{1}$ veya $10000 \dots = 1\bar{0}$ şeklindeki kod uzayının elemanları birer temsil olarak alınabilir. Yine Şekil 6'da verilen x, y noktaları iki farklı kod ile temsil edilebilmektedir.

Sierpinski üçgeni üzerinde verilen farklı iki nokta arasındaki bir jeodeziğin uzunluğu yani bu iki nokta arasındaki en kısa uzaklık (içsel metriğe göre), noktaların kod temsilinden bağımsız bir şekilde bu kodlar yardımı ile açıkça bir seri toplamı ile şu şekilde ifade edilebilmektedir: $a_1 a_2 \dots a_k \dots, b_1 b_2 \dots b_k \dots \in \Sigma_3$ temsilleri $a, b \in S$ farklı noktalarının birer kod temsili ve $k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$ olsun. Bu durumda bu iki nokta arasındaki en kısa uzaklık yani jeodezik uzaklığı $d_{ic}(a, b)$

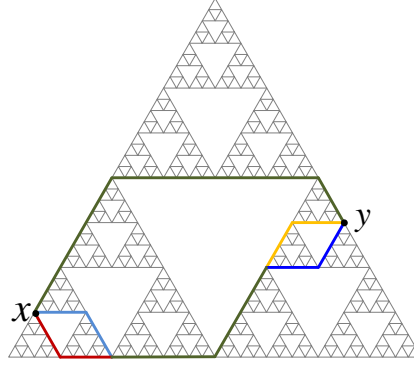
$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}, \quad \gamma_i = \begin{cases} 0, & a_k \neq a_i \neq b_k \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & a_k \neq b_i \neq b_k \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_{ic}(a, b) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\}$$

şeklinde (6). Burada k . seviyeden bir alt-üçgenin çapı (aslında bu benzer küçük kopyanın konveks zarfı olan eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğunun) $\frac{1}{2^k}$ şeklindedir. [6] ve [7] çalışmalarında detayları bulunabilecek olan bu açık ifade yardımı ile bu küme üzerindeki farklı iki nokta arasında en fazla 5 farklı jeodezik olduğu da kanıtlanmıştır. [17] çalışmasında da yazarlar, yüksek boyutlu Sierpinski üçgeninde içsel metriğin ifadesini ortaya koyup, yüksek boyutlarda iki farklı nokta arasında en fazla 8 (hatta 1,2,3,4,5,6 veya 8) jeodezik olduğunu göstermiştir.

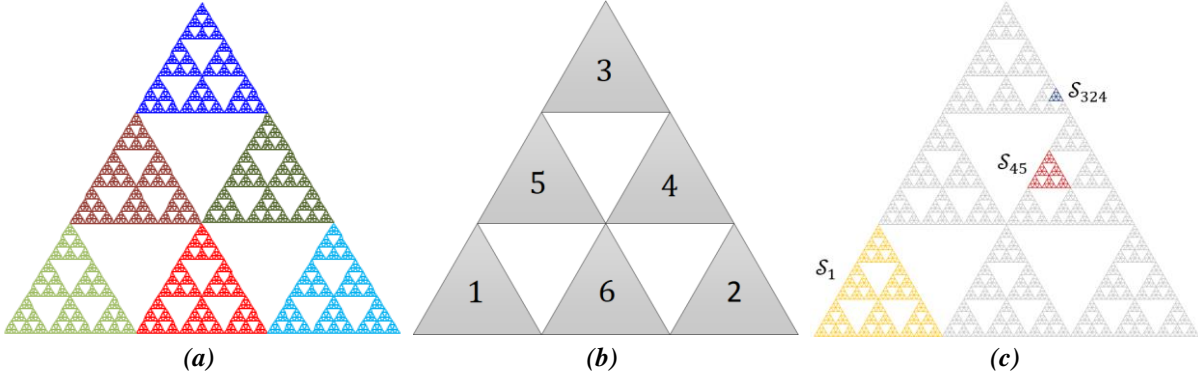
Şekil 6'da kod temsili 111333... (veya kısaca 111 $\bar{3}$) ve 2323333... (veya kısaca 232 $\bar{3}$) olan iki nokta arasındaki 5 jeodezik gösterilmiştir.



