Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science
2021, 16(1): 259-270
DOI:10.29233/sdufeffd.850713
Atıf için / ForCitation: A. Çetinkaya, O. Mert, "$q-$Mittag-Leffler fonksiyonu ile tanımlı analitik fonksiyonlar için konvolüsyon özellikleri", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 16(1), 259-270, 2021.

$q-$Mittag-Leffler Fonksiyonu ile Tanımlı Analitik Fonksiyonlar için Konvolüsyon Özellikleri

Asena ÇETİNKAYA[1], Oya MERT[*2]

[1]*İstanbul Kültür Üniversitesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, 34158, İstanbul, Türkiye*
[2] *Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Matematik Bölümü, 59030, Tekirdağ, Türkiye*

**yazışılan yazar e-posta: oyamert@nku.edu.tr*

(Alınış / Received: 30.12.2020, Kabul / Accepted: 14.05.2021, Yayımlanma / Published: 27.05.2021)

Özet: Son zamanlarda, Mittag-Leffler fonksiyonu yalınkat fonksiyonlar ile ilgili çalışmalarda önemli rol oynamaktadır. Bu makalede, yapılan son çalışmaların ışığında $q-$Mittag-Leffler fonksiyonu ile tanımlı yalınkat fonksiyonların iki yeni alt sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıflar için konvolüsyon koşulları ve katsayı tahminleri araştırılmıştır. Elde edilen bulgular literatürde olan bulgularla karşılaştırılarak sunulmuştur.

Anahtar kelimeler*:* Analitik fonksiyonlar, Yıldızıl fonksiyonlar, Konveks fonksiyonlar, Konvolüsyon, Katsayı tahmini.

Convolution Properties for Analytic Functions Defined by $q-$Mittag-Leffler Function

Abstract: Recently, Mittag-Leffler function acts as beneficial role in studies of univalent functions. In this paper, motivated by some recent works, two new subclasses of univalent functions involving $q-$Mittag-Leffler function are introduced. Also, convolution conditions and coefficient estimates for these classes are investigated. The obtained results are presented in comparison with the results in the literature.

Key words*:* Analytic functions, Starlike functions, Convex functions, Convolution, Coefficient estimate.

Asena ÇETİNKAYA, asnfigen@hotmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8815-5642
Oya MERT, oyamert@nku.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8791-3341

1. Giriş

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem olmak üzere $\mathbb{D} = \{z : z \in \mathbb{C}\ ve\ |z| < 1\}$ açık birim disk olarak tanımlanır. D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge olmak üzere $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bire-bir ise f fonksiyonuna yalınkat fonksiyon denir. $\mathbb{D}$ açık birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarını sağlayan f fonksiyonuna normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. $\mathbb{D}$ açık birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve her $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$f(z) = z + \mathrm{a}_2 z^2 + \mathrm{a}_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

şeklindeki Taylor seri açılımına sahiptir. $\mathbb{D}$ diskinde yalınkat ve $\mathcal{A}$ sınıfının altkümesi olan fonksiyonlar sınıfı S ile gösterilir. Basit bağlantılı bir $D \subset$ □ bölgesinde bir z_0 noktası verilsin. z_0 noktasını her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası D bölgesinin sınırını yalnız bir noktada kesiyorsa, D bölgesine z_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir. Eğer z_0 noktası orjinde ise bu bölgeye orjine göre yıldızıl bölge denir. Birim diski yıldızıl bir bölge üzerine resmeden fonksiyonlara yıldızıl fonksiyonlar denir. S sınıfının bir alt sınıfı olan yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile gösterilir. Analitik olarak, $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde alınan z_1 ve z_2 gibi her iki nokta çiftini birbirine birleştiren doğru parçaları tamamen bu bölgenin içinde kalıyorsa, D bölgesine konveks bölge denir. Birim diski konveks bir bölge üzerine resmeden fonksiyonlara konveks fonksiyonlar denir. S sınıfının bir alt sınıfı olan konveks fonksiyonlar sınıfı C ile gösterilir. Analitik olarak, $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$\mathbb{D}$ birim diskinde analitik ve her $z \in \mathbb{D}$ için $w(0) = 0$, $|w(\mathrm{z})| < 1$ koşullarını sağlayan w fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilmektedir. Bu sınıfa ait fonksiyonlar Schwarz fonksiyonu olarak adlandırılır. f_1 ve f_2 fonksiyonları $\mathbb{D}$ diskinde analitik fonksiyonlar olmak üzere, her $z \in \mathbb{D}$ için $f_1(z) = f_2(w(z))$ olacak şekilde bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f_1 fonksiyonu f_2 fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f_1 \prec f_2$ ile gösterilir [5].

