Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD)
Cilt 17, Sayı 3, Aralık 2016, Sayfa 559-579

Yedinci Sınıf Öğrencilerinin İspat Becerileri ve Tercihlerinin İncelenmesi*

Ebru AYLAR[1], Yeter ŞAHİNER[2]

Geliş Tarihi: *05.05.2016* ***Kabul Ediliş Tarihi:*** *31.10.2016*

ÖZ

Bu araştırmanın amacı ispat becerisini geliştirmek için uygulanmış olan, 13 haftalık ispat öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve ispata yönelik tercihlerinde ne yönde değişiklikler meydana getireceğini incelemektir. Araştırma eylem araştırması olarak kurgulanmış ve iki ayrı ortaokulda, toplam 48 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmada üç adet veri toplama aracı kullanılmıştır, bunlar birer adet Hazır Bulunuşluk ve İspat Testi ile yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme formudur. Veri analizinde nicel yöntem ve nitel yöntem bir arada kullanılmıştır. Gerçekleştirilen uygulamanın ardından öğrencilerin ispat becerisinde gelişim gözlenmiştir. Öğrencilerin ispat yapacakları önermelere ilişkin tercihlerinde ise kullanılacak ispat yönteminden ziyade, ispatı yapılacak önermenin öğrenciler için anlaşılır oluşunun etkili olduğu gözlenmiştir.

Anahtar kelimeler: İspat becerisi, ispat yöntemleri, matematik eğitimi.

An Analysis of Seventh-Grade Students' Proof Skills and Preferences

ABSTRACT

This research explores how seventh graders' ability to do proofs and their preferences on proving have changed as a result of a treatment aimed at developing formal approach to proofs, spread to 13-weeks. The research was designed as action research and was conducted with 48 students from two different secondary schools. Three data collecting tools were used in the research, which are Students' Readiness Quiz, Proof Quiz, and semi-structured interview form. The research utilized both qualitative and quantitative data. After the interventions, an improvement on students' ability to do proofs was observed. In addition, in the preference for proving, intelligibility of proposition has been observed to be effective rather than proof methods.

Keywords: Proof skills, proof methods, mathematics education.

GİRİŞ

Matematik aksiyomatik bir yapıya sahiptir ve yapısı gereği tümdengelimseldir. Bu yapı, üzerinde ortaklaşılmış bazı kavramlar ve önermeler kümesi ile başlar. Başlangıç noktası olarak kabul edilen bu küme "tanımsız terimler" ve aksiyomlardan oluşur. Tanımsız terimler kendilerinden daha basit terimler ya da

---

* Bu makale Prof. Dr. Yeter Şahiner danışmanlığında yürütülen "7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi" başlıklı doktora tezinin bir bölümünü içermektedir.

[1] Yrd. Doç. Dr., Ankara Üniversitesi, e-posta: eaylar@ankara.edu.tr
[2] Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, e-posta: ysahiner@hacettepe.edu.tr

kavramlarla açıklanamazlar. Ama onları sezgilerimizle kolayca algılayabiliriz (Karaçay 2009). Örneğin, nokta, doğru, düzlem tanımlanamayan ama sezgisel olarak açık olan kavramlardır, matematiğin tanımsız terimleridir. Aksiyomlar ise ispatsız kabul edilen önermelerdir (Karaçay 2009). Örneğin "nokta" teriminden yola çıkılarak "bir noktadan başka bir noktaya tek bir doğru çizilebilir" aksiyomu da doğru kabul edilir. Matematik, bu temel kavramlar ve aksiyomlar üzerine, yeni bilgiler elde etmek amacıyla, mantık kuralları doğrultusunda inşa edilmiştir. Tanımlar ve aksiyomlar dışında kalan her önerme ispat edilmelidir (Gosset 2003). Belki de matematik sahip olduğu bu yapıdan ötürü Sarı, Altun ve Aşkar (2007) tarafından "kanıtlama disiplini" olarak adlandırılmıştır. Genellikle matematiğe özgü bir işlem olarak kabul edilen ispat, bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu veya yanlışlığını, yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım 1996).

