



HAVA LİDARI VERİLERİNE UYGULANAN FARKLI ENTERPOLASYON YÖNTEMLERİNİN SAM DOĞRULUĞUNA ETKİSİ

¹Duygu ARIKAN , ²Ferruh YILDIZ , ³Hasan Bilgehan MAKİNECİ 

Konya Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Konya, TÜRKİYE

¹darikan@ktun.edu.tr, ²fyildiz@ktun.edu.tr, ³hbmakineci@ktun.edu.tr

(Geliş/Received: 30.12.2020; Kabul/Accepted in Revised Form: 27.01.2021)

ÖZ: Sayısal Arazi Modelleri (SAM), konu olarak birçok uygulama alanı tarafından benimsenmiştir. Özellikle sivil amaçlı mühendislik çalışmaları, coğrafi bilgi sistemleri gibi çeşitli sektörlerde kullanılmaktadır. SAM'ların üretimi yapılırken, daima güncel olması gerektiği için hızlı üretilebilir olmalı, kullanıcılar için yeterli doğrulukta olmalı ve üretimi ekonomik olmalıdır. SAM'ın doğruluğunu etkileyen önemli faktörlerden birisi, tercih edilen enterpolasyon yöntemidir. Bu çalışmada ağırlıklı ortalama ile enterpolasyon, polinom enterpolasyon, multikvadrik enterpolasyon, üçgenler ağında lineer enterpolasyonu, küçük eğrilikli yüzey enterpolasyonu ve en yakın komşu enterpolasyon yöntemleri öncelikle teorik olarak açıklanmıştır ardından endüstriyel yazılımla araziye ait noktalar modelde test edilmiştir. Literatürde SAM çalışmalarında sık kullanılan bu altı farklı enterpolasyon yöntemlerine ait standart sapma sonuçlarının karşılaştırılması yapılan çalışmada en önemli amaçtır. Sonuçlar üzerinde uyumsuz ölçülerin ayıklanması için sigma testi uygulanmıştır. Sonra, çalışılan arazi üzerinde sabit bir alan içerisinde toplamda 1250 nokta olacak şekilde, iki farklı alan belirlenmiştir. Bu alanlar için dayanak ve örneklem sayıları farklı olarak ayarlanmıştır. Daha sonra her bir enterpolasyon yöntemi kullanılarak, arazi modeli tekrar incelenmiş ve aralarındaki sonuç değerlendirilmiştir. Araştırmalar sonucunda ağırlıklı ortalama yöntemin diğerlerine göre daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı Ortalama Enterpolasyonu, En Küçük Eğrilikli Yüzey, En Yakın Komşu Enterpolasyonu, Lineer Enterpolasyon, Multikvadrik Enterpolasyon, Polinom Enterpolasyonu, Sayısal Arazi Modeli (SAM)

The Effect of Various Interpolation Methods Applied at Aerial Lidar Data on DTM Accuracy

ABSTRACT: Many application areas have approved Digital Terrain Models (DTM) as a subject. It is primarily used in many sectors, such as civil engineering studies, geographical information systems. When producing DTMs, they should be fast-produced, as they should always be up-to-date, sufficient accuracy for users and economical to manufacture. One of the essential factors affecting the accuracy of DTM is the selected interpolation method. In this study, weighted average interpolation, polynomial interpolation, multi quadratic interpolation, linear interpolation in the network of triangles, small curvature surface interpolation, and the nearest neighbor interpolation methods were explained theoretically and then the points of the area were tested in the model with the Surfer program. The comparison of standard deviation results of these six different interpolation methods, which are frequently used in DTM studies in the literature, is the most crucial purpose of the study. A sigma test was used to eliminate unsuitable measurements on the results. Then, two different areas were determined, with a total of 1250 points in a fixed area on the investigated area. The number of bases and samples for these areas are arranged differently. Then, using each interpolation method, the land model was reexamined, and the result

between them was evaluated. As a result of the researches, it is discovered that the weighted-average method gives better results than others.

Key Words: *Digital Terrain Model (DTM), Linear Interpolation, Multiquadratic Interpolation, Polynomial Interpolation, Small Curvature Surface Interpolation, The Nearest Neighbour Interpolation, Weighted Average Interpolation*

GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüzde konumsal bilginin üretilmesi güncel, yüksek doğrulukta ve hızlı bir şekilde gerçekleştirilmektedir. Bu bilginin üretilip modellenmesi için ara değerlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun içinde enterpolasyon yöntemleri geliştirilmiştir (Watson,1992). Günümüzde bilgisayar ve yazılım biliminin gelişmesi ile bu ihtiyaçların karşılanması kolaylaşmıştır. Üzerinde yaşadığımız dünya yüzeyi gibi düzgün olmayan yüzeylerin matematiksel olarak ifade edilmesinde zorluklar yaşanmaktadır. Bir arazinin veya arazinin bir kısmının doğru ifade edilebilmesi için yüzeydeki tüm noktaların koordinatı (x,y,z) bilinmesi gerekir. Fakat bu da pratikte mümkün olamamaktadır. Arazi üzerinde yeterli sıklıkta dağılmış koordinatı bilinen noktalara "Dayanak noktası" ya da "referans noktası" denir. Örnekleme noktaları yardımıyla modellenir. Dayanak noktalarının yüzeyde eşit sayı ve miktarda olmayan bir dağılım göstermesi yani rastgele bir durumu olması modellemede karşılaşılan bir durumdur. Yüzey modellemesi birden fazla şekilde yapılabilmektedir. Yüzey tek bir fonksiyonla ifade edilebilir ya da üçgenlere veya çoklu poligonlara parçalanarak (kare, dikdörtgen vs.) kısım kısım da yapılabilmektedir. Özellikle arazi yükseklikleri, sayısal arazi modellemesi yapılırken kullanılmaktadır.

ABD Jeolojik Araştırmalar Merkezi (USGS) tarafından SYM, yatayda x ve y eksenleri yönünde sabit oranlarda karelajlara ayrılmış ve düşeyde ortak bir datuma dayandırılmış yükseklik (z) değerlerini içeren arazinin sayısal kartografik benzerini gösteren bir yöntem olarak ifade edilmiştir (Yastıklı ve Jacobsen,2003). Kısacası x,y,z arazi yüzeyinin, bir benzerinin sayısal olarak gösterilmesidir. Bazı durumlarda SYM ve SAM (Sayısal Arazi Modeli) kavramları karıştırılmaktadır. SAM, SYM'den daha geniş kapsamlıdır. Yapay ve doğal (dere, kıyı, sırt vb.) önemli topoğrafik detayların, yükseklik değerlerini kapsayan ve yüzeyi en şekilde ifade eden SAM modelidir. Kısacası, SAM arazinin orman, bina bitki örtüsü vb. tüm yükseklikleri içerirken, SYM'ler sadece yeryüzünün topoğrafyasını yansıtır. SAM'ların üretimi SYM'lere göre daha uzun sürmektedir. Çünkü arazinin karakteristik detaylarına ait bilgilerin toplanması gibi bir problem söz konusudur. SYM'ler fiziksel yeryüzünü bütünüyle temsil edememektedir (Yanalak,2002). Bu sebeple yüzeyde bulunan tüm noktalar tanımlanamayacaktır. Bunun yerine örnekleme noktalarının yardımıyla ve uygun enterpolasyon fonksiyonunun seçilmesiyle modelleme yapılabilir.

SAM üretimi için hava fotoğrafları, uydu görüntüleri veya lidar verileri kaynak olarak kullanılmaktadır. Günümüzde lidar verilerinden yüksek kaliteli SAM üretimi yer bilimlerinde, mühendislik projeleri, jeomorfoloji, ormanlık alanlarının tespiti gibi sıkça kullanılan uygulamalar arasında yer almakta ve önemli bir rol üstlenmektedir (Liu ve Zhang,2011; Tarolli,2014; Montealegre ve diğ., 2015; Yang ve diğ., 2016; Bigdeli ve diğ., 2020). Lidar verileri, diğer uzaktan algılamadan üretilen verilere kıyasla yüksek konumsal çözünürlüğe (1 m'den daha az) sahiptir (Razak ve diğ., 2011). Lidar verilerindeki nokta bulutunun sık olması, SAM'ların üretiminde sıkıntılar meydana getirebilir (Shi ve diğ., 2009). Bu nedenle birçok çalışmada farklı enterpolasyon yöntemleri kullanılmış ve yöntemler arasındaki farklılıklar karşılaştırılmıştır. Örneğin, Chen ve diğ. (2018) radyal bazlı fonksiyon (RBF) ve kriging yöntemi kullanmış ve RBF yönteminin daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir.