Şekil 6. Kod temsili sırasıyla 1113̄ ya da 1131̄ olan x noktası ile kod temsili 2323̄ veya 2332̄ olan y noktası arasındaki 5 farklı jeodezik

B. SG(3) ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK

Tam 6 adet benzerlik dönüşümünün belirlediği $\{\mathbb{R}^2; g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ şeklindeki bir itere fonksiyon sisteminin atraktörü olarak yazabileceğimiz $SG(3)$ (bkz. Şekil 7a) üzerindeki içsel metrik noktaların kod temsilleri yardımı ile [8] çalışmasında açıkça ifade edilmiştir. İlgili çalışmada bu küme üzerindeki içsel metriğin daha rahat ifade edilebilmesi için uygun (daha doğrusu kümeye has) bir kodlama (1/3 benzerlik oranına sahip 6 fonksiyon uygun bir şekilde indisenerek) kullanılmış olup (Şekil 7b-Şekil 7c), bu küme üzerindeki farklı iki nokta arasında, $SG(2)$ durumundaki sonlu jeodezik sayısı durumunun aksine, sonsuz farklı jeodezik olabileceği gösterilmiştir. İçsel metriğin detaylı ifadesi, kodlamanın ayrıntıları ve jeodeziklerin tipleri ile ilgili ayrıntılı bilgi için bkz. [8].



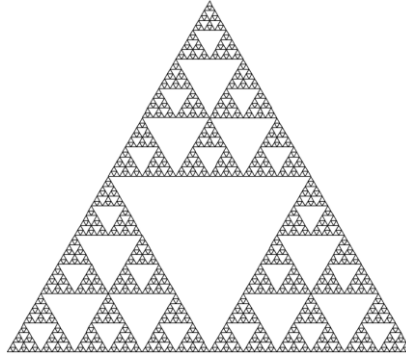
Şekil 7. a) Kendi 6 küçük benzer kopyasının bir birleşimi olan düzenli Sierpinski üçgeni $S = SG(3)$, b) Kümenin alt benzer kopyalarının kodları (aslında üçgeni bu alt kopyalara götüren büzülmelerin indisleri), c) 1. 2. ve 3. seviyeden bazı alt-üçgenlerin kodları

III. SG(2, 3) ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK

A. SG(2, 3) İÇİN KOD GÖSTERİMİ VE İÇSEL METRİK

$SG(2)$ ve $SG(3)$ 'ün aksine $SG(2,3)$ ile gösterdiğimiz düzensiz ölçekli Sierpinski üçgeni üzerindeki jeodeziklerin davranışı ve kümenin kendine benzerlik yapısı biraz daha farklıdır. Aslında bu kümeyi 18 adet 1/6 benzerlik katsayısına sahip büzülme dönüşümlerinin belirlediği bir itere fonksiyon sisteminin atraktörü olarak yazmak ve önceki durumlarda olduğu gibi standart bir kodlama ile uzun uzun bütün alternatifleri düşünerek içsel metriği ifade etmeye çalışmak ilk akla gelen düşünce olabilir. Fakat bu uygulamada çok mümkün görünmemektedir, ayrıca kümenin inşasında kullandığımız kendine benzer 2 yapının varlığını dikkate almamak da gereksiz yere ifadeyi uzatmak anlamına gelecektir. Bunun yerine

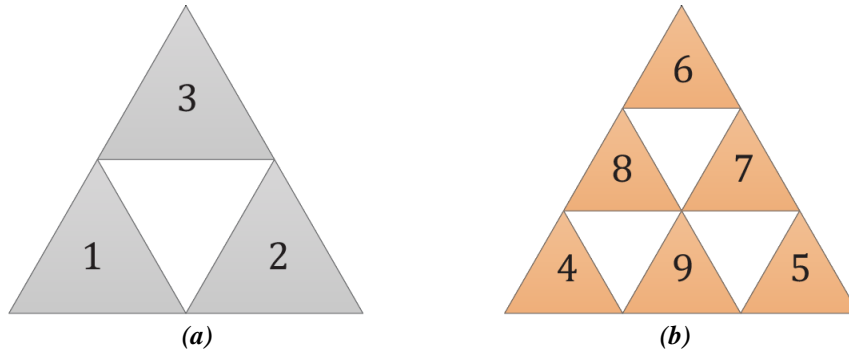
bu çalışmada, Şekil 8’de görülen $SG(2,3)$ üzerindeki içsel metriği ifade etmek için bu duruma has bir kodlama ile bu kümenin noktalarının kod temsilinden yararlanılacaktır.



Şekil 8. Düzensiz ölçekli bir Sierpinski üçgeni $SG(2,3)$

A. 1. $SG(2, 3)$ 'ün Noktaları İçin Kod Gösterimi

Öncelikle $SG(2,3)$ 'ün yapısında yer bulan hem $SG(2)$ hem de $SG(3)$ için birinci seviyedeki alt üçgenlerini Şekil 9a ve Şekil 9b'deki gibi kodlayalım. Yani bir manada $SG(2)$ ve $SG(3)$ kompakt kümelerini sırasıyla büzülme katsayısı $1/2$ olan $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ ve büzülme katsayısı $1/3$ olan $\{\mathbb{R}^2; f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ itere fonksiyon sistemlerinin atraktörleri olarak düşünelim. Bu bölüm boyunca yine kısalık hatırına $SG(2,3)$ yerine K sembolü kullanılacaktır.