Matematiksel ispat, matematik eğitimi ve matematik alan yazınlarının önemli kavramlarından birisidir. İspat, matematiksel bilgilerin doğru-yanlışlığını ortaya koyarken (Tall ve Mejia-Ramos 2006), matematiksel bilginin inşasında, yani etkili matematik öğretiminin sağlanmasında da önem taşır. Knuth'a (2002) göre ispat matematik öğrenme sürecinin önemli bir aracıdır. İspat, sadece doğru matematiksel bilgiye ulaşmak adına değil, ayrıca matematik bilmek ve yapmak; matematiksel algının temelini oluşturmak; matematiksel bilginin kavranması, kullanılması ve geliştirilmesi adına da önemsenmektedir (Hanna ve Jahnke 1996; Kitcher 1984; Polya 1981). NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de ispatı, programın belirli konularının belirli zamanlarında yapılan özel bir aktivite olarak ele almamaktadır. İspat ve muhakeme, hangi konuda olunursa olsun, ders işlenme sürecinin doğal akışının bir parçası olmalıdır (NCTM 2000). Öğretim süreci içerisinde ispata bir konu alanı olarak yaklaşmayan, işlenen konudan bağımsız olarak ispatın öğretim sürecinin bir bileşeni olması gerektiğini savunan bu anlayış, anaokulundan 8. sınıfa değin, akıl yürütme ve ispata yönelik gelişimin takibini savunur. Alanda yürütülen çalışmalara bakıldığında da son zamanlarda, okul öncesi eğitim sürecinden başlayarak, ispat öğretiminin erken yaşlarda ele alınabileceğini savunan çalışmalarda bir artış gözlenmektedir (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar 2002; Cyr 2011; Hanna 1995; Maher ve Martino 1996; Schoenfeld 1994; Stylianides 2007a; Stylianides 2007b). Bu çalışmaların ortak noktası matematik eğitiminde ispata matematiksel bilginin kavranması açısından önem atfetmeleridir. Matematikte ezberin önlenmesi, kavramsal bilginin inşası ile anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi açılarından da ispat matematik öğretiminde kritik bir değer taşımaktadır. Sonuç olarak matematiksel ispat, öğrenci seviyesine uygun olabilecek bir içerik ve düzeyde ele alınarak öğretim sürecinin daha erken aşamalarında, bu sürecin temel bir bileşeni olarak kurgulanabilir.

Atfedilen bu öneme karşın Türkiye'de matematik öğretimi süreci içerisinde ispat yoğunluklu olarak lise ve üniversite düzeyinde ele alınmaktadır. Bugün ilkokul ve ortaokul müfredatında ispata değinilmemektedir. İspat öğretim programı içerisinde 9. ve 11. sınıf programlarında, geliştirilmesi hedeflenen matematiksel beceri ve yeterlilik olarak, 11. sınıfta ise "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı içerisinde aksine örnek verme, karşıt tersi ile ispat, doğrudan ispat, çelişki yoluyla ispat ve tümevarım yöntemleri ele alınmaktadır (MEB 2013b). Ortaöğretim programında ispata bu bağlamda yer verilmesine rağmen, Çalışkan'ın (2012) gerçekleştirdiği çalışma matematik öğretmenlerinin güncellenmemiş program kapsamında yer alan bazı temaları, özellikle de "İspat Yöntemleri" alt öğrenme alanını derste işlememe eğiliminde olduklarını ortaya koymuştur. Bu nedenle matematik eğitiminde ispatın tüm boyutlarıyla, aslolarak üniversite düzeyinde, özellikle de matematik eğitimi ve matematik bölümlerinde ele alındığını söylemek hatalı olmayacaktır.

İspat öğretiminin ileriki sınıf düzeylerine bırakılmasına karşın ispat becerisinin gelişiminde önemli olan soyut düşüncenin gelişimi ortaokul döneminde söz konusudur. Örgün eğitim sürecinin bu döneminde öğrenciler matematiksel ifadeleri sembolik dil kullanarak aktarmaya başlarlar. Öğrenciler matematiksel iddiaları tümdengelim ve tümevarım yöntemlerini kullanarak sınayabilir, yanlış olan ifadeler için karşı örnek sunabilirler (NCTM 2000). Gerek NCTM'in ispat öğretimine ve bireyde soyut düşüncenin gelişimine dair vurguları, gerekse daha önce bahsetmiş olduğumuz küçük yaş grupları ile ispat öğretimine yönelik yürütülen çalışmalar Türkiye'deki eğilimin aksine ispatın lise öncesi dönemde de ele alınabileceğini ortaya koymaktadır. Ne var ki Türkiye'deki mevcut öğretim programı bu yaklaşımı taşımamaktadır. Öğretim sürecini bu bağlamı dikkate alarak düzenlemek, programa ispatı uygun düzeyde, daha erken yaş kuşakları için de dâhil etmek, matematiksel ispatı matematik öğrenmenin etkin bir aracı haline getirebilmek açısından gerekebilir. Bunun için ise tüm öğretim kademelerinde, öğrencilerin ispata yönelik yaklaşımını, ispatı ne oranda algılayıp, yapabileceklerini betimleyecek çalışmalara ihtiyaç vardır.