Enterpolasyon yöntemlerinin birbirleriyle farklı yanları olduğu gibi, ortak tarafları da vardır. Örnek olarak, multikuadrik yöntem ile polinom enterpolasyonunun amacı yüzeyi tek bir fonksiyonla elde etmektir. Ya da multikuadrik ve en küçük eğrilikli yüzey enterpolasyonu uygulanırken öncelikle trend yüzeyi geçirilir. Bir başka yöntem olan ağırlıklı ortalama yönteminde ise çevresinde bulunan dayanak noktalarının ortalaması alınarak, noktanın yüksekliği hesaplanır. Bu yöntemle benzer şekilde, en küçük eğrilikli yüzey enterpolasyonunda da üçgen köşe noktalarına ait artık değerlerin ortalaması alınır.

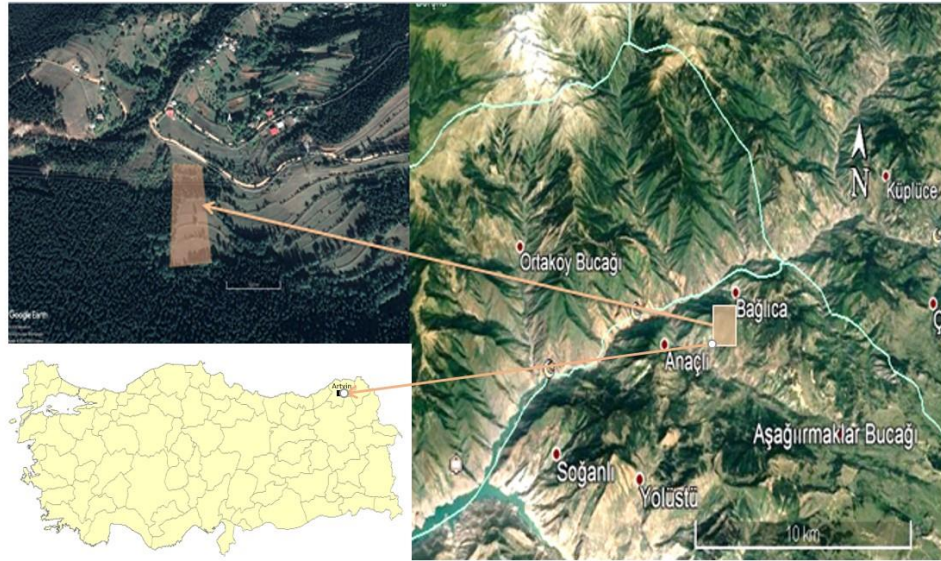
Ağırlıklı ortalama yöntemine benzeyen bir başka yöntem ise en yakın komşuluk yöntemidir. Bu yöntemde de çevresinde bulunan dayanak noktalarından yararlanır. Fakat ağırlıklı ortalaması alınmaz, çevresindeki en yakın noktanın yükseklik değerini kabul eder. Üçgenler ağında lineer enterpolasyonu diğer yöntemlere göre biraz farklı olarak sayılabilir. Bu yöntemde üçgenlerden her biri tam yatay düzlem değil de eğik olarak kabul edilir.

Bu çalışmada, hava lidari verileri kullanılarak sayısal arazi modellemesinde kullanılan enterpolasyon yöntemine ait sonuçlar incelenmiştir. Yaygın olarak kullanılan enterpolasyon yöntemleri olarak ağırlıklı ortalama, polinom, multiküadratik, üçgenler ağında lineer, en küçük eğrilikli yüzey, en yakın komşu enterpolasyonu seçilmiştir. Belirli bir bölgeye ait olan verilerin, Surfer programında tüm enterpolasyon yüzeyleri oluşturulmuştur. Ayrıca daha sonra yöntemlerin sonuçları değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlara sigma testi uygulanmış ve sonuçlar tekrar değerlendirilmiştir. Çalışmamızın amacı; simülatif veri yani teorik test yüzeyi yerine gerçek bir yüzey alanı kullanılmıştır. Böylece, gerçeği temsil etmesi ve güvenilir, ispat edilebilir olması hedeflenmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM (MATERIAL AND METHOD)

Çalışma Bölgesi (Study Area)

Bu çalışmada hava lidari ile üretilen veri seti, Artvin ili Borçka ilçesi sınırlarında kalan bir vadinin 20 cm aralıklarla modellenebilecek şekilde gerçekleştirilmiştir (Şekil 1). Çalışmada üretilen toplam nokta sayısı milyardan fazla olduğu için işlemlerin kolaylaştırabilmesi için sadece bir kısmı kullanılmıştır.



Şekil 1. Çalışma Alanı; Artvin ili

Figure 1. Study area; Artvin Province

SAM Üretiminde Kullanılan Enterpolasyon Yöntemleri (Interpolation Methods Used In DTM)

Bu çalışmada enterpolasyon yöntemi olarak beş farklı yöntem kullanılmıştır. Bunlar şu şekilde sıralanabilir:

- Ağırlıklı Ortalama ile Enterpolasyon,
- Polinom Enterpolasyonu,
- Multiküadratik Enterpolasyon,
- Üçgenler Ağında Lineer Enterpolasyon,
- En Küçük Eğrilikli Yüzey Enterpolasyonu ve

- En Yakın Komşu Enterpolasyonu.

Ağırlıklı Ortalama ile Enterpolasyon (Interpolation with Weighted Average)

Ağırlıklı ortalama ile enterpolasyon yönteminde, enterpole edilecek noktanın z (yükseklik) değeri, etrafındaki dayanak noktalarına ait yüksekliklerden ağırlıklı ortalamaları alınarak hesaplanmaktadır. Dayanak noktalarından her birinin yüksekliği verilecek olan ağırlık değerinin enterpolasyon noktasına olan uzaklığının bir fonksiyonudur (Franke ve Nielson, 1980). Enterpolasyon noktasının yüksekliği (1) ile bulunur (Zhan-Ji,1998).

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^m p_i z_i}{\sum_{i=1}^m p_i} \quad (1)$$

Eşitlik açık şekilde yazılırsa (2) gibi sonsuza yakınsar.

$$z_0 = \frac{(p_1 \times z_1) + (p_2 \times z_2) + \dots + (p_3 \times z_3)}{(p_1 + p_2 + \dots + p_3)} \quad (2)$$

Bu eşitlikte:

Z_0 = Enterpolasyon noktasının yüksekliği,

z_i = Dayanak noktalarının yüksekliği,

p_i = Dayanak noktalarına etki edecek (atanacak) ağırlık değerleri,

m = Dayanak Noktasının sayısıdır.

Dayanak noktası ile enterpolasyon noktası arasındaki mesafe (s_i) olmak üzere, (x_0, y_0) yüksekliği hesaplanarak enterpolasyon noktasının koordinatı ve (x_i, y_i) dayanak noktalarından herhangi birinin koordinatları belirlenir. Bu durumda, ağırlık fonksiyonu (3) olur.

$$(s_i^2)^{-k} = [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]^{-k} \quad (3)$$

Ağırlık değerleri olarak; $p_i = (s_i^2)^{-k}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) kullanılabilceği gibi, (4) Gauss fonksiyonu da kullanılabilir (Güler,1978;1985).

$$p_i = e^{(-s_i^2/k^2)} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

Geniş arazi çalışmalarında yapılan enterpolasyonda, yüksekliği belirlenecek enterpolasyon noktasından uzakta bulunan noktaları çözüme dahil etmek sonucu olumsuz şekilde etkiler. Bu etkinin giderilmesi için iki çözüm önerisi sunulmaktadır. Birincisi, dayanak noktalarının hepsini kullanmak yerine sadece enterpole edilecek noktanın çevresinde bulunan dayanak noktalarını kullanmakla çözüm yapılabilir. Dayanak noktalarının seçiminde ise genellikle enterpolasyon noktası üzerinde daire ya da dikdörtgen çizilerek tespit edilir. Böylece enterpolasyonu yapılacak noktanın yüksekliği kritik daire ya da dikdörtgen içerisinde kalan dayanak noktalarının yükseklikleri yardımıyla belirlenir. İkincisi, Lee (Lee ve Preparata,1984), Watson (Watson ve Philip,1984) ve Sibson (1977)'in yapmış oldukları çalışmalarda enterpolasyon noktasının doğal komşularını kullandıklarını ifade etmişlerdir. Düzlemde olan ve çevrel çember içerisinde dayanak noktasından başka nokta olmayacak şekilde üçgenleme yapılırsa, bu Dealunay üçgenlemesi ismini alır (Yanalak,2002). Doğal komşuların birleştirilmesiyle oluşan bu üçgenler genelde eşkanar üçgen olmaktadır. Dar açılı üçgenlerin meydana gelmesi durumunda birbirine uzak olan ve aralarında doğrudan ilişki bulunmayan noktalar arasında doğrusal bir ilişki kurulamaz. Doğal komşular kullanıldığında, dikdörtgen veya kritik daire boyutunun belirlenmesi durumu da ortadan kalkmaktadır (Yanalak,2002).