Şekil 9. a) $SG(2)$ için bir kod seçimi, b) $SG(3)$ için bir kod seçimi

$\Sigma_9 = \{w = w_0w_1 \dots w_k \dots \mid w_i \in \{1,2, \dots,9\}\}$ kod uzayı verilsin. Bu özel durumda noktaları kodlamak için bu kod uzayı ile değil onun bir alt kümesi ile çalışacağız. Σ_9 kümesindeki tek indisli elemanları $\{1,2,3\}$ kümesinden ve çift indisli elemanları da $\{4,5, \dots,9\}$ kümesinden olan tüm elemanları düşünelim ve bu kümeye A_9 diyelim;

$$A_9 = \{\omega_0\omega_1 \dots \omega_k \dots \in \Sigma_9 \mid i \text{ çift ise } \omega_i \in \{1,2,3\}, i \text{ tek ise } \omega_i \in \{4,5, \dots,9\}\}.$$

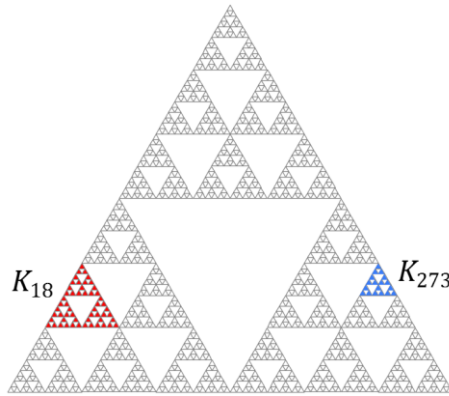
Yine denklem (1)'de verilen dönüşüme benzer olarak A_9 üzerinde tanımlı

$$w \rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} (f_{w_0} \circ f_{w_1} \circ \dots \circ f_{w_k})(K) \quad (2)$$

dönüşümü A_9 'un her bir noktasını K 'nın bir elemanına götürmektedir. Tersine, K 'nın her bir noktasına bu kod uzayından en az bir nokta karşılık getirilmiş olur (bu eşleme de bire-bir değildir). Bu kod dizisine ya da bu sonsuz uzunluklu kelimeye yine bu noktanın bir kod temsili diyoruz. (Klasik Sierpinski

üçgeninin aksine burada bir noktanın 1 veya 2 değil, 3 tane farklı kod temsili de (aynen $SG(3)$ 'de olduğu gibi) söz konusu olabilir.)

K kümesinin yapısından dolayı, içindeki herhangi bir noktaya ulaşmak için sırasıyla önce $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ sisteminden bir fonksiyon sonra da $\{\mathbb{R}^2; f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ sisteminden bir fonksiyon uygulanmakta ve iterasyon tam olarak bu sırada devam etmektedir. Kodlamanın bu şekilde seçilmesi, hem daha önce $SG(2)$ ve $SG(3)$ için elde edilmiş sonuçların kullanılabilmesi hem de 18 fonksiyon yerine 9 fonksiyonun yeterli olması açısından avantajlıdır. Yine $SG(2)$ durumunda olduğu gibi, k .seviyeden alt-üçgenler (k .adımdaki K 'nın bir kopyası için k .seviyeden alt-üçgen terimi kullanılacaktır) de benzer şekilde tanımlanabilir. Bir $w_0w_1 \dots w_k$ sonlu kelimesi için $K_{w_0w_1 \dots w_k} := (f_{w_0} \circ f_{w_1} \circ \dots \circ f_{w_k})(K)$ kümesine $(k+1)$. seviyeden alt-üçgen diyeceğiz. 2. ve 3. seviyeden alt-üçgenlere (K_{18} ve K_{273}) örnekler Şekil 10'da verilmiştir.