Bu çalışmanın yürütüldüğü süreçte Türkiye'de ispata ilişkin, ortaokul düzeyinde gerçekleştirilen sadece 5 lisansüstü tez çalışması bulunmaktaydı (Arslan 2007; Albayrak Bahtiyari 2010; Çalışkan 2012; Demir 2011; Zaimoğlu 2012). Arslan 2007 yılında tamamladığı doktora tez çalışmasında, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme ve ispat yapabilme düzeylerinin gelişimini incelemiştir. Albayrak Bahtiyari'nin 2010 yılında tamamladığı yüksek lisans tezinde ise 8. sınıf öğrencilerinin matematik eğitiminde ispata ilişkin görüşleri betimlenmeye çalışılmıştır. Çalışkan (2012) ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin arasındaki ilişkiyi incelerken, Demir (2011) dinamik geometri yazılımı Cabri'nin yine 8. sınıf öğrencilerinin geometri alanındaki ispat becerileri üzerine etkisini incelemiştir. Zaimoğlu (2012) ise yine 8. sınıf öğrencileri ile çalışarak, onların geometrik ispat ve akıl yürütme sürecini, tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemiştir. Görüldüğü üzere çalışmalar büyük oranda 8. sınıf düzeyine yoğunlaşmıştır. İspat becerisi ve ispat öğretimine yönelik daha küçük yaş gruplarıyla çalışmaların yürütülmesine ihtiyaç bulunmaktadır.

Bu araştırmada ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin ispat becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretim uygulandığında, onların ispata yönelik becerileri ve ispat yöntemlerine ilişkin tercihlerinin ne doğrultuda değişeceği sorusuna yanıt aranmıştır. Bir önceki sınıf olan ilköğretim 6. sınıf için sembolik dili kullanabilmek temel bir beceridir. Bu dönemde öğrencilerden sembolik gösterimleri anlamlandırmaları ve cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapmaları beklenmektedir (MEB, 2013a). 7. sınıfa geçildiğinde ise sembolik dil kullanımı pekiştirilmektedir ve daha önce bahsedildiği üzere bu dönem soyut düşünme becerisinin gelişiminde önemli bir adımdır. Bu nedenle bu araştırmada ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin belirli bir soyutlama düzeyinde genellenebilir yargılar sunarak formal ispat yapabilecekleri, tümdengelimsel akıl yürütme becerisini kullanabilecekleri varsayılmaktadır. Araştırmada 7. sınıf öğrencilerine program dışı bir başlık olan ispat öğretimi uygulanarak yeni bir yaklaşım denenmiştir. Gerçekleştirilen ispat öğretimi uygulamasının ardından, ilköğretim 7. sınıf öğrencileri özelinde küçük yaş gruplarının ispat yapabilme düzeyleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Araştırmada ispat kavramıyla birlikte "doğrudan ispat", "durum yoluyla ispat", "karşı örnek vererek ispat" ve "tüketerek ispat" yöntemleri de ele alınmıştır. Araştırma sonucunda elde edilen bulguların, eğitimcilere uygulamalarında ve öğretim programının geliştirilebilmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

YÖNTEM

Bu bölümde bir eylem araştırması olarak yürütülen çalışmanın örneklemi, veri toplama süreci ve araçları ile veri analizine ilişkin bilgilere yer verilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırma Ankara ilinin, Çankaya ve Yenimahalle ilçelerine bağlı iki ortaokulda, 2012-2013 Eğtim Öğretim yılında birer 7. sınıf seçilerek, iki ayrı şubede gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın daha zengin veri sunması amacı ile farklı sosyoekonomik semtlerden iki ayrı okul seçilmiştir. Bu gerekçelerle rastlantısal değil amaçsal bir örneklem, amaçsal örneklem içerisinden de maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi tercih edilmiştir (Balcı 2005). Çankaya ilçesinde yer alan A şubesinde 15'i kız, 13'i erkek ve Yenimahalle ilçesinde yer alan B şubesinde ise 10'u kız, 13'ü erkek olmak üzere toplam 51 öğrenci ile uygulamaya başlanmıştır. Araştırma kapsamında gerçekleştirilen ispat testlerine girmeyen 3 öğrenci nedeniyle çalışma grubu daha sonra 48 kişi ile sınırlanmıştır.

Veri Toplama Süreci ve Araçları

Bu araştırma kapsamında ilk olarak ispat öğretimine yönelik 14 saatten oluşan 13 haftalık ders planı hazırlanmıştır. Ders planı matematik eğitimi alanında çalışmalarını yürüten 2 öğretim üyesinden oluşan uzman görüşüne sunulmuş ve Ankara ilinde, Mamak ve Çankaya ilçelerinde yer alan iki ortaokulda yapılan pilot uygulama ile sınanmıştır. Pilot uygulamada 36 öğrenci yer almıştır. Pilot uygulama değerlendirilerek ders planına son şekli verilmiştir.

Ana uygulamanın gerçekleştirilmesi için Çankaya ve Yenimahalle ilçelerine bağlı iki ortaokul seçilmiştir. İlk olarak her iki şubeye Hazır Bulunuşluk Testi uygulanmıştır. Öğrenciler ispat kavramıyla örgün eğitim süreci içerisinde hiç karşılaşmamışlardır. Hazır Bulunuşluk Testi ile öğrencilerin ispata yönelik ön becerilerinin betimlenmesi amaçlanmıştır. Hazır Bulunuşluk Testinde doğru olan önermeler ile yanlış bir önermenin ispatına ilişkin sorular bulunmaktadır. Bu sorular şu şekildedir: “Bir tek ve bir çift sayının toplamı tek sayıdır.”, “Ardışık iki sayının toplamı çift sayıdır.” ve “3’ün katı olan iki sayının farkı da 3’e bölünür.”.