Polinom Entropolasyonu (Polynomial Interpolation)

Yüzey modellemede çok kullanılan yöntemlerden biri de, polinom entropolasyonudur. Bu yöntemin temelinde, çalışılan alan sadece bir fonksiyonla ifade edilir. Fonksiyonun katsayıları, dayanak noktalarına ait koordinatlardan (x, y, z) faydalanılarak bulunur. Yüzey genellikle iki değişkenli ve daha yüksek dereceden polinomlarla gösterilebilir. Bilinen dayanak noktaları ile yararlanılan koordinatların oluşturduğu yüzey, n . dereceden ortogonal ya da ortogonal olmayan iki değişkenli polinomlar kullanılarak ifade edilebilir.

Ortogonal polinomlarla yüzey belirlenirken kullanılacak matematiksel model (5) ile ifade edilir.

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} a_{ij} x^i y^j \quad (5)$$

Ortogonal polinomlarda; $n = 0$ seçildiğinde yüzey düzlem, $n = 1$ seçildiğinde yüzey lineer, $n = 2$ seçildiğinde oluşturulan yüzey kuadratik, $n = 3$ seçildiğinde oluşturulan yüzey kübik, $n = 4$ seçildiğinde oluşturulan yüzey kuartik, $n = 5$ seçildiğinde oluşturulan yüzey kuintik olarak adlandırılır. Ayrıca seçilen yüzeye göre de dayanak nokta sayısı belirlenmelidir. Örneğin, yüzey derecesi 1 seçildiğinde gereken dayanak nokta sayısı 3 ya da yüzey derecesi 2 seçildiğinde en az 6 dayanak noktasına ihtiyaç vardır (İnal,1996).

Ortogonal olmayan polinomlarla entropolasyonda kullanılan matematiksel model (6) ile gösterilir.

$$z(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (6)$$

Burada (6) a_{ij} : Polinomun bilinmeyen katsayılarını, n : Yüzey modelinin derecesi, i, j : Pozitif tam sayı olmak üzere (x, y) koordinatlarının üslü değerini ifade etmektedir (Erkanlı,1986).

Bu matematiksel ifadenin çözümü de ortogonal polinomların çözümü gibi yapılmaktadır. En az bilinmeyen sayısı kadar dayanak noktası gereklidir. Ortogonal olmayan polinomlarda seçilen dereceye göre yüzey farklı isimler alır. Örnek olarak, $n = 0$ seçildiğinde yüzey "düzlem" değerini alırken, $n = 1$ değeri seçildiğinde yüzey "bi-lineer", $n = 2$ seçildiğinde "bi-kuadratik" ve $n = 3$ seçildiğinde oluşturulan yüzey "bi-kübik" olarak isimlendirilir (Yılmaz,2019).

Buna göre (6) eşitliğinde yüzey derecesi 2 olarak seçilirse k 'nın katsayısı değerleri 0, 1 ve 2 olmaktadır. Bu durumda x, y koordinatlarının üslü ifadeleri (i, j) için, $k = 0 \Rightarrow (i = ,0 j = 0)$; $k = 1 \Rightarrow (i = ,0 j = 1)(i = ,1 j = 0)$; $k = 2 \Rightarrow (i = ,2 j = 0)(i = ,1 j = 1)(i = ,0 j = 2)$ değerlerini almaktadır ve yüzey derecesi 2 alındığında, bu polinomun matematiksel ifadesi (7) şeklinde olur.

$$z(x, y) = a_{00} + a_{01}y + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \quad (7)$$

2. dereceden bir polinomun çözülebilmesi için 6 adet bilinmeyen hesaplanmalıdır. Yani toplamda 6 dayanak noktası (x, y, z) bilinen) ile 2. derece bir yüzey problemi tamamen çözülebilir. Oluşturulacak yüzey dayanak noktalarından geçer. Eğer bilinmeyenden fazla dayanak noktası kullanılırsa, bu durumda çözüm için gerekenden fazla sayıda eşitlik oluşur ve a_{ij} katsayıları En Küçük Kareler Yöntemine (EKKY) göre dengeleme sonucunda elde edilir. Böyle bir durumda oluşturulacak modelin yüzeyi dayanak noktalarından geçmez. m , dayanak nokta sayısı olmak üzere, 2. derece polinomun düzeltme eşitlikleri $L=1,2,\dots,m$ için (8) gibidir.

$$\Delta z_L = a_{00} + a_{01}y_L + a_{01}x_L + a_{20}x_L^2 + a_{00}x_L y_L + a_{02}y_L^2 - z_L \quad (8)$$

$$\sum_{L=1}^m \Delta z_L^2 = \min \quad (9)$$

Ayrıca (9) eşitliğinden yararlanılarak dengelenmiş yüzeye ait katsayılar bulunarak ve bu yüzey için n. dereceden bir polinom kullanılarak bilinmeyenlerin sayısı artar. Fakat uygulanan işlem adımlarında herhangi bir değişiklik olmaz. Sonuç olarak düzeltme eşitlikleri (10) şeklinde olur.

$$\Delta z_L = z(x_L, y_L) - z_L \quad (10)$$

$L=1,2,\dots,m$

Eşitlik (11)'e göre polinomun bilinmeyen katsayılarının, EKKY yöntemiyle dengelemesi yapılır.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_m & x_m & x_m^2 & x_m y_m & y_m^2 \end{bmatrix} \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{bmatrix} \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

\underline{X} = Polinomun bilinmeyen katsayıları

\underline{A} = Bilinmeyenlere ait katsayılar matrisi

\underline{L} = Dayanak noktalarının yükseklikleri olmak üzere, bilinmeyenler (12) ile çözülür.

$$\underline{N} = \underline{A}^T \cdot \underline{A}, \underline{n} = \underline{A}^T \cdot \underline{L}, \underline{x} = (\underline{N})^{-1} \cdot \underline{n} \quad (12)$$

Yüksekliği hesaplanacak bir noktanın (x_0, y_0) koordinatları polinom çözümünde (10) eşitliğinde yerine konulduğu zaman z_0 yükseklik değeri bulunabilir.

Sonuç olarak, yüzeyin derecesi arttıkça olması gereken dayanak nokta sayısı da artmaktadır. Yeterli sayıda dayanak noktalarının olmaması durumunda bazı hatalar oluşur. Polinom derecesi arttıkça elde edilecek doğruluk orantılı bir şekilde artmaz aksine yüzeyde gereksiz salınımlar meydana getirir ve bu salınımlar gerçeğe uygun olmayan yükseklik değişimlerine sebep olur (Uluğtekin,1994). Bu da yanlış enterpolasyon yöntemi seçilmesi anlamına gelir.

Multiküadrik Enterpolasyon (Multiquadric Interpolation)

İlk olarak 1971 yılında Hardy tarafından çeşitli jeodezik problemlerin çözümü için önerilmiştir. Dağınık olarak ölçülmüş topoğrafik yüzeyleri temsilen kullanılmıştır. Multiküadrik yöntemde amaç dayanak noktalarının tamamını tek bir analitik eşitlikle, aynı anda ifade edilmesidir. Oluşturulan yüzey dayanak noktalarından geçmektedir (Uluğtekin,1994; Akçın,1998; İnal ve Yiğit,2003). Tekniğin uygulanabilmesi için öncelikle kontrol noktaları yardımıyla, m sayıdaki dayanak noktası kullanılarak bir trend yüzeyi geçirilmesi gerekir (Karaaslan ve diğ.,2016). Yapılan uygulamalarda trend yüzeyinin birinci ya da ikinci dereceden polinom kullanılmasının yeterli olduğu tespit edilmiştir (Leberl,1973; Yiğit,2003]. Bu yüzey için polinom, trigonometrik fonksiyonlar veya harmonik seriler kullanılabilir (Yanalak,2002). Trend yüzeyi n. dereceden bir polinom seçilmesi durumunda, polinom enterpolasyonunda olduğu gibi $z(x_j, y_j)$, polinomunun bilinmeyenleri ve dayanak noktalarındaki yükseklikler hesaplanır. Multiküadrik yüzeyin genel ifadesi (13) ve (14) şeklindedir.

$$\Delta z_j = z_j - z(x_j - y_j) \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^m C_j [Q(x_j, y_j, x, y)] = \Delta z \quad (14)$$

m sayıdaki Q yüzeyinin toplamıyla multiküadrik yüzey oluşmaktadır. C_j her bir Q yüzeyinin işaretini ve eğimini göstermekte ve Δz değeri ile hesaplanmaktadır. Literatürde farklı şekillerde multiküadrik yüzeyler önerilmiştir (Hardy,1971). Örneğin bu yüzeyler:

- (15) k sabit bir katsayı olmak koşuluyla, iki yapraklı dairesel hiperboloid serilerinin toplamı,

$$\sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + k]^{\frac{1}{2}} = \Delta z \quad (15)$$

- (16) Dairesel paraboloid serilerinin toplamı,

$$\sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + k] = \Delta z \quad (16)$$

- (17) Dairesel dik konilerin toplamı eşitliklerindeki gibidir.

$$\sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2]^{\frac{1}{2}} = \Delta z \quad (17)$$

Eşitliklerdeki k ifadesi sabit bir katsayıyı belirtmektedir. Dayanak noktalarının bilinen $(x_i, y_i, \Delta z_i)$ değerleri ile C_j katsayılarını bulunur. Yüzey olarak dairesel dik koninin seçilmesi durumunda ve dayanak noktaları için kısaltması ile (17) eşitliği (19) eşitliğine dönüşmektedir.

$$[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2]^{\frac{1}{2}} = a_{ij} \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^m C_j a_{ij} = \Delta z_i \quad (19)$$

Sonuçta n sayıda lineer eşitlik sistemi elde edilir.