Şekil 10. $K=SG(2,3)$ içinde, 2. seviyede (K_{18}) ve 3. seviyede (K_{273}) iki alt-üçgen

A. 2. $SG(2, 3)$ Üzerindeki İçsel Metriğin İfade Edilmesi

$K = SG(2,3)$ 'ten aldığımız iki noktanın kod gösterimine (temsiline) bakarak, bu noktaların hangi adımda, yani kaçınıcı seviyeden bir alt-üçgenden sonra ayrıştıklarını görebiliriz. $a_0a_1a_2 \dots a_k \dots$ ve $b_0b_1b_2 \dots b_k \dots$ kod uzayının elemanları farklı $a, b \in K$ noktalarının birer kod temsili olsunlar. Bu iki nokta birbirinden farklı ise uygun bir i değerinde $a_i \neq b_i$ olacaktır, $k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$ olsun (a ve b noktaları birbirinden farklı olduğundan $\{i \mid a_i \neq b_i\}$ sayı kümesi boş kümeden farklıdır ve $k > 0$ 'dır). Bu durumda $\sigma = a_0a_1 \dots a_{k-1}$ olmak üzere, $a, b \in K_\sigma$ ve $a \in K_{\sigma a_k}$, $b \in K_{\sigma b_k}$ olacaktır. Yani $(k-1)$. adımda aynı K_σ alt-üçgeninin elemanı olan bu noktalar, k . adımda farklı k .seviyeden alt-üçgenin içinde yaşamaktadırlar. k sayısının tek veya çift olması son derece önemlidir. k 'nın tek olması durumunda bu iki noktanın içinde buldukları alt-üçgende, bir seviye aşağıdaki alt-üçgenlerin birbiriyle bağlantısı tam olarak $SG(2)$ 'deki gibi, k 'nın çift olması durumunda ise $SG(3)$ 'teki gibi olacaktır.

Genel duruma hâkim olmak için, Teorem 3.1.'de de görüleceği üzere $k = 0$ ve $k = 1$ durumlarının incelenmesi yeterli olacaktır. Bir $x \in \{4,5, \dots, 9\}$ sayısının eşleniğini yani \tilde{x} sayısını $\tilde{4} = 7, \tilde{5} = 8, \tilde{6} = 9$ ve $\tilde{x} = x$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu gösterim, 2. seviyedeki bir alt-üçgenin karşısındaki alt-üçgeni adreslemek için kullanılacaktır.

Bir $t \in \{1,2,3\}$ için V_t^j , t sayısına karşılık K_j ($j = 1,2,3$) alt-üçgeninin (yani 1. seviyedeki $f_j(K)$ kopyasının) şu şekildeki köşe noktasını belirtsin: K_j alt-üçgeninin (konveks zarfı olan eşkenar üçgenin); V_1^j sol alt köşesi, V_2^j sağ alt köşesi ve V_3^j de diğer köşesi olsun.

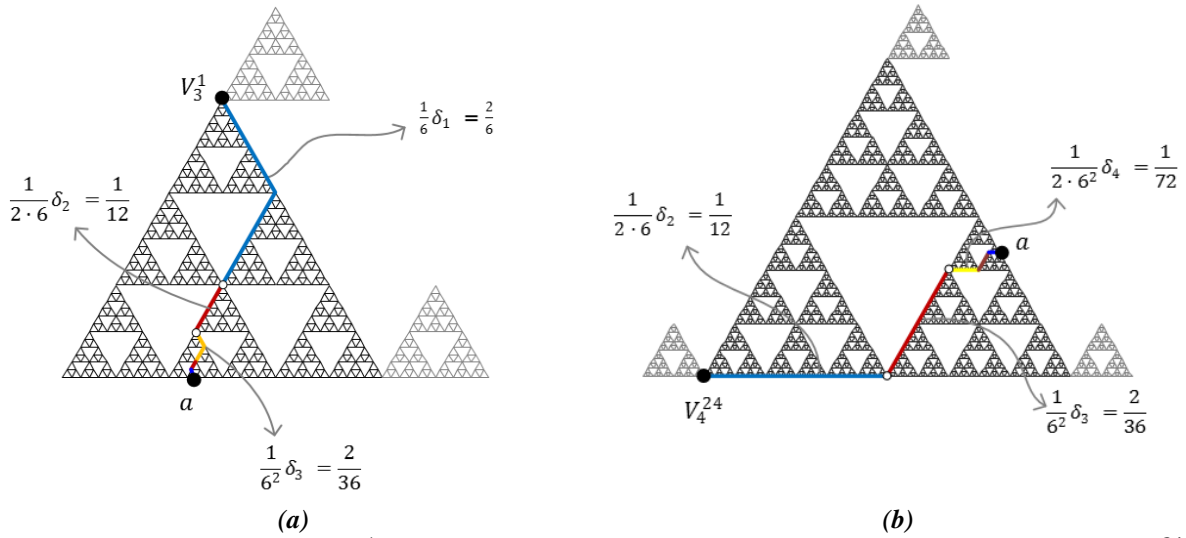
$a_0a_1a_2 \dots a_k \dots$ kodunun belirlediği bir a noktasının 1. seviyede ve içinde bulunduğu alt-üçgenin bir köşesi olan $V_t^j = V_t^{a_0}$ 'a olan (içsel metriğe göre) uzaklığı, $i > 0$ için

$$\delta_{2i-1} := \begin{cases} 0, & a_{2i-1} = t + 3 \\ 1, & a_{2i-1} \neq \widetilde{t + 3} \text{ ve } a_{2i-1} > 6 \\ 2, & \text{d. d.} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \delta_{2i} := \begin{cases} 0, & a_{2i} = t \\ 1, & a_{2i} \neq t \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(a, V_t^{a_0}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{2i-1}}{6^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{2i}}{6^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{2i-1} + 2^{-1} \delta_{2i}}{6^i}$$