Hazır Bulunuşluk Testi'nin ardından, toplamda 13 hafta süren, 14 ayrı dersi kapsayan ve öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmeyi amaçlayan ispat öğretimi uygulamasına geçilmiştir. Bu süreçte, sayılar konusu altında ardışıklık, teklik, çiftlik ve bölünebilme gibi alt konular tekrar edilip, bu konulara ilişkin sembolik gösterimler üzerinde durulmuştur. 13 hafta boyunca ele alınan örnekler üzerinden, sınıfta örnek vererek doğrulama ile ispat arasındaki fark tartışılmış, doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemleri ele alınmıştır.

İspat öğretimi uygulamasının ardından öğrencilere farklı amaçlar taşıyan, üç ayrı ispat testi, birer hafta arayla uygulanmıştır. İspat Testi 1, 2-4 seçenekli cevapları olan dört soruluk bir sınav olup, öğrencilerin ispata yönelik algılarını betimleyebilmek amacıyla düzenlenmiştir. İspat Testi 2, dört soruluk klasik bir sınav olup, öğrencilerin öğretilen ispat yöntemlerini ne derece uyguladıklarını ölçmek amacıyla düzenlenmiştir. İspat Testi 3 ise ispat öğretiminde ele alınan dört ispat yönteminden herbiri için ikişer önerme olmak üzere, toplam sekiz önermeden oluşmaktadır. Herbir önerme için tavsiye edilen ispat yönteminin adı parantez içinde verilmiştir. Bu sınavda öğrencilerden istenen sekiz önermeden dört tanesini seçerek önerilen yöntemle önermeyi ispatlamalarıdır. Bu sınavda amaçlanan, önermeler için önerilen ispat yöntemleri belirtildiğinde, bu durumun öğrencilerin önerme seçimini ne yönde etkilediğini ve öğrencilerin ispat becerilerini belirlemektir. Buçalışmada sadece İspat Testi 3’den elde edilen veriler yorumlanmıştır ve tüm çalışma boyunca İspat Testi 3, İspat Testi olarak adlandırılmıştır.

Uygulanan testlerin ardından, her iki sınıftan da öğrencilerin verdikleri doğru / yanlış tüm yanıtların çeşitliliğini içerecek şekilde 16 öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilerle yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler yaklaşık 1 saat sürmüştür ve kullanılan görüşme formu sınavlarda yer alan sorular temel alınarak hazırlanmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilerden her bir soruya verdiği cevabı gerekçelendirerek anlatması istenmiş, verdiği yanıt ile genellemeye ulaşıp ulaşmadığı sorgulanarak ispata yönelik beceri ve tercihleri görüşme aracılığıyla da gözlemlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin onayı ile ses kaydına alınan bu görüşmeler daha sonra çözümlenmiştir. Raporlaştırma sırasında öğrencilerin isimleri değiştirilerek aktarılmıştır.

Hazırlanan tüm veri toplama araçları yazarlar tarafından geliştirilmiş olup, son şeklini 8 öğretim elemanı ve 2 ortaokul matematik öğretmeninden oluşan uzman görüşüne başvurularak almıştır.

Veri Analizi

Veri analizinde nicel ve nitel yöntem bir arada kullanılmıştır. Sınavlarda elde edilen veriler, öğrencilerin her bir soruya verdikleri yanıtlar üzerinden kodlanmıştır. Kodlama sistemi öğrencilerin verdikleri yanıtlar ile önermenin ispatında kullanılan ispat yöntemleri dikkate alınarak yazarlar tarafından geliştirilmiştir. Her bir ispat yöntemi için ayrı birer kod sistematiği oluşturulmuştur. Kodların kapsam geçerliğinin sağlanması için üç kişiden oluşan uzman görüşüne başvurulmuş, onların değerlendirmeleri ile kod sistemine son şekli verilmiştir.

Gerçekleştirilen kodlamanın güvenilirliği için tüm sınav kâğıtlarının %20'si yazarlardan biri, bir ortaokul matematik öğretmeni, bir de ispat alanında çalışması bulunan bir akademisyen tarafından ayrı ayrı okunmuştur. Yanıtlara verilen kodlar karşılaştırılmış ve farklı kodlamalar üzerinde tartışma yürütülerek kodlamada fikir birliğine ulaşılmıştır. Kodlama başta %93,75 oranında tutarlılık göstermiş, yürütülen tartışmanın ardından %100 uyum elde edilmiştir.

BULGULAR

7. sınıf öğrencilerinin ispat beceri ve tercihlerinin irdelendiği bu çalışmada elde edilen veriler öğrencilerin önermelere ilişkin tercihi, ispat yöntemlerine ilişkin becerileri ve tercih - beceri karşılaştırması ana başlıkları altında ele alınmıştır. Araştırmanın Hazır Bulunuşluk Testine ilişkin bulgular ise Aylar (2014)'ın makalesinde ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu makalede Hazır Bulunuşluk Testine dair sadece ilgili bazı noktalar sunulacaktır.