Bilinmeyen değerler C_j olup, katsayılar matrisinin gösterimi, $A, c = \Delta z$ şeklinde belirlenir. Eşitlikte \underline{A} ($m \times m$) katsayılar matrisi olmak üzere, \underline{c} ($m \times 1$) bilinmeyenler matrisini ve $\underline{\Delta z}$ ($m \times 1$) yükseklik matrisini ifade etmektedir. A matrisinin köşegen elemanlarının 0 olduğu göz önüne alınırsa (simetrik matris) işlemler daha anlaşılır olur. C_j katsayılarının bulunmasıyla multikvadrik yüzey belirlenir. (x_0, y_0) koordinatları bilinen herhangi bir enterpolasyon noktasının yüksekliği (20) ile hesaplanır.

$$z_0 = z(x_0, y_0) + \Delta z_0 = z(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^m C_j [(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Dayanak noktalarının sayısı fazlaştıkça yöntemdeki hesap miktarında fazlaşır. Bu hesap miktarının artma sebebi C_j katsayıları bulunurken matrisin invers işleminden kaynaklanmaktadır. Ayrıca bu yöntemde dayanak noktaları arasındaki mesafe arttıkça, bu noktaların elde edilecek yüzeye etkisi de azalır (Hardy,1971; Hardy,1972; Hardy,1975; Hardy,1990).

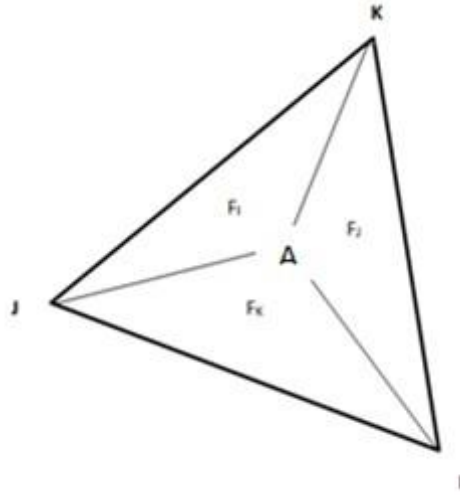
Üçgenler Ağında Lineer Enterpolasyon (Linear Interpolation in Triangles Network)

Çokça kullanılıp tercih edilen enterpolasyon yöntemlerinden biri de, lineer enterpolasyon yöntemidir. Kullanılan üçgenlerden her biri eğik düzlem olarak tanımlanır (Watson ve Philip,1984). Bu yöntem de, enterpolasyonla yüksekliği belirlenecek noktalar, bulunduğu üçgen içerisinde uygulanmaktadır. Bir eğik düzlemin (21) şeklinde ifade edildiği varsayılırsa, oluşan her bir üçgenin 3 köşesine ait a_{00} , a_{10} , ve a_{01} katsayıları için üç farklı eşitlik yazılır.

$$z = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y \quad (21)$$

Yüksekliği bulunacak noktanın x_0, y_0 koordinat değerleri (17) eşitliğinde ilgili yere yazılırsa z_0 yükseklik değeri bulunur. Üçgen ağında lineer enterpolasyonda, ağırlıklı ortalamadan farklı bir işlem

yapılmamaktadır. Bu yöntem de üçgenin köşe noktalarına ait yüksekliklerin ağırlıklı ortalaması alınmaktadır. Herhangi bir köşe noktasının yüksekliği, enterpolasyonu yapılan noktanın o köşeye göre local (yerel) barisentrik koordinatı olarak ifade edilir (Yanalak,2002). IJK üçgenine ait local barisentrik koordinatlar Şekil 2' de sunulmuştur.



Şekil 2. Lokal barisentrik koordinatları

Figure 2. Local barycentric coordinates

Şekil 2' de verilen üçgene ait köşe noktaları I, J ve K'dır. Bu durumda A noktası ait üç ayrı köşe için üç lokal barisentrik koordinat mevcuttur. Bu koordinatların toplamı 1 olmaktadır. A noktasından köşelere çizilen doğrular ile 3 adet üçgen elde edilmiştir. Oluşan her bir küçük üçgenin IJK üçgenine oranlanmasıyla lokal barisentrik koordinatlar bulunmaktadır. Her bir küçük üçgenin alanları F_I , F_J , F_K ile toplam IJK üçgeninin alanı F ile ifade edilirse, A noktasına ait yerel barisentrik koordinatlar,

$P_I = \frac{F_I}{F}$, $P_J = \frac{F_J}{F}$, $P_K = \frac{F_K}{F}$ şeklinde çözülür. Yerel barisentrik koordinatlar, kartezyen dik koordinatları cinsinden ifade edilirse (22), (23), (24) ve (25) şeklinde yazılır.

$$P_I = \frac{(x_J - x_A)(y_K - y_A) - (x_K - x_A)(y_J - y_A)}{B} \quad (22)$$

$$P_J = \frac{(x_K - x_A)(y_I - y_A) - (x_I - x_A)(y_K - y_A)}{B} \quad (23)$$

$$P_K = \frac{(x_K - x_A)(y_I - y_A) - (x_I - x_A)(y_K - y_A)}{B} \quad (24)$$

$$B = (x_J - x_I)(y_K - y_I) - (x_K - x_I)(y_J - y_I) \quad (25)$$

Sonuç olarak enterpolasyon noktasının (z_0) değeri (26) şeklinde belirlenir.

$$z_0 = P_I z_I + P_J z_J + P_K z_K \quad (26)$$

En Küçük Eğrilikli Yüzey Enterpolasyonu (Surface Interpolation with Least Curvature)

Bu yöntemdeki amaç, grid köşelerindeki C_{ij} değerinin karelerinin toplamının minimum olmasını sağlamaktır (27) (Briggs,1974).

$$C = \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^j (C_{ij})^2 = [\text{minimum}] \quad (27)$$

Bir yüzeydeki eğriliklerin kareleri toplamı (28) ile ifade edilir.

$$C(z) = \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (28)$$

C değerini en küçük yapan z fonksiyonun diferansiyel eşitliğini sağlaması gerekmektedir.

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0 \quad (29)$$

Benzer şekilde (29) eşitliğini sağlayan z değeri eğriliklerin kareleri toplamını minimum yaptığı ispatlanmıştır (Briggs,1974). (29)' da verilen diferansiyel eşitliğinin çözümü "sınır koşulları" kullanılarak yapılabilmektedir. Kullanılacak sınır koşulları yüzeyin sınır normali (n) boyunca olması ve yüzeyin sınır köşelerinde $\frac{\partial^2 z}{\partial n^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ olması koşuludur (Briggs,1974; Ayhan ve diğ.,1993; Smith ve Wessel,1990).