$f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonları $\mathcal{A}$ sınıfının elemanları olmak üzere, bu fonksiyonların Hadamard çarpımı (veya konvolüsyonu);

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ile tanımlanır.

Eğer $f_2(z) = \frac{z}{1-z}$ ise her $f_1 \in \mathcal{A}$ için $f_1 * f_2 = f_1$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde, $f_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ ise her $f_1 \in \mathcal{A}$ için $f_1 * f_2 = zf_1'$ eşitliği sağlanır. Ayrıca, f_1 ve f_2 analitik olmak üzere her $z \in \mathbb{D}$ için $zf_1'(z) * f_2(z) = f_1(z) * zf_2'(z)$ sağlanır.

Ma ve Minda, $\mathbb{D}$ birim diskini reel eksene göre simetrik, 1 noktasına göre yıldızıl ve $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0) > 0$ koşulları altında normalize olan bir bölgeye resmeden, reel kısmı pozitif olan analitik φ fonksiyonlarını tanımlamıştır: Sırasıyla, Ma-Minda yıldızıl ve Ma-Minda konveks fonksiyonlar sınıfı

$$S^*(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z), \quad z \in \mathbb{D} \right\}$$

$$C(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z), \qquad z \in \mathbb{D} \right\}$$

ile verilmiştir [11]. Özel olarak,

$$\varphi(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \qquad (-1 \leq B < A \leq 1)$$

fonksiyonu için $S^*(\varphi)$ ve $C(\varphi)$ sınıfları, sırasıyla, $S^*(A, B)$ ve $C(A, B)$ ile gösterilen Janowski yıldızıl ve Janowski konveks fonksiyonlar ailesine indirgenir [9]. Diğer yandan bu sınıflar, $A = 1 - 2\delta$ ve $B = -1$ $(0 \leq \delta < 1)$ özel durumları için δ mertebeli yıldızıl fonksiyonların $S^*(\delta)$ sınıfına ve δ mertebeli konveks fonksiyonların $C(\delta)$ sınıfına dönüşürler. $\delta = 0$ için yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ve konveks fonksiyonlar sınıfı C elde edilir.

Kuantum kalkülüs (veya $q-$kalkülüs) limit hesaplamaları gerektirmeyen kalkülüs türüdür. $q-$kalkülüsteki en önemli adım, $q-$türev ve $q-$integral operatörleri için en kullanışlı formülleri tanımlayan Jackson tarafından atılmıştır [6,7,8]. Daha sonra $q-$kalkülüs, ortogonal polinomlar, $q-$hipergeometrik fonksiyonlar gibi matematik ve fiziğin çeşitli dallarındaki uygulamaları nedeniyle araştırmacıların dikkatini çekmiştir.

1909 yılında, Jackson $q-$türev operatörünü [6];

$$D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}, \qquad z \in R \backslash \{0\} \tag{2}$$

olarak tanımlamıştır. Burada eğer $qz \in R$ ve $z \in R$ ise $q-$geometrik küme olarak adlandırılan ve karmaşık düzlem $\mathbb{C}$ nin bir alt kümesi olan R sabittir. $R \subset \mathbb{C}$ bir $q-$geometrik küme ise $zq \in R$ olmak üzere, tüm geometrik $\{zq^n\}_0^\infty$ dizilerini içerir. Özel olarak, $q \to 1^-$ iken $D_q f(z) \to f'(z)$ olur.