Hazır Bulunuşluk Testinden elde edilen veriler öğrencilerin ispata yönelik bilgilerinin azlığını ortaya koymaktadır. Öğrenciler bu sınavda sembolik dili kullanamamış, önermeleri büyük oranda ya boş bırakmış, ispatlamamış ya da doğru olan önermeleri örnek vererek doğrulamışlardır. Öğrenciler, doğru bir önermenin ispatını yapamamışlardır. Fakat yanlış olan bir önerme kendilerine sunulduğunda, öğrenciler önermenin yanlış olduğunu algılayıp, ispat yöntemine dair bir bilgileri olmasa da, %53 oranında, karşı örnek vererek önermeyi ispatlayabilmişlerdir.

Öğrencilerin Önermelere İlişkin Tercihi

Bu makale kapsamında uygulanan İspat Testi'nde öğrencilerden 8 matematiksel önermeden 4'ünü seçerek ispatlamaları istenmiştir. Her önermenin ispatı için önerilen ispat yöntemi parantez içinde belirtilmiştir. İspat Testi'nde yer alan sorular ve bu soruları ispatlamayı tercih eden öğrenci sayıları şu şekildedir:

Tablo 1. *Sorular ve Bu Önermeleri Seçen Öğrenci Sayıları*

		Öğrenci Sayısı
		Toplam (n=48)
1.	Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz. (Doğrudan İspat)	39
2.	Bir tek ve bir çift sayıyı topladığınızda her zaman tek sayı elde edersiniz. (Doğrudan İspat)	43
3.	n, {1,2,3,4} kümesinin bir elemanıdır, bu durumda her zaman $(n + 2)^2 \geq 32$ dir. (Tüketerek İspat)	15
4.	n, {4,6,8,10,12} kümesinin bir elemanı olsun, bu koşulu sağlayan tüm n sayıları iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir. (Tüketerek İspat)	12
5.	İki sayının karelerinin toplamı her zaman çift sayıdır. (Karşı Örnek Vererek İspat)	41
6.	a sayısı (b + c)'yi tam bölen bir sayı olsun. Bu durumda a sayısı hem b, hem de c sayısını tam olarak bölen bir sayıdır. (Karşı Örnek Vererek İspat)	10
7.	Bir tam sayı tutun ve daha sonra bu sayının karesini alın, elde ettiğiniz sayının 4'e bölümünden kalan her zaman 0 veya 1'dir. (Durum Yolu ile İspat)	20
8.	x tam sayı olsun. Bu durumda $x - \|x\| \leq 0$ dır. (Durum Yolu ile İspat)	4

Uygulama öncesinde öğrencilerin ele alınan ispat yöntemlerinden karşı örnek vererek ispat ile tüketerek ispat yöntemlerini diğerlerine göre kolay bulacakları düşünülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin sınavdaki soru seçimlerini bu yöntemlerin kullanıldığı önermeleri seçerek yapacakları varsayılmaktaydı. Elde edilen bulgular, oldukça şaşırtıcıdır. Gerçekleştirilen sınavın ardından öğrencilerin yoğun olarak 1, 2 ve 5. soruları seçtikleri gözlenmiştir. Sadece 5. sorunun seçimi araştırmacıların beklentisi ile uyumludur.

Öğrencilerle yapılan görüşmede onlara bu tercihlerinin gerekçeleri sorulmuştur. Öğrencilerin büyük bir kısmı soru tercihinde ispat yönteminden ziyade verilen matematiksel ifadeyi anlayıp anlamadıklarına ve ifadenin kolay olup olmayışına dikkat ettiklerini söylemişlerdir. Görüşülen 16 öğrenciden 11'i seçimlerinde önermeye dikkat ettiklerini belirtirken sadece 2 öğrenci verilmiş ispat yöntemlerine bakarak seçimlerini yaptıklarını, 3 öğrenci ise verilen önermeyle birlikte ispat yöntemlerine de bakarak seçimlerini yaptığını belirtmiştir. Öğrenciler özellikle matematiksel sembolleri (mutlak değer, büyük / küçük işaretleri, küme işareti vb.) içeren önermeleri seçmemiş, yapılan görüşmede bu tercihlerini de açık olarak belirtmişlerdir. Bu öğrenciler için sembolik gösterimlerin yer aldığı ifadeler "karışık" ifadelerdir.