(23) eşitliğinin çözümü yapılan çalışmada açıklayıcı bir şekilde anlatılmıştır (Briggs,1974). Matris hesabıyla ya da iterasyonla olmak üzere çözüm iki şekilde de yapılabilir. Fakat iterasyonla çözüm yapılması önerilmektedir. Çünkü matris hesabında nümerik bağımlılık söz konusudur. İteratif çözüm aşamaları 4 aşamada özetlenirse:

- **1.Aşama:** Bu yöntemde yüzey tanımlamak için ilk olarak multiküadrik enterpolasyon da olduğu gibi bir trend yüzeyi geçirilir ve bu yüzey dışında kalanlar için Δz_i artık yükseklik değerleri hesap yoluyla bulunur.
- **2.Aşama:** Homojen veya rastgele olarak bulunan yüzeydeki dayanak noktalarının Δz_i artık yükseklik değerlerinden faydalanılarak grid köşelerindeki $\Delta z_{i,j}$ yaklaşık değerlerinin ortalaması alınarak bulunur.
- **3.Aşama:** Bir önceki adımda hesaplanan değerler ile iterasyon işlemine başlanır. Her bir iterasyonda, grid köşe noktalarındaki artık yükseklik değerleri hesaplanır. Bu hesabı yapabilmek için komşu grid noktalarındaki artık yükseklik değerlerinden yararlanılır ve yazılacak olan eşitlik normal bir grid köşesi için (30) eşitliğindeki gibi olur.

$$\Delta z_{i+2,j} + \Delta z_{i,j+2} + \Delta z_{i-2,j} + \Delta z_{i,j-2} + 2(\Delta z_{i+1,j+1} + \Delta z_{i-1,j+1} + \Delta z_{i+1,j-1} + \Delta z_{i-1,j-1}) - 8(\Delta z_{i+1,j} + \Delta z_{i-1,j} + \Delta z_{i,j+1} + \Delta z_{i,j-1}) + 20\Delta z_{i,j} = 0 \quad (30)$$

Grid köşe noktaları için yazılan eşitlik ile herhangi normal bir nokta için yazılan eşitlik birbirinden farklıdır (Briggs,1974; Smith ve Wessel,1990). Tüm noktalar için eşitliklerde bulunan $\Delta z_{i,j}$ değerleri hesaplanır ve bir sonraki iterasyon işlemi gerçekleştirilir. Birbirini takip eden iki iterasyondan üretilen $\Delta z_{i,j}$ değerleri arasındaki farkın ϵ olması istenmektedir. Bu ϵ değerinin altında bir sayıya ulaşılan dek iterasyon işlemi sürdürülür.

- **4.Aşama:** Son iterasyon işleminde bulunan artık yükseklik değerine, trend yüzeyindeki değeri de eklenir. Böylece grid köşe noktasının kesin yükseklik değeri elde edilmiş olunur.

En Yakın Komşu Enterpolasyonu (Nearest Neighbor Interpolation)

Bu yöntemde, ağırlıklı ortalama enterpolasyona benzer şekilde yüksekliği belirlenecek olan noktanın çevresindeki noktadan yararlanılmaktadır. Çevrede bulunan en yakın noktanın yükseklik değeri belirlenecek noktanın yükseklik değerine eşit kabul edilmektedir.

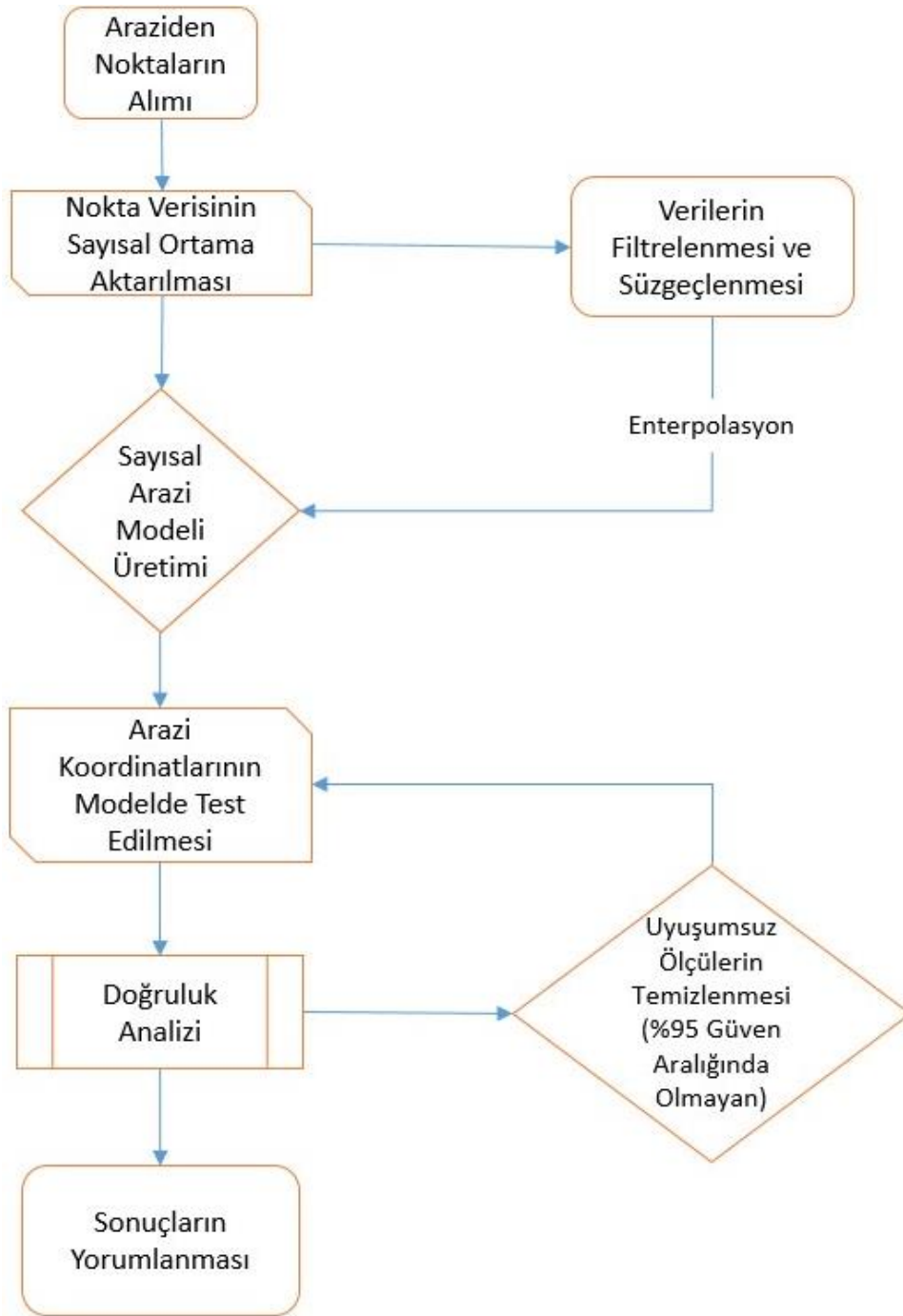
UYGULAMA (APPLICATION)

Çalışmada ağırlıklı ortalama, en yakın komşu, polinom, multikvadrik, en küçük eğrilikli yüzey ve üçgenler ağında lineer enterpolasyon yöntemleri karşılaştırılmıştır. Toplamda elde edilen nokta sayısı 2203 adettir. Bu noktalar sayısal ortama aktarılarak, gerekli süzgeçleme işleminden geçirilmiştir. Arazi yapısının düzenli eğimli olduğu bu kısımda en düşük yükseklik 1311.21 m ve en büyük yükseklik değeri de 1357.51 m olarak belirlenmiştir. Uygulamanın ilk aşaması olarak arazide homojen olarak dağılmış, 1662 dayanak noktası, geriye kalan 541 tanesi örneklem noktası seçilmiştir. Şekil 3. üzerinde beyaz nokta ifade edilen dayanak noktası ve kırmızı nokta ile ifade edilen örneklem noktalarının yerleri gösterilmiştir. Yapılan uygulamaya yönelik iş akış diyagramı Şekil 4’te verilmiştir. Farklı enterpolasyon yöntemlerine ait arazi yüzeyleri Surfer programında çizilmiştir. Bu yüzeylerin perspektif görünümü ve 3B görünümü Şekil 5-10 ’de verilmiştir.



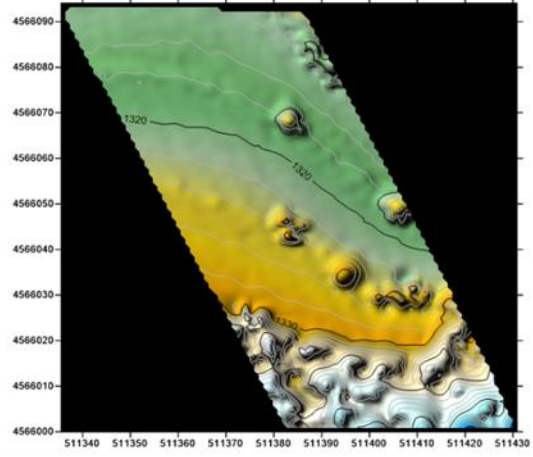
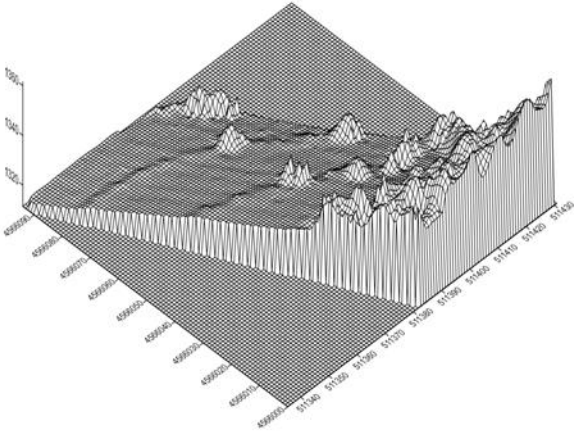
Şekil 3. Dayanak ve örneklem noktalarının konumları (Beyaz noktalar dayanak ve kırmızı noktalar örneklem noktaları göstermektedir)