şeklinde ifade edilebilir (örnek için bkz. Şekil 11 a). a noktasının kendisinin K_{a_0} alt-üçgeninin bir köşesi olması durumunda, bu nokta aynı zamanda başka bir 1. seviyeden alt-üçgenin de köşe noktası olabilir. Fakat bu seçimin hesabın sonucunu değiştirmeyeceği kolaylıkla görülebilir.



Şekil 11. a) $a \in K_1$ noktasının V_3^1 köşe noktasına uzaklığını veren doğru parçaları b) $a \in K_{24}$ noktasının V_4^{24} köşe noktasına uzaklığını veren doğru parçaları

Noktanın 1. seviyedeki V_t^j köşe noktasına uzaklığını hesaplarken,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{2i-1}}{6^i}$$

değeri, kod temsilindeki “tek” indisli terimlerden gelen doğru parçalarının uzunlukları toplamını,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{2i}}{6^i}$$

değeri ise “çift” indisli terimlerden gelen toplamı göstermektedir. (k . seviyeden alt-üçgenlerin (konveks zarfı olan eşkenar üçgenlerin) bir kenar uzunluğu $k = 2i - 1$ şeklinde tek sayı ise $\frac{1}{2^i 3^{i-1}} = \frac{3}{6^i}$, $k = 2i$ şeklinde çift ise $\frac{1}{6^i}$ şeklindedir.)

1. seviyedeki duruma benzer şekilde, $j \in \{1,2,3\}$, $k \in \{4,5, \dots, 9\}$ için 2. seviyedeki bir K_{jk} alt-üçgeninin; V_4^{jk} sol alt köşesi, V_5^{jk} sağ alt köşesi ve V_6^{jk} da diğer köşesi olsun. a noktasının ikinci seviyede içinde bulunduğu K_{jk} alt-üçgeninin bir köşesi olan V_s^{jk} , ya ($s \in \{4,5,6\}$) olan uzaklığı ise,

$$d(a, V_s^{jk}) = d(a, V_{s-3}^j) - \frac{1}{6}\delta_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{2i+1} + 2^{-1}\delta_{2i}}{6^i}$$

şeklinde bulunabilir (örnek için bkz. Şekil 11b). (Daha anlaşılır ve uyumlu olması adına, 1. seviyedeki alt-üçgenlerin köşeleri için 1,2,3 sayıları kodlama kullanırken, 2. seviyedeki alt-üçgenlerin üç köşesi için 4, 5, 6 sayıları kodlama için kullanılmaktadır.) Burada noktalar 2. seviyedeki alt-üçgenlerde ayrıştıkları için 1. terimden yani a_1 'den toplam uzunluğa bir katkı gelmeyecektir.

Noktanın kodundaki a_k terimine bağlı olarak o noktanın içinde bulunduğu (1. veya 2. seviye) alt-üçgenin köşe noktasına uzaklığında bu terimden gelecek olan katkı ilgili uzunluk değerinin 0, 1 veya 2 katı olabilir. Noktanın içinde bulunduğu (1. veya 2. seviye) alt-üçgenin bir köşe noktasına olan uzaklığı, tüm terimlerden gelen bu katılar toplanarak belirlenmektedir.

■ Öncelikle $a_0 \neq b_0$ durumunu inceleyelim, yani $k = 0$ olsun (bu durumdaki hesabın benzeri $SG(2)$ için [6] çalışmasında yapılmıştır). Daha açık olarak ilk adımda bu noktalar farklı kopyalarda olsun, varsayalım $a \in K_1, b \in K_2$ olsun, yani $a_0 = 1, b_0 = 2$ olsun