Derya: *Ben burada seçerken şuna dikkat ettim, daha çok mesela ... Şu tür sorularda zorlandığımı düşünüyorum. [8. soruyu göstermekte] ... Hem x'ler, hem de büyük küçük işaretleri var ya o zor geldi. Bir de karışık bir ifade gibi.*

Verilmiş ispat yöntemlerine dikkat ederek soruyu seçen öğrenciler ise gerekçelerini şu şekilde belirtmiştir:

Beyza: *İfadeler de kolay geldi ama ispat yöntemini görünce ne yapacağımı bildim, mesela tüketerek ispat, ne yapacağımı biliyordum o yüzden onu tercih ettim. Yöntemi biliyordum çünkü.*
Berk: *Hiç bir yöntem bana zor gelmedi ve hepsini denemek istedim. En kolay gelenleri seçebilirdim ya da daha hızlı yaparım diye karşı örnekleri seçebilirdim sadece ama hepsini denemek istedim.*

Öğrencilerin İspat Becerileri

Öğrencilerin Doğrudan İspat Yöntemine İlişkin Becerileri

İspat Testi'nde yer alan 1 ve 2. sorudaki önermelerin ispatı için en uygun yöntemin doğrudan ispat yöntemi olduğu, parantez içinde yöntemin adı verilerek vurgulanmıştır. Bu sorulara verilen yanıtların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

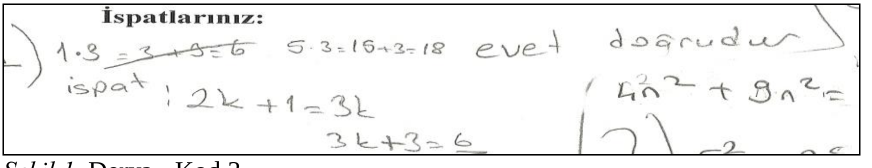
Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız/yanlış olan işlemler yapılmış.
Kod 2: Örnek vererek önerme doğrulanmış. Bu kod kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır; tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar ve birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar.
Kod 3: İspat fikri var ama çeşitli hatalar nedeniyle ispat tamamlanamamış.
Kod 4: Doğrudan ispat yapılmış.

İspat Testin'de yer alan 1. önermeyi *(Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklerseniz 6'nın katı olan bir sayı elde edersiniz.)* her iki şubeden toplam 39 öğrenci seçmiştir. Bu öğrencilerden % 17.9'u ispatı eksiksiz olarak tamamlamıştır (Kod 4). Kod 3 ve Kod 4'ü birlikte yorumlarsak, 39 öğrenciden 10 kişinin, yani yaklaşık olarak % 26'sının doğrudan ispat yöntemine ilişkin fikirlerinin olduğu, bunu sembolik olarak ifade edebildikleri söylenebilir. Diğer taraftan 39 öğrenciden 26 kişinin önermeyi bir ya da daha çok örnekle doğrulayarak ispatlamış olduklarını düşünmüş olmaları da oldukça dikkat çekicidir. Sadece 3 öğrencinin Kod 1 grubunda olması, öğrencilerin soruları geçiştirmeden cevaplamaya çalıştıkları şeklinde yorumlanabilir. Bu önermenin ispatı için verilen cevapların kodlamalara göre sayısı ve yüzdesi Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. *Birinci Önermeye İlişkin Bulgular*

Çözüme ilişkin kodlar		Toplam (39/48)	
		f	%
Kod 1		3	7.7
Kod 2	Tek bir örnek	17	43.6
	Çok örnek	9	23.1
Kod 3		3	7.7
Kod 4		7	17.9

Birinci önermeyi seçen ve örnek vererek doğrulayan öğrencilerle yapılan görüşmelerde bu öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlama ve uygulamada farklı düzeylerde de olsa sorun yaşadıkları gözlenmiştir. Derya önce örnek vererek önermeyi doğrulamış, sonra da tek sayının sembolik gösterimini yazabilmesine rağmen ispatı devam ettirememiştir. Yanıtı Kod 3 türündedir.



Şekil 1. Derya - Kod 3

Görüşme sırasında aynı önermeyi yeniden ispatlaması istenen Derya, ispatı yeniden ele alırken kâğıdındaki eksiği de fark etmiştir:

Araştırmacı: *Ben senden bu ifadeyi yeniden ispatlamanı istesem şuraya [beyaz bir kâğıdı göstermekte], bana yeniden ispatlar mısın?*
Derya: *Cebirsel olarak tek sayıyı, 2k+1 olarak gösteriyorduk.*
Araştırmacı: *Evet, doğru, bu dediğini yaz istersen.*
Derya: *Bunu 3 ile çarpıcam, bir de +3. ... Önce şunları çarparım 3 çarpı, 6k olur, +3, bir de + 3. Önce şunları toplarım, 6k+6 olur.*
Araştırmacı: *Şimdi bu bulduğun sayı 6'nın katı mı? Yani bu sayı 6'ya bölünür mü?*
Derya: *Evet*
Araştırmacı: *Niçin?*
Derya: *6k, çift sayı ve 6'ya bölünür, +6 var o da 6'ya bölünür. [sonra kendi yaptığına, asıl soru formuna bakar] Aaa burada devam etmemişim, 2k+1' i 3 ile çarpıp devam etmem gerekirdi, yapmamışım.*