Figure 3. Location of baseline and sampling points (White color points show baseline and red color points show sampling)



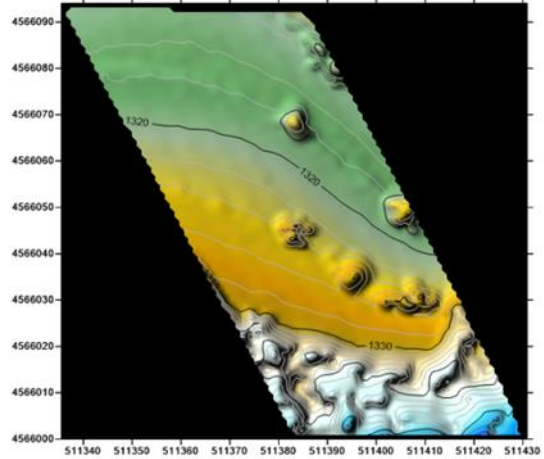
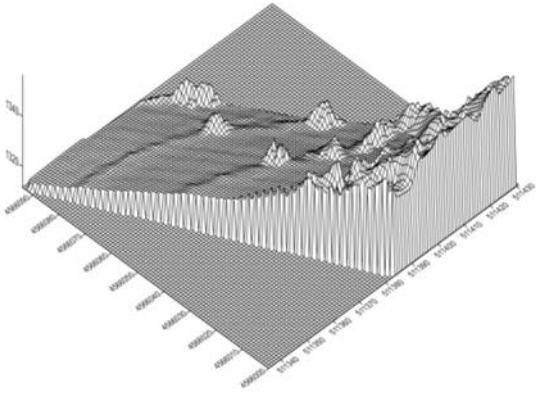
Şekil 4. İş-akış diyagramı

Figure 4. Work-flow diagram



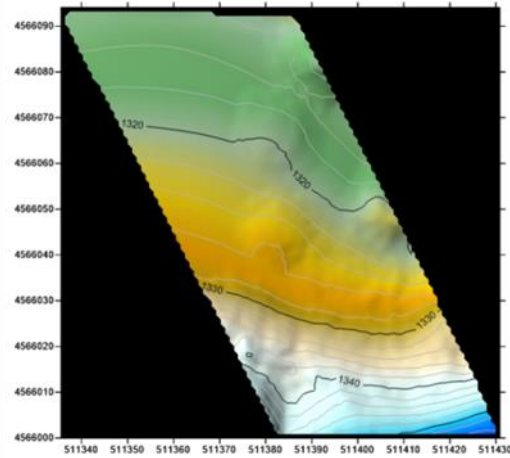
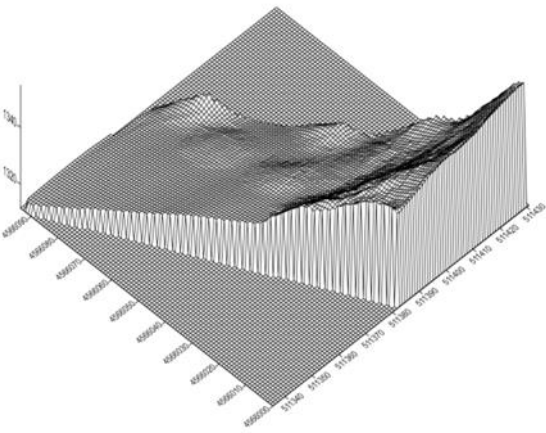
Şekil 5. En küçük eğrilikli yüzeyin perspektif görünümü ve 3B görünümü

Figure 5. Perspective view and 3D view of the least curved surface



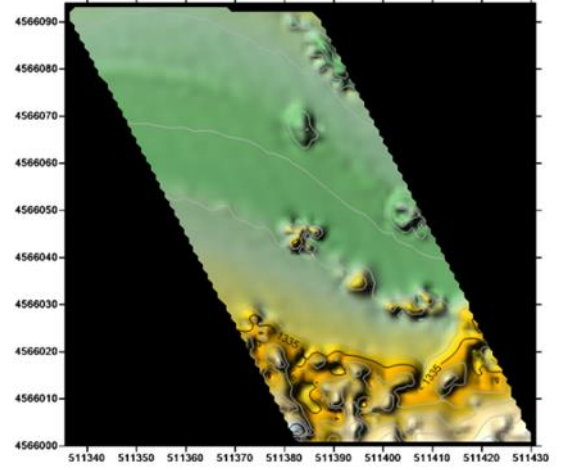
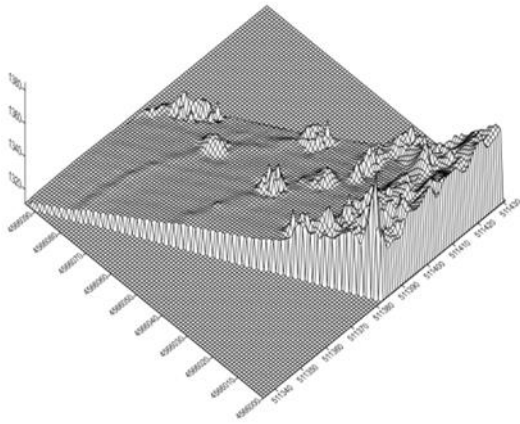
Şekil 6. Ağırlıklı ortalama yüzeyin perspektif görünümü ve 3B görünümü

Figure 6. Perspective view and 3D view of weighted average surface



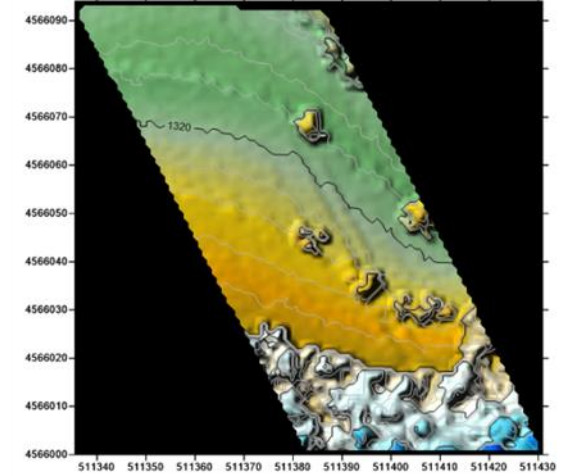
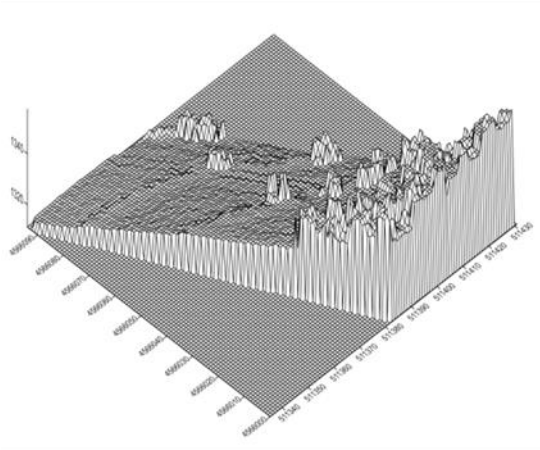
Şekil 7. Polinom yüzeyin perspektif görünümü ve 3B görünümü

Figure 7. Perspective view and 3D view of polynomial surface



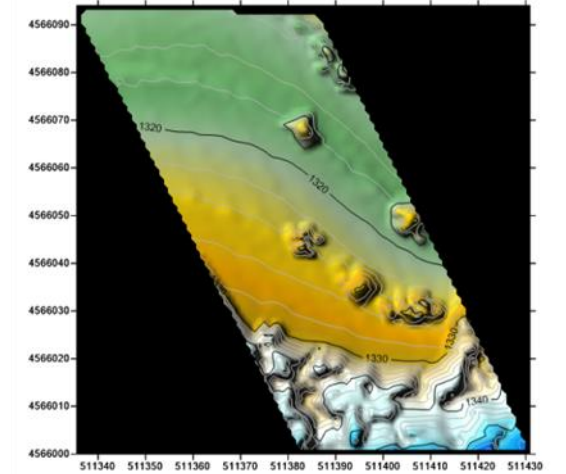
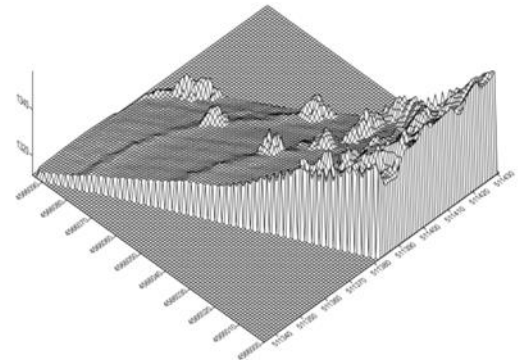
Şekil 8. Multikvadrik yüzeyin perspektif görünümü ve 3B görünümü