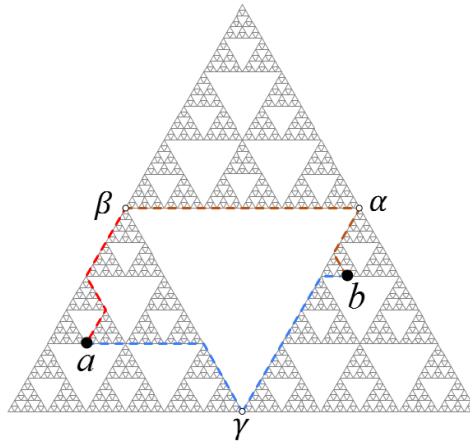
Bu durumda a ve b noktaları arasındaki en kısa uzaklığı yani jeodezik uzunluğu α, β, γ (kesişme veya köşe) noktaları sırasıyla $K_2 \cap K_3, K_1 \cap K_3$ ve $K_1 \cap K_2$ arakesit kümelerinin yani 1. seviyeden alt-üçgenlerin kesişim noktası olmak üzere açıktır ki (Şekil 12)

$$d_1(a, b) = \min \left\{ d(a, \gamma) + d(b, \gamma), d(a, \beta) + d(b, \alpha) + \frac{1}{2} \right\}$$

şeklinde ya da başka bir ifade ile

$$d_1(a, b) = \min \left\{ d(a, V_2^1) + d(b, V_1^2), d(a, V_3^1) + d(b, V_3^2) + \frac{1}{2} \right\} \quad (3)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada 1. seviyedeki bir alt-üçgenin (aslında bu alt-üçgenin konveks zarfı olan eşkenar üçgenin) bir kenar uzunluğunun $1/2$ olduğuna dikkat edelim. α noktasının kod temsilleri $26\overline{36}$ ve $35\overline{25}$, β noktasının $16\overline{36}$ ve $34\overline{14}$, γ noktasının ise $15\overline{25}$ ve da $24\overline{14}$ şeklindedir.



Şekil 12. 1. seviyede farklı alt-üçgenlerde olan iki nokta arasındaki olası jeodezikler

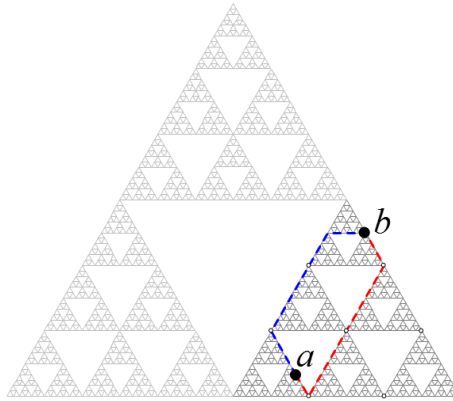
Bu tespitlerden sonra, $k = 0$ durumunda, $a_0 = 1, b_0 = 2$ varsayımımızı kaldırırsak, birbirinden farklı olan a_0 ve b_0 değerlerine bağlı olarak a ve b noktaları arasındaki jeodezik uzaklığı olan $d_1(a, b)$, (3)

denklemden hareketle, $c_0 = 6 - a_0 - b_0$ olmak üzere

$$d_1(a, b) = \min \left\{ \frac{1}{2} + d(a, V_{c_0}^{a_0}) + d(b, V_{c_0}^{b_0}), d(a, V_{b_0}^{a_0}) + d(b, V_{a_0}^{b_0}) \right\} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

■ Şimdi de $k = 1$ durumunu inceleyelim: $a_0 = b_0, a_1 \neq b_1$ (metriğin simetrisinden dolayı $a_1 < b_1$ olduğunu kabul edelim). Yani ikinci adımda bu noktalar farklı kopyalarda olsun (örnek olarak, bkz. Şekil 13). Bu aşamada önemli olan nokta yine, her bir noktanın uygun bir $s \in \{4,5,6\}$ için V_s^{jk} köşe noktalarına uzaklığının hesaplanmasıdır.



Şekil 13. 2.seviyede farklı alt-üçgenlerde (K_{24} ve K_{26}) olan iki nokta arasındaki olası jeodezikler

Bu durumda a ve b noktaları arasındaki en kısa uzaklığı yani jeodezik uzunluğu $d_2(a, b)$, $c_1 = 15 - a_1 - b_1, e_1 = 15 - \tilde{a}_1 - \tilde{b}_1$ ve a'_1, a''_1 sayıları da $a'_1 < a''_1, a_1 + a'_1 + a''_1 = 15$ koşullarını sağlayan sayılar olmak üzere