(1) ile verilen f fonksiyonu için

$$\left(D_q f\right)(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} [n]_q a_n z^{n-1}$$

dir. Burada $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, q \in (0,1)$ dir. Özel olarak, $q \to 1^-$ iken $n_q \to n$ elde edilir.

q −Gama fonksiyonu

$$\Gamma_q(a+1) = [a]_q \Gamma_q(a)$$

ile tanımlanır. q −analog Pochhammer sembolü ise

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}) & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ile tanımlanır. Ayrıca,

$$(q^a;q)_n = \frac{(1-q^n)\Gamma_q(a+n)}{\Gamma_q(a)}, \quad (n>0)$$

dir [10].

Mittag-Leffler fonksiyonu, 1903 yılında İsveçli matematikçi Mittag-Leffler tarafından

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad (\alpha \in \mathbb{C}; \Re(\alpha) > 0)$$

şeklinde tanımlanmıştır [12]. 1905 yılında, Wiman E_α fonksiyonunu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0)$$

olarak genelleştirmiştir [14]. Burada $\Gamma(.)$ notasyonu Gama fonksiyonunu belirtmektedir. Daha sonra, Mittag-Leffler fonksiyonu ve onun çeşitli genelleştirmeleri kesirli diferansiyel denklemlerin, Levy uçuş problemlerinin ve diğer başka problemlerin çözümünde kullanılmıştır [3,4].

2014 yılında, Sharma ve Jain, q−Mittag-Leffler fonksiyonunu

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^\gamma;q)_n}{(q;q)_n} \frac{z^n}{\Gamma_q(\alpha n+\beta)}, \qquad |q| < 1$$

$(\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0, \Re(\gamma) > 0)$ olarak tanımlamıştır [13]. q−Mittag-Leffler fonksiyonu normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{A}$ ya ait olmadığından, bu fonksiyon

$$M_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z;q) = z\Gamma_q(\beta)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z;q) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}} z^n$$

olarak normalize edilmiştir. Böylece $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için $H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ operatörü

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z) &= M_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z;q) * f(z) \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}} a_n z^n \end{aligned} \tag{3}$$

olarak elde edilmiştir.

$H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f$ operatörü göz önüne alınarak ve sabordinasyon prensibi kullanılarak, $q-$Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren yalınkat fonksiyonların iki alt sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 1.1. $-1 \le B < A \le 1,\ b \backslash \mathbb{C}\{0\}$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)\right)}{H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)} - 1\right) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{4}$$

şartını sağlarsa, $S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfına aittir denir.

Tanım 1.2. $-1 \le B < A \le 1,\ b \backslash \mathbb{C}\{0\}$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$1 + \frac{1}{b}\left(\frac{D_q\left(zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)\right)\right)}{D_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)\right)} - 1\right) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{5}$$

şartını sağlarsa, $C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfına aittir denir.

Alexander integral operatöründen yararlanarak, aşağıdaki bağıntı verilebilir [1];

$$H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f \in C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B) \Leftrightarrow zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f\right) \in S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B). \tag{6}$$

Parametrelerin özel değerleri alınırsa, $S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ ve $C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfları yalınkat fonksiyonların bilinen bazı alt sınıflarına indirgenir:

1. $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$ ve $b = 1$ için [2];

   $S_{0,1}^{1,q}(1,A,B) \coloneqq S_q^*(A,B)$ ve $C_{0,1}^{1,q}(1,A,B) \coloneqq C_q(A,B)$.