İkinci önermede de *(Bir tek ve bir çift sayıyı topladığınızda her zaman tek sayı elde edersiniz.)* öğrencilerin örnek vererek doğrulama eğilimleri devam etmiştir. Tüm öğrencilerin % 58.1'i tek veya çok sayıda örnek vererek önermeyi doğrulamış, Kod 2'de yer almıştır. Birinci önermeye göre, ispatın gerçekleştirilme oranı daha yüksektir. Tüm öğrencilerin % 30.2'si Kod 4 türü yanıt vermiştir. Kod 3 ve Kod 4'ü birlikte yorumlarsak, 16 öğrencinin, yani tüm öğrencilerin % 37.2'sinin doğrudan ispat yöntemine ilişkin fikirlerinin olduğu, bunu sembolik olarak ifade edebildikleri söylenebilir. Bu önermenin ispatı için verilen cevapların kodlamalara göre sayısı ve yüzdesi Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. *İkinci Önermeye İlişkin Bulgular*

Çözüme ilişkin kodlar		Toplam (43/49)	
		f	%
Kod 1		2	4.7
Kod 2	Tek bir örnek	12	27.9
	Çok örnek	13	30.2
Kod 3		3	7
Kod 4		13	30.2

Sınavda örnek vererek doğrulama yapan ve yanıtı Kod 2'de yer alan Gizem ile örnekle doğrulama ve ispat arasındaki fark, görüşmenin ilk kısımlarında tartışılmıştı. Önceki tartışmaların etkisi ile Gizem bu soruya genellenebilir bir yargıya ulaşmak üzerinden yaklaşmıştır ve araştırmacının destek amaçlı yönlendirmesi ile ilerleyebilmiştir:

Araştırmacı: *Nasıl gösteriyorduk tek sayıları? Çift sayılar üzerinden düşün.*
Gizem: *Çift sayılardan her zaman 1 fazla olan sayılar olabilir. (...) 2a çift olur, bir fazlası da 2a+1. Buraya öyle mi yazayım?*
Araştırmacı: *Evet, yaz bakalım.*
Gizem: *2a*
Araştırmacı: *Bir de senden tek sayı yazmanı istiyor değil mi?*
Gizem: *O da 2a+1 olur.*
Araştırmacı: *Soru bize bir tek sayı bir de çift sayı al diyor, sen bu sayıları aldın, bunları topla diyor, bir topla bakalım.*
Gizem: *4a artı 1 olur.*
Araştırmacı: *Tamam, peki bu sayı sence tek sayı mıdır? Çift sayı mıdır?*
Gizem: *Tek.*
Araştırmacı: *Niçin?*
Gizem: *1 verdim mesela 5 çıkıyor.*
Araştırmacı: *İfadenin savunduğu şeyi bulmuş olduk mu?*
Gizem: *Evet her zaman tek sayıdır diyordu, tek sayı bulduk biz de.*

Sembolik gösterimleri kullanmakta ilk etapta biraz zorlanan Gizem, araştırmacının yönlendirmesi ile ispatı tamamlayabilmiştir. Yine de 4a+1 sayısının tek ya da çift sayı olup olmadığına a sembolüne değer vererek ulaşmıştır.

Doğrudan ispat yöntemi ile ilgili önermeler birlikte incelendiğinde, öğrencilerin önemli bir bölümünün ispat yapmak yerine önermeyi örneklendirerek doğrulama eğiliminde oldukları gözlenmektedir. Bu öğrenciler sembolik ifadeleri anlama ve kullanmakta sorun yaşamaktadırlar. Bu eğilime karşın öğrenciler % 17.9 ile % 30.2 arasında değişen bir oranda verilen önermeleri eksiksiz olarak ispatlayabilmiştir. Bu oran çeşitli hatalar nedeniyle ispatı tamamlayamayan ama doğrudan ispata yönelik fikri olan öğrencileri de hesaba kattığımızda % 25.6 ile % 37.2 düzeylerine çıkabilmiştir. İkinci önerme birinci önermeye göre daha çok öğrenci tarafından ispatlanabilmiştir. İkinci önermenin ispatlanabilme oranının fazlalığının önermenin içerdiği matematiksel ifadenin kolay oluşundan veya bu önermenin hazırbulunuşluk testinde de kullanılmış olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Gerçekleştirilen görüşmelerde ise sınav esnasında ispatı yapamayan öğrencilerin bazen kolaylıkla, bazen de araştırmacının yönlendirmeleri ile ispatı tamamlayabildiği gözlenmiştir.

Öğrencilerin Tüketerek İspat Yöntemine İlişkin Becerileri

İspat Testi'nde yer alan 3 ve 4. sorudaki önermelerin ispatı için en uygun yöntemin tüketerek ispat yöntemi olduğu, parantez içinde yöntemin adı verilerek vurgulanmıştır. Bu sorulara verilen yanıtların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.
Kod 2: Sadece birkaç sayı denenmiş, kümedeki tüm elemanlar denenerek tüketilmemiş.
Kod 3: Tüketerek ispat yöntemi uygulanmış ama önermenin hatalı geçirilmesi veya işlem hatası gibi nedenlerle yanlış sonuca ulaşılmış, başka bir önerme ispatlanmış.
Kod 4: Tüketerek ispat yapılmış.