$$d_2(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{6} + \min \left\{ d(a, V_{b_1}^{a_0 a_1}) + d(b, V_{a_1}^{b_0 b_1}), \frac{1}{6} + d(a, V_{c_1}^{a_0 a_1}) + d(b, V_{c_1}^{b_0 b_1}) \right\} & , a_1, b_1 \in \{4,5,6\} \\ \min \left\{ d(a, V_{\tilde{a}_1}^{a_0 a_1}) + d(b, V_{\tilde{b}_1}^{b_0 b_1}), \frac{1}{6} + d(a, V_{e_1}^{a_0 a_1}) + d(b, V_{e_1}^{b_0 b_1}) \right\} & , a_1, b_1 \in \{7,8,9\} \\ \frac{1}{6} + d(b, V_{a_1}^{b_0 b_1}) + \min \left\{ d(a, V_{a'_1}^{a_0 a_1}) + d(a, V_{a''_1}^{a_0 a_1}) \right\} & , a_1 = \tilde{b}_1 \\ \min \left\{ d(a, V_{3+c_1}^{a_0 a_1}) + d(b, V_{a_1}^{b_0 b_1}), \frac{1}{6} + d(a, V_{\tilde{b}_1}^{a_0 a_1}) + d(b, V_{\tilde{b}_1}^{b_0 b_1}) \right\} & , \text{d. d.} \end{cases} \quad (5)$$

şeklinde hesaplanabilir. (5) denklemini doğrulamak için, [8] çalışmasında $SG(3)$ durumunda detaylıca özetlendiği üzere, a_1 ve b_1 'in tüm olasılıkların kontrol edilmesi yeterli olacaktır. Bu standart kontrol işlemi okuyucuya bırakılmıştır.

Gelinen noktada, a ve b noktalarının 1. veya 2. seviyede birbirlerinden ayrılması durumunda aralarındaki içsel metrik ifadesi ya da jeodezik uzaklık (4) ve (5) denklemleri ile elde edilebilir.

k sayısının 0 ve 1'den farklı olması durumunda, kümenin kendine benzerliğinden yararlanarak hemen bir genelleme yapmak mümkündür. Bu kümenin aslında 18 tane $1/6$ 'lık benzerlik dönüşümlerinden oluştuğu daha önce de söylenmişti. Bu durumda, söz gelimi 3. seviyede ayrılan noktalar arasındaki uzaklığı hesaplamak için, 3. seviyedeki ilgili alt-üçgende hesap yapmak yerine, noktaların kod

temsilinde ilk iki terimi atarak elde edilen noktaların (ki bu noktalar artık 1. terimde fark eden yani daha 1. seviyede ayrılan noktalar olacaktır) uzaklığı hesaplanarak $1/6$ ile çarpılır.

Sonuç olarak genel durum şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 3.1. $a, b \in K$ noktaları verilsin. $a_0 a_1 a_2 \dots a_k \dots$ ve $b_0 b_1 b_2 \dots b_k \dots$ sırasıyla bu noktaların kod temsilleri ve $k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$ ve $a_k < b_k$ olsun. Bu durumda bu farklı iki nokta arasındaki (içsel metriğe göre) uzaklık $d_{iç}(a, b)$, $a_k a_{k+1} \dots a_n \dots$, $b_k b_{k+1} \dots b_n \dots \in A_9$ elemanlarının belirlediği noktalar \bar{a} ve \bar{b} olmak üzere

$$d_{iç}(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{6^{\frac{k}{2}}} d_1(\bar{a}, \bar{b}) & , \quad k \text{ çift} \\ \frac{1}{6^{\frac{k-1}{2}}} d_2(\bar{a}, \bar{b}) & , \quad k \text{ tek} \end{cases} \quad (6)$$

şeklinde bulunur ($a_k > b_k$ ise $d_{iç}(b, a)$ için (6) eşitliği ve metriğin simetrik olması kullanılarak $d_{iç}(a, b)$ bulunur).

Teorem 3.1.'de açık ifadesi yazılan d fonksiyonu ile ilgili kümenin (K) bir içsel (hatta kesin içsel) metrik uzay olduğu metriğin inşasından açıktır. Bu noktada içsel metrik için verilen ifadenin, noktaların kod temsili seçiminden bağımsız olduğu da yine dikkatli okuyucular tarafından rahatlıkla doğrulanabilir.

(6) denklemini ile verilen bu ifade yardımı ile bu kümenin, içsel metriğe göre bazı özellikleri incelenebilir.

B. SG(2,3) ÜZERİNDEKİ JEODEZİKLER

Klasik Sierpinski üçgeni $SG(2)$ ve mod-3 Sierpinski üçgeni $SG(3)$ kümeleri üzerinde ne tür jeodeziklerin orataya çıktığı bir önceki ana bölümde belirtilmişti (bkz. [6], [8]). $SG(2,3)$ durumunda da, hem $SG(2)$ hem de $SG(3)$ kendine benzer kümelerindeki davranış kısmen yaşamaya devam edeceğinden, daha önce bu iki kümede ortaya çıkmış olan iki nokta arasındaki jeodezik sayılarının $SG(2,3)$ 'te de var olacağı açıktır. İki nokta arasında 1, 2, 3, 4 veya 5 farklı jeodezik olabileceği gibi, örneğin 16, 48, 144 veya 13312 (bkz. [8], Örnek 3.5), hatta sonsuz farklı sayıda da jeodeziğin var olması mümkündür.