2. $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1,\ b = 1$ ve $q \to 1^-$ için [9];

$$lim_{q\to 1^-}\ S_{0,1}^{1,q}(1, A, B) \coloneqq S^*(A, B) \text{ ve } lim_{q\to 1^-}\ C_{0,1}^{1,q}(1, A, B) \coloneqq C(A, B).$$

Bu çalışmada, $q-$Mittag-Leffler fonksiyonu hakkındaki bazı yeni makalelerin ışığında, $q-$Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren yalınkat fonksiyonların iki yeni alt sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıflar için konvolüsyon koşulları ve katsayı tahminleri araştırılmıştır. Ayrıca, parametrelerin bazı özel değerleri için ana teoremlere karşılık gelen bilinen sonuçlar da gösterilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde ilk olarak, $S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b, A, B)$ sınıfı için konvolüsyon koşulları incelenmiştir.

Teorem 2.1. $\theta \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq B < A \leq 1$, $b\backslash\mathbb{C}\{0\}$, $q \in (0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere (1.1) ile tanımlananan f fonksiyonunun $S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b, A, B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul tüm $L = \frac{e^{-i\theta}+(A-B)b+B}{(A-B)b}$ değerleri ve ayrıca $L = 1$ için

$$\frac{1}{z}\left[H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z) * \frac{z - Lqz^2}{(1-z)(1-qz)}\right] \neq 0 \tag{7}$$

olmasıdır.

İspat. $f \in S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b, A, B)$ olduğundan, (4) ifadesi kullanılarak

$$\frac{zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)\right)}{H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)} \prec \frac{1 + \big((A-B)b + B\big)z}{1 + Bz} \tag{8}$$

elde edilir. (8) ifadesinin sol tarafı $\mathbb{D}$ de analitik olduğundan $H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z) \neq 0,\ z \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ dir, yani;

$$\frac{1}{z} H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z) \neq 0$$

dir ve bu (7) eşitsizliğinin $L = 1$ için sağlanması ile eşdeğerdir. İki analitik fonksiyonun sabordinasyonu göz önüne alınırsa, $\mathbb{D}$ de $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını sağlayan bir w analitik fonksiyonu vardır. Böylece, (8) ifadesi

$$\frac{zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)\right)}{H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)} = \frac{1 + \big((A-B)b + B\big)w(z)}{1 + Bw(z)}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)\right)}{H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma} f(z)} \neq \frac{1 + \big((A-B)b + B\big)e^{i\theta}}{1 + Be^{i\theta}} \tag{9}$$

veya denk olarak

$$\frac{1}{z}\left[\left(1+Be^{i\theta}\right)zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\right)-\left(1+\left((A-B)b+B\right)e^{i\theta}\right)H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\right]\neq 0 \qquad (10)$$

elde edilir. Konvolüsyon kurallarının bir sonucu olarak, $H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f$ fonksiyonu için

$$H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)*\frac{z}{1-z}=H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z),$$

$$H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)*\frac{z}{(1-z)(1-qz)}=zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\right).$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler kullanılarak, (10) eşitsizliği

$$\frac{1}{z}\left[H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)*\left(\frac{\left(1+Be^{i\theta}\right)z}{(1-z)(1-qz)}-\frac{\left(1+\left((A-B)b+B\right)e^{i\theta}\right)\mathrm{z}}{(1-z)}\right)\right]\neq 0$$

olarak yazılabilir. Böylece, son eşitsizlikte yapılan bazı hesaplamalar ile (7) denklemini veren

$$\frac{\left((B-A)b\right)e^{i\theta}}{z}\left[H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)*\left(\frac{z-\frac{e^{-i\theta}+(A-B)b+B}{(A-B)b}qz^{2}}{(1-z)(1-qz)}\right)\right]\neq 0 \qquad (11)$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine; (7) varsayımı $L=1$ için sağlandığından, her $z\in\mathbb{D}$ için $\frac{1}{z}H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\neq 0$ dır. Böylece

$$\varphi(z)=1+\frac{1}{b}\left(\frac{zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\right)}{H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)}-1\right)$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitiktir. İspatın ilk kısmında (7) varsayımının (9) eşitsizliğine denk olduğu gösterildiğinden