Figure 8. Perspective view and 3D view of multiquadric surface



Şekil 9. En yakın komşu yüzeyin perspektif görünümü ve 3B görünümü

Figure 9. Perspective view and 3D view of nearest neighboring surface



Şekil 10. Üçgenler ağında lineer enterpolasyon yüzeyinin perspektif görünümü ve 3B görünümü

Figure 10. Perspective view and 3D view of linear interpolation surface in a network of triangles

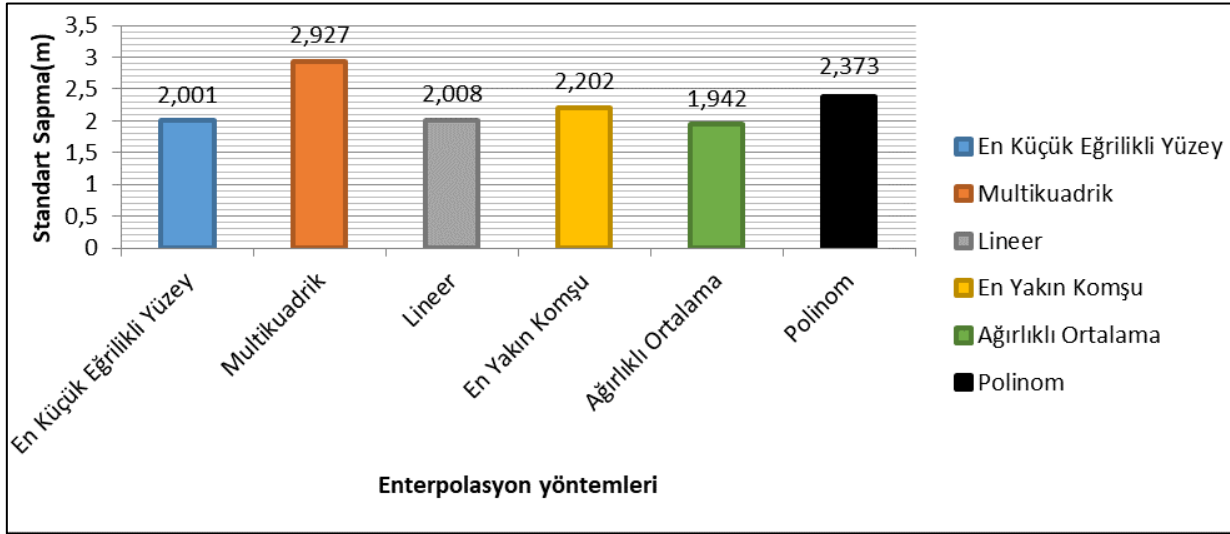
BULGULAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSION)

Enterpolasyon uygulanan noktaların gerçekteki yükseklik değerleri bilindiği için, her bir enterpolasyon yöntemine ilişkin doğruluk ölçütleri üretilmiştir. Bu ölçütler en büyük, en küçük, ortalama ve standart sapma hata değerleri Çizelge 1’de gösterilmiş ve yöntemler arasındaki farklılıkların karşılaştırılması için standart sapmaları Şekil 11’de grafik olarak verilmiştir.

Çizelge 1. Doğruluk ölçüt değerleri (metre biriminde)

Table 1. Accuracy measure value (m unit)

	En Küçük Eğrilikli Yüzey	Multikvadrik	Lineer	En yakın komşu	Ağırlıklı Ortalama	Polinom
Minumum	-11.49	-42.98	-14.54	-16.56	-13.64	-9.75
Maximum	7.55	10.64	8.30	7.62	7.77	7.87
Aralığı	19.05	53.63	22.83	24.18	21.41	17.63
Standart Sapma	2.00	2.93	2.01	2.20	1.94	2.37
Ortalama	-0.24	-0.30	-0.23	-0.23	-0.22	-0.39



Şekil 11. Enterpolasyon yöntemlerine ait standart sapma değerleri

Figure 11. Standard deviation values of interpolation methods

Elde edilen standart sapmalar değerlendirildiğinde ağırlık ortalama yönteminin standart sapmasının diğerlerine göre iyi olduğu, polinom enterpolasyon değerinin daha düşük olduğu anlaşılmıştır. İstatiksel olarak değerlendirmek, üst ve alt limitleri ayarlamak için ölçülerimize sigma testi uygulandı. Testte %95 oranındaki oranı sağlayabilmek için en büyük ve en küçük değerlerdeki gerekli sayıda veri kullanılmadı. Sonuç olarak elde edilen değerler, Çizelge 2’de sunulmuştur.

Çizelge 2. Sigma testi sonucunda üretilen doğruluk ölçüt değerleri (metre biriminde)*Table 2. Accuracy criterion values produced as a result of the Sigma test (in meters)*

	En Küçük Eğrilikli Yüzey	Multikuadrik	Lineer	En yakın komşu	Ağırlıklı Ortalama	Polinom
Minumum	-5.05	-4.78	-4.70	-5.20	-4.41	-4.82
Maximum	3.70	4.01	3.71	4.11	3.50	5.28
Aralığı	8.75	8.79	8.41	9.31	7.91	10.10
Standart Sapma	1.34	1.42	1.37	1.42	1.30	1.85
Ortalama	-0.20	-0.19	-0.19	-0.17	-0.18	-0.39

Çizelge 2 incelendiğinde Çizelge 1'e göre küçük değişiklikler olduğu görülmüştür. Standart sapmalara göre sıralama yapıldığında ağırlıklı ortalama, en küçük eğrilikli yüzey, üçgenler ağında lineer, multikuadrik, en yakın komşu, polinom enterpolasyonu şeklindedir. Test öncesi ve sonrası sıralamada ilk üçünün yeri değişmemiştir. Fakat test öncesi multikuadrik enterpolasyon 6. Sıradayken sigma testi sonrası 4. Sıraya gelmiştir. Bu yüzden sonuçların doğruluğunu tespit etmek amacıyla aynı test bölgesinde iki alan seçilerek güven aralığı testine tabi tutulmuştur. Bu alanlar içerisindeki toplam nokta sayısı 1250 olarak belirlenmiştir. Birinci bölge için dayanak nokta sayısı 1000 adet, örneklem nokta sayısı 250 adettir. İkinci bölge için dayanak nokta sayısı 750, test nokta sayısı 500 tanedir. İlk bölge için örneklem noktasının yaklaşık 4 katı kadar dayanak noktası, ikinci bölge için de dayanak nokta sayının üçte ikisi kadar nokta alınmıştır. Çok fazla dayanak noktasının sonuçlarda herhangi bir farklılık yaratıp yaratmayacağı incelenmiştir. Test sonuçların Çizelge 3 ve Çizelge 4'te verilmiştir.

Çizelge 3. Birinci bölge için sigma testi sonucunda üretilen doğruluk ölçüt değerleri (metre biriminde)*Table 3. Accuracy criteria produced as a result of the sigma test for the first zone (in meters)*

	En Küçük Eğrilikli Yüzey	Multikuadrik	Lineer	En yakın komşu	Ağırlıklı Ortalama	Polinom
Minumum	-1.89	-3.16	-2.16	-1.86	-2.01	-1.77
Maximum	2.47	4.36	3.63	3.76	3.50	4.97
Aralığı	4.36	7.53	5.89	5.62	5.51	6.74
Standart Sapma	0.46	0.82	0.64	0.55	0.51	0.96
Ortalama	0.02	0.07	0.06	0.06	0.03	-0.02

Çizelge 4. İkinci bölge için sigma testi sonucunda üretilen doğruluk ölçüt değerleri (metre biriminde)*Table 4. Accuracy benchmarks produced as a result of the sigma test for the second zone (in meters)*

	En Küçük Eğrilikli Yüzey	Multikuadrik	Lineer	En yakın komşu	Ağırlıklı Ortalama	Polinom
Minumum	-3.84	-3.99	-3.22	-3.99	-3.16	-1.99
Maximum	4.97	5.07	3.90	5.14	4.39	5.94
Aralığı	8.81	9.06	7.12	9.13	7.56	7.93
Standart Sapma	0.76	0.92	0.73	0.80	0.70	1.55
Ortalama	0.03	0.03	0.04	0.03	0.02	-0.02