Not: $SG(2,3)$ gibi $SG(3,2)$ düzensiz ölçekli Sierpinski üçgenini üzerindeki içsel metrik de yine benzer şekilde ifade edebilir ($SG(3,2)$ 'deki farklılık, önce $1/3$ 'lük sonra $1/2$ 'lik benzerlik dönüşümlerinin kullanılması olacaktır). Açıktır ki $SG(3,2)$, 6 tane $1/3$ oranında küçültülmüş $SG(2,3)$ 'ten oluşmaktadır. Bu nedenle üzerindeki içsel metrik, bu çalışmada verilen ifadeye son derece yakın ve benzer biçimde kolayca verilebilir.

IV. SONUÇ

Daha önce klasik Sierpinski üçgeni ve bazı diğer klasik fraktallerin üzerindeki içsel metriğin ifade edilmesi için kullanılan bu yöntem, yani kümenin noktalarının kod temsillerinin kullanılması, $SG(2,3)$ gibi farklı karakterde bir kendine benzer küme üzerindeki içsel metriği ifade etmek için kullanılmıştır. Burada önemli olan nokta, bu kodlamanın kümenin yapısına uygun bir biçimde ve çok daha farklı bir biçimde yapılmasıdır. Bu çalışmada kullanılan kodlama yöntemi ile, farklı düzensiz ölçekli Sierpinski üçgenlerinin üzerindeki içsel metriğin detaylı incelenmesi ve üzerindeki jeodeziklerin de araştırılması mümkün olabilecektir.

TEŞEKKÜR: Bu çalışma Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri tarafından desteklenmiştir (Proje no: 19ADP113).

V. KAYNAKLAR

- [1] R.Hilfer ve A. Blumen, “Renormalisation on Sierpinski-type fractals,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 17, s.10, ss. 537-545, 1984.
- [2] M.T. Barlow ve B.M. Hambly, “Transition density estimates for Brownian motion on scale irregular Sierpinski gaskets,” *Annales de l'Institut Henri Poincare Probabilities et Statistiques*, c. 33, s. 5, ss. 531-557, 1997.
- [3] B.M. Hambly, “Brownian motion on a random recursive Sierpinski gasket,” *Ann. Probab.*, c. 25, ss. 1059-1102, 1997.
- [4] S.C. Chang ve L.C. Chen, “Number of connected spanning subgraphs on the Sierpinski gasket,” *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, c. 11, s. 1, ss. 55-77, 2019.
- [5] D. Burago, Y. Burago ve S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, USA: AMS, 2001.
- [6] M. Saltan, Y. Özdemir ve B. Demir, “An explicit formula of the intrinsic metric on the Sierpinski gasket via code representation,” *Turk. J. Math.*, c. 42, ss. 716-725, 2018.
- [7] M. Saltan, Y. Özdemir ve B. Demir, “Geodesics of the Sierpinski gasket,” *Fractals*, c. 26, s. 3, 1850024, 2018.
- [8] Y. Özdemir, “The intrinsic metric and geodesics on the Sierpinski gasket SG(3),” *Turk. J. Math.*, c. 43, ss. 2741-2754, 2019.
- [9] Y. Özdemir, M. Saltan ve B. Demir, “The Intrinsic Metric on the Box Fractal,” *Bull. Iran. Math. Soc.*, c. 45, ss. 1269-1281, 2019.
- [10] J. E. Hutchinson, “Fractals and Self-similarity,” *Indiana Univ. Math. J.*, c. 30, ss.713–747, 1981.
- [11] G. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, New York: Springer, 2008.
- [12] K.J. Falconer, “Sub-self-similar sets,” *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 347, s. 8, ss. 3121-3129, 1995.
- [13] D.W. Spear, “Measures and self-similarity,” *Adv. in Math.*, c. 91, s. 2, ss. 143-157, 1992.
- [14] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, San Diego: Academic Press, 1988.
- [15] W. Sierpinski, “Sur une courbe dont tout point est un point de ramification,” *C.R.Acad.Sci.*, c. 160, ss. 302-305, 1915.
- [16] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [17] J. Gu, Q. Ye ve L. Xi, “Geodesics of higher-dimensional Sierpinski gasket,” *Fractals*, c. 27, s. 4, 1950049, 2019.