$$\frac{zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\right)}{H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)}\neq\frac{1+\left((A-B)b+B\right)e^{i\theta}}{1+Be^{i\theta}} \qquad (12)$$

elde edilir. Eğer

$$\psi(z)=\frac{1+\left((A-B)b+B\right)z}{1+Bz} \qquad (13)$$

olması durumunda, (12) eşitsizliğinden $\varphi(\mathbb{D})\cap\psi(\mathbb{D})=\emptyset$ elde edilir. Bu nedenle, $\mathbb{C}\backslash\psi(\partial\mathbb{D})$ nin bir bağlantılı bileşeni, basit bağlantılı $\varphi(\mathbb{D})$ bölgesini içerir ve ψ

fonksiyonunun yalınkatlığı ile birlikte $\varphi(0) = \psi(0)$ koşulunu kullanarak $\varphi(z) \prec \psi(z)$ olduğu ortaya çıkar. Bu durum (12) ifadesindeki sabordinasyon özelliğinden gelmektedir. Böylece, $f \in S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ olduğu ispatlanmış olur.

Özel olarak $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$ ve $b = 1$ alınırsa, Seoudy ve Aouf tarafından elde edilen konvolüsyon sonucuna ulaşılır [2].

Sonuç 2.1. f fonksiyonunun $S_q^*(A,B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul tüm $K = \frac{e^{-i\theta}+A}{A-B}$ değerleri ve ayrıca $K = 1$ için

$$\frac{1}{z}\left[f(z) * \frac{z - Kz^2}{(1-z)(1-qz)}\right] \neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 2.2. (1) ile tanımlanan f fonksiyonunun $S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{[n]_q\left(e^{-i\theta}+B\right) - e^{-i\theta} + (B-A)b - B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^\gamma;q)_{n-1}a_n z^{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}} \neq 0 \tag{14}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 2.1 den, $f \in S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ ise ancak ve ancak tüm $L = \frac{e^{-i\theta}+(A-B)b+B}{(A-B)b}$ değerleri ve ayrıca $L = 1$ *için*

$$\frac{1}{z}\left[H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z) * \frac{z - Lqz^2}{(1-z)(1-qz)}\right] \neq 0 \tag{15}$$

olduğunu biliyoruz. (15) eşitsizliğinin sol tarafı kullanılarak

$$= \frac{1}{z}\left[H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z) * \left(\frac{z}{(1-z)(1-qz)} - \frac{Lqz^2}{(1-z)(1-qz)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left\{zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)\right) - L\left[zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)\right) - H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)\right]\right\}$$

$$= 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left([n]_q(L-1) - L\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^\gamma;q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}a_n z^{n-1}$$

$$= 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{[n]_q\left(e^{-i\theta}+B\right) - e^{-i\theta} + (B-A)b - B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^\gamma;q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}a_n z^{n-1}.$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem, $S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfına ait olan f fonksiyonları için bir katsayı tahmini vermektedir.

Teorem 2.3. (1) ile tanımlanan f fonksiyonları için

$$\sum_{n=2}^{\infty}\big([n]_q(1-B)+|b|(A-B)-1+B\big)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}\leq |b|(A-B),$$

eşitsizliği sağlanırsa, $f\in S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ dir.

İspat. (14) ile verilen eşitsizlikte mutlak değer alınırsa

$$\left|1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{[n]_q\big(e^{-i\theta}+B\big)-e^{-i\theta}+(B-A)b-B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}a_n z^{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}\right|$$

$$>1-\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(\frac{[n]_q\big(e^{-i\theta}+B\big)-e^{-i\theta}+(B-A)b-B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}\right||a_n|$$

$$>1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{[n]_q(1-B)-1+|(A-B)b|+B}{|(A-B)b|}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}|a_n|$$

$$>1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{[n]_q(1-B)+|(A-B)b|-1+B}{(A-B)|b|}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}|a_n|>0,$$

elde edilir. O halde, $f\in S_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ dir.