Çalışmalar doğrultusunda, Çizelge 1’de verilen en büyük, en küçük, ortalama ve standart sapma değerleri incelendiğinde, kullanılan 6 adet test yüzeyi içerisinde en iyi yöntemin ağırlıklı ortalama olduğu anlaşılmaktadır. Ağırlıklı ortalama yönteminin diğerlerine göre daha iyi sonuç vermesi enterpole edilen yüksekliklerin, çevresindeki dayanak noktalarını kullandığı içindir. Standart sapmaların değişimi göz önüne alındığında enterpolasyon yöntemleri sırasıyla, ağırlıklı ortalama, en küçük eğrilikli yüzey, lineer, en yakın komşu, polinom ve multikuadrik olarak sıralanabilir. Multikuadrik enterpolasyon sonucunun düşük gelmesinin nedeni yüzeyi bütünüyle ele alan yöntemlerdendir. Bu nedenle çok sayıda iterasyon işlemi yapılmakta ve hesap yükleri fazla olmaktadır. Çizelge 2 sigma testi sonucu üretilen değerleri içermektedir. Sigma testi ile maksimum ve minumum değerlerinde sapmalar olabileceği düşünülerek belirli sayıda ölçüler, kullanılan tüm yöntemlerden atılmıştır. Böylece, Çizelge 2’deki standart sapma değerleri doğal olarak Çizelge 1’de bulunan değerlerden küçük olmaktadır. Ayrıca güven aralığı testi de uygulanıp, sonuçlar incelenmiştir. Birinci bölge için elde edilen sonuçların standart sapmalarındaki değişim sırasıyla, en küçük eğrilikli yüzey, ağırlıklı ortalama, en yakın komşu, lineer, multikuadrik, polinom şeklindedir. İkinci bölge içinse ağırlıklı ortalama, lineer, en küçük eğrilikli yüzey, en yakın komşu, multikuadrik ve polinom şeklindedir. İki bölgedeki sıralamada küçük yer değiştirmeleri olmuştur. Genel olarak bakıldığında, ilk üçte daima ağırlıklı ortalama, en küçük eğrilikli yüzey, lineer şeklinde, son üçte ise en yakın komşu, multikuadrik, polinom olmaktadır.

SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada, sayısal arazi modellenmesinde lidar veri seti kullanılarak realiteyi temsil etmesi ve güvenilir, ispat edilebilir bilgi olması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Daha önceki yapılan çalışmalarda, teorik test verisi kullanılmıştır ve bu çalışmaların sonuç ürünü olarak en küçük eğrilikli yüzey ve multikuadrik yöntem önerilmiştir. Yapılan bu çalışmada ise multikuadrik yöntem ve en küçük eğrilikli yüzeylerin iyi sonuçlar vermediği görülmüştür. Böyle bir farklılığın olmasının sebebi olarak, simülatif bir yüzey değil de gerçek yüzey kullanılması düşünülebilir.

Sonuç olarak, yükseklik modellemesinde dayanak noktalarının sayısı, noktaların homojen yapıda olup olmaması enterpolasyonu yapılacak noktanın doğruluğunu etkilemektedir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Akçın, H., 1998, GPS ölçülerinden pratik yüksekliklerin elde edilmesi üzerine bir çalışma, Doktora Tezi, Y.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Ayhan, M.E., Alp, O., Üstün, M., “1993, Rastgele Dağılmış Verilerden Bilgisayar Desteğinde Yüzey Modelleme”, T.U.J.J.B, Ankara, 103-118, 8-11 Haziran 1993

- Bigdeli, B., Gomroki, M., & Pahlavani, P., 2020, Generation of digital terrain model for forest areas using a new particle swarm optimization on LiDAR data, *Survey Review*, 52(371), 115-125.
- Briggs, I.C., 1974, Machine Contouring Using Minimum Curvature, *Geophysics*, 39, 1, 39-48.
- Chen, C., Li, Y., Zhao, N., Guo, B., & Mou, N., 2018, Least squares compactly supported radial basis function for digital terrain model interpolation from airborne Lidar point clouds. *Remote Sensing*, 10(4), 587.
- Erkanlı, Y., 1986, Koordinatlandırılmış modelde ve alanda enterpolasyon, kollakasyon yöntemlerinin uygulanması ve neticeleri, *Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi*, Ankara, 56-57.
- Franke, R., Nielson, G., 1980, Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1691-1704.
- Güler, A., 1978, Sayısal Arazi Modellerinde İnterpolasyon Yöntemleri, *Harita Dergisi*, 85, 53-70, 1978.
- Güler, A., 1985, Sayısal arazi modellerinde iki enterpolasyon yöntemi ile denemeler, *Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi*, 52-53, 98-113.
- Hardy, R.L., 1990, Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method: 20 Years of Discovery 1968-1988, *Computers Math. Applic.*, Vol. 19, No.8/9, pp.163-208.
- Hardy, R.L., 1971, Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 76, No.8, pp.1905-1915.
- Hardy, R.L., 1972, Analytical Topographic Surfaces by Spatial Intersection, *P.E.R.S.*, Vol. 38, No.5, pp. 452-458.
- Hardy, R.L., 1975, Research Results in The Application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems, *Surveying and Mapping*, Vol. 35, pp.321-332.
- İnal, C. ve Yiğit, C. Ö., 2003, "Jeodezik Uygulamalarda Kriging Enterpolasyon Yönteminin Kullanılabilirliği", *TUJK 2003 Yılı Bilimsel Toplantısı, Coğrafi Bilgi Sistemleri ve Jeodezik Ağlar Çalıştayı, Konya*, s.177-185., 24-26 Eylül 2003.
- İnal, C., 1996, Yerel Jeoit Geçirilerek GPS Sonuçlarından Yüksekliklerin Belirlenmesi, *Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi*, Konya, 11, 15-21.
- Karaaslan, Ö., Kayıkçı, E. T., Aşık, Y., 2016, Jeoid Yüksekliklerini Belirlemek İçin Kullanılan Enterpolasyon Metotlarının Trabzon İli Verilerine Uygulanması, *Electronic Journal of Map Technologies*, 8(2), 151-164.
- Leberl, F., 1973, Interpolation in a Square Grid DTM, *ITC Journal*, 5, 756- 807.
- Lee, D.T., Preparata, F.P., 1984, Computational Geometry-A Survey, *IEEE Transactions on Computers*, c33,12, 1072-1101.
- Liu, X.; Zhang, Z., 2011, Effects of LiDAR data reduction and breaklines on the accuracy of digital elevation model. *Survey Review.*, 43, 614-628.
- Montealegre, A.; Lamelas, M.; Riva, 2015, J. Interpolation routines assessment in ALS-derived digital elevation models for forestry applications, *Remote Sensing*, 7, 8631-8654.
- Razak, K.A.; Straatsma, M.W.; van Westen, C.J., 2011, Malet, J.P.; de Jong, S.M. Airborne laser scanning of forested landslides characterization: Terrain model quality and visualization, *Geomorphology*, 126, 186-200.
- Shi, W.; Zheng, S.; Tian, Y., 2009, Adaptive mapped least squares SVM-based smooth fitting method for DSM generation of LIDAR data. *Int. J. Remote Sensing*, 30, 5669-5683.
- Sibson, R., 1977, Locally Equiangular Triangulations, *Computer Journal*, 21, 243-245.
- Smith, W.H.F., Wessel, P., 1990, Gridding with Continuous Curvature Splines in Tension, *Geophysics*, 55, 3, 293-305.
- Tarolli, P., 2014, High-resolution topography for understanding Earth surface processes: Opportunities and challenges. *Geomorphology*, 216, 295-312.
- Uluğtekin, N., 1994, Sayısallaştırılmış kadastro paftalarının geometrik niteliğinin yükseltilmesi, *İTÜ Dergisi*, 52, 35-41.
- Watson, D.F., 1992, *Contouring: A Guide to The Analysis and Display of Spatial Data*, Pergamon press, Oxford, page:321.

- Watson, D.F., Philip, G.M., 1984, Systematic Triangulations, Computer Vision, Graphics and Image Processing, 26, 217-223.
- Yanalak M.,2002, Sayısal Arazi Modellerinde Yükseklik Enterpolasyonu, Harita Dergisi, sayı:128, sayfa:44-58.
- Yang, B.; Huang, R.; Dong, Z.; Zang, Y.; Li, J.,2016, Two-step adaptive extraction method for ground points and breaklines from lidar point clouds, ISPRS J. Photogrammetry Remote Sensing, 119, 373–389.
- Yastıklı N., Jacobsen K.,2003, Automatic Digital Elevation Model Generation, Problems and Restrictions in Urban Areas, YTÜ dergisi, sayı:2003-2, sayfa:38-46.
- Yiğit, C. Ö.,2003, Elipsoidal yüksekliklerin Ortometrik yüksekliğe dönüşümünde kullanılan enterpolasyon yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Yılmaz N.,2019, Jeoid yüksekliklerinin belirlenmesinde ağırlıklı ortalama ve polinomlarla enterpolasyon yöntemlerinin karşılaştırılması, DÜMF Mühendislik Dergisi 10:2, sayfa: 743-754.
- Zhan-Ji, Y.,1998, Precise determination of local geoid and its geophysical interpretation, Doktora Tezi, Hong Kong Polytechnich University, Hong Kong