Özel olarak, $\alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=1$ ve $b=1$ değerleri alınırsa Seoudy ve Aouf tarafından elde edilen katsayı eşitsizliği sonucuna ulaşılır [2].

Sonuç 2.2. (1) ile tanımlanan f fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty}\big([n]_q(1-B)-1+A\big)|a_n|\leq A-B,$$

eşitsizliği sağlanırsa, o halde $f\in S_q^*(A,B)$ dir.

Şimdi, $C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfı için konvolüsyon koşulları ile katsayı tahmini verilecektir.

Teorem 2.4. $\theta\in[0,2\pi]$, $-1\leq B<A\leq 1$, $b\backslash\mathbb{C}\{0\}$, $q\in(0,1)$ ve $z\in\mathbb{D}$ olmak üzere (1) ile tanımlanan f fonksiyonunun $C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul tüm $L=\frac{e^{-i\theta}+(A-B)b+B}{(A-B)b}$ değerleri ve ayrıca $L=1$ için

$$\frac{1}{z}\left[H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z) * \frac{z+[1-(q+1)L]qz^2}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)}\right] \neq 0 \tag{16}$$

olmasıdır.

İspat. $H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}g$ fonksiyonu

$$H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}g(z) = \frac{z-Lqz^2}{(1-z)(1-qz)}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}g$ fonksiyonunun q −türevi alınarak, her iki taraf z ile çarpılırsa

$$zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}g(z)\right) = \frac{z+[1-(q+1)L]qz^2}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)}$$

elde edilir. Konvolüsyon kuralları kullanılarak

$$zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z)\right) * H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}g(z) = H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}f(z) * zD_q\left(H^{\gamma}_{\alpha,\beta,q}g(z)\right)$$

eşitliği bulunur. Böylece, bu son iki eşitlik ile beraber (6) ile verilen Alexander bağıntısı kullanılarak ve (7) denklemi göz önüne alınarak (16) elde edilir.

$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$ ve $b = 1$ değerleri alınırsa, [2] de ispatlanan konvolüsyon sonucu bulunur.

Sonuç 2.3. f fonksiyonunun $C_q(A,B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul tüm $K = \frac{e^{-i\theta}+A}{A-B}$ değerleri ve ayrıca $K = 1$ için

$$\frac{1}{z}\left[f(z) * \frac{z+[1-(q+1)K]qz^2}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)}\right] \neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 2.5. (1) ile tanımlanan f fonksiyonunun $C^{\gamma,q}_{\alpha,\beta}(b,A,B)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left(\frac{[n]_q\left(e^{-i\theta}+B\right)-e^{-i\theta}+(B-A)b-B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}a_nz^{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}} \neq 0 \tag{17}$$

olmasıdır.

İspat. (16) eşitsizliğinin sol tarafı kullanılarak ve gerekli hasaplamalar yapılarak

$$\frac{1}{z}\left[H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)*\left(\frac{z}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)}+\frac{[1-(q+1)L]qz^2}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{z}\left\{qz^2D_q\left(D_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)\right)\right)+zD_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)\right)-L\left[qz^2D_q\left(D_q\left(H_{\alpha,\beta,q}^{\gamma}f(z)\right)\right)\right]\right\}$$

$$=1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left(\left([n]_q-1\right)L-[n]_q\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}a_nz^{n-1}$$

$$=1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left(\frac{[n]_q\left(e^{-i\theta}+B\right)-e^{-i\theta}+(B-A)b-B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}a_nz^{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.6. (1) ile tanımlanan f fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left([n]_q(1-B)+|b|(A-B)-1+B\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}|a_n|$$
$$\leq |b|(A-B),$$

eşitsizliği sağlanırsa, $f\in C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ dir.

İspat. (17) eşitsizliği ve Teorem 2.3 de verilen yöntem kullanılarak,

$$\left|1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left(\frac{[n]_q\left(e^{-i\theta}+B\right)-e^{-i\theta}+(B-A)b-B}{(A-B)b}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}a_nz^{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}\right|$$

$$>1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left(\frac{[n]_q(1-B)-1+|(A-B)b|+B}{|(A-B)b|}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}|a_n|$$

$$>1-\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left(\frac{[n]_q(1-B)+|(A-B)b|-1+B}{(A-B)|b|}\right)\frac{\Gamma_q(\beta)(q^{\gamma};q)_{n-1}}{\Gamma_q(\alpha(n-1)+\beta)(q;q)_{n-1}}|a_n|$$
$$>0$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $f\in C_{\alpha,\beta}^{\gamma,q}(b,A,B)$ olduğu kolayca elde edilir.

$\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1$ ve $b=1$ değerleri için [2] de ispatlanan katsayı eşitsizliği elde edilir..

Sonuç 2.4. (1) ile tanımlanan f fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n]_q\left([n]_q(1-B)-1+A\right)|a_n|\leq A-B,$$

eşitsizliği sağlanırsa, $f \in C_q(A,B)$ dir.

3. Sonuç ve Yorum

Bu makalede, $q-$Mittag-Leffler fonksiyonu ile tanımlanan iki yeni yalınkat fonksiyon sınıfı verilmiştir ve bu sınıflar için konvolüsyon koşulları ve katsayı tahminleri türetilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar literatürde bu alanda yapılan çalışmaların bir devamı niteliğindedir.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Asena Çetinkaya: Kaynak/Materyal/Malzeme Temini, Araştırma, Orijinal Taslak Yazımı.
Oya Mert: Araştırma, Doğrulama, İnceleme ve Düzenleme.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarları olarak herhangi bir çatışma beyanımız bulunmadığını bildiririz.

Etik Kurul Onayı ve/veya Aydınlatılmış Onam Bilgileri

Bu çalışmanın yazarları olarak herhangi bir etik kurul onayı ve/veya aydınlatılmış onam bilgileri beyanımız bulunmadığını bildiririz.

Kaynakça

[1] J. W. Alexander, "Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions," *Ann. Math.*, 17, 12-22, 1915-1916.

[2] T. M. Seoudy and M. K. Aouf, "Convolution properties for certain classes of analytic functions defined by $q-$derivative operator," *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2014, Article ID 846719, 7 pages.

[3] D. Bansal and J. K. Prajabat, "Certain geometric properties of the Mittag-Leffler functions," *Complex Var. Elliptic Eq.*, 61, 338-350, 2016.

[4] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi and S. V. Rogosin, *"Mittag-Leffler functions, related topics and applications,"* Springer, New-York, 2014.

[5] A. W. Goodman, *"Univalent functions,"* Volume I and Volume II. Mariner Pub. Co. Inc. Tampa Florida, 1984.

[6] F. H. Jackson, "On $q-$functions and a certain difference operator," *Trans. Royal Soc, Edinburgh*, 46, 253-281, 1909.

[7] F. H. Jackson, "$q-$difference equations," *Amer. J. Math*., 32, 305-314, 1910.

[8] F. H. Jackson,"On $q-$definite integrals," *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 41, 193-203, 1910.

[9] W. Janowski, "Some extremal problems for certain families of analytic functions I" *Ann. Polon. Math*,. 28, 297-326, 1973.

[10] V. Kac and P. Cheung, *"Quantum calculus,"* Springer, 2002.

[11] W. C. Ma and D. Minda, "A unified treatment of some special classes of univalent functions," *In*: Proceedings *of the Conference on Complex Analysis, Tianjin*, 157–169, 1992.

[12] G. M. Mittag-Leffler, "Sur la nouvelle fonction Eα(x)," *C. R. Acad. Sci. Paris*, 137, 554-558, 1903.

[13] S.K. Sharma and R. Jain, "On some properties of generalized $q-$Mittag-Leffler function," *Mathematica Aeterna*, 4, 613–619, 2014.

[14] A. Wiman, "Über den fundamental satz in der teorie der functionen Eα(x) ,"*Acta Math*., 29, 191-201, 1905.