Tüketerek ispat yönteminin yer aldığı önermeler genel olarak az sayıda öğrenci tarafından seçilmiştir. Seçtikleri halde bu önermelerin ispatını yapmada isteksiz olan öğrencilerin, yani Kod 1'de yer alan öğrencilerin oranı bu önermelerde, 1. ve 2. önermeye oranla daha çoktur. Dördüncü önermede hiçbir öğrenci Kod 2 düzeyinde yer almazken, üçüncü önermede bu oran % 13.3'tür. Bu 2 öğrenci denedikleri 1 ya da 2 sayı ile ispatı gerçekleştirdiklerini düşünmüşlerdir. Her iki önermeyi birlikte değerlendirdiğimizde, öğrencilerin tüketerek ispat yapma fikrine sahip olarak verdiği yanıtlar (Kod 3 ve Kod 4) % 66.6 düzeyindedir. İspat Testi'nde yer alan 3 ve 4. önermelere ilişkin cevapların kodlamalara göre sayısı ve yüzdesi Tablo 4 ve Tablo 5'te verilmiştir.

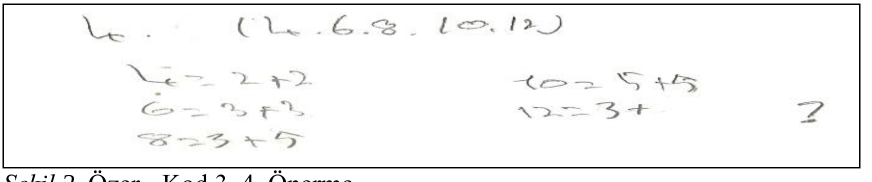
Tablo 4. *Üçüncü Önermeye İlişkin Bulgular; "n, {1,2,3,4} kümesinin bir elemanıdır, bu durumda her zaman $(n + 2)^2 \geq 32$ dir."*

Çözüme ilişkin kodlar	Toplam (15/48)	
	f	%
Kod 1	3	20
Kod 2	2	13.3
Kod 3	2	13.3
Kod 4	8	53.3

Tablo 5. *Dördüncü Önermeye İlişkin Bulgular; " n, {4,6,8,10,12} kümesinin bir elemanı olsun, bu koşulu sağlayan tüm n sayıları iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir."*

Çözüme ilişkin kodlar	Toplam (12/48)	
	f	%
Kod 1	4	33.3
Kod 2	-	-
Kod 3	1	8.3
Kod 4	7	58.3

Bu ispat türünde Kod 3'te yer alan öğrenciler tüketerek ispat mantığını kullanmalarına rağmen ya 3. önermeyi kâğıda yanlış geçirdikleri için başka bir önermenin ispatını yapmışlardır, ya da 4. önermede yer alan kümedeki sayıları asal iki sayının toplamı şeklinde yazmakta zorlandıkları için ispatı tamamlayamamışlardır. Özer ispatı bu nedenle tamamlayamayan öğrencilerden birisidir;



Şekil 2. Özer - Kod 3, 4. Önerme

Tüketerek ispat yöntemi kullanılarak ispat yapılan sorular birlikte değerlendirildiğinde öğrencilerin tüketerek ispat yöntemi ile ilgili soruları tercih etme oranı düşük olsa da bu önermeleri ispatlama oranları yüksektir. 3. önermede Kod 2 düzeyinde yer alan 2 öğrenci, ispat yapmaya çalışmış yalnız verili kümedeki sayıları tek tek deneyerek tüketme fikrine sahip olmadıkları için önermeyi bir / iki örnek vererek doğrulamışlardır.

Öğrencilerin Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemine İlişkin Becerileri

İspat Testi'nde yer alan 5 ve 6. sorudaki önermelerin ispatı için en uygun yöntemin karşı örnek vererek ispat yöntemi olduğu, parantez içinde yöntemin adı verilerek vurgulanmıştır. Bu sorulara verilen yanıtların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.
Kod 2: İfadenin doğru olduğu düşünülerek çeşitli şekillerde savunulmuş.
Kod 3: Karşı örnek vererek ispat yapılmış.

Öğrencilerin karşı örnek vererek yapılan ispatlardaki başarı düzeyi oldukça yüksektir. Bu oran, yani Kod 3 düzeyi 5. önermede % 82.9, 6. önermede % 90'dır. Beşinci önermede 3 öğrenci önermeyi seçtiği halde ispata ilişkin bir yanıt üretmeyip Kod 1 düzeyinde yer alırken bu sayı 6. önermede 1 öğrenciye düşmüştür. Altıncı önermede hiçbir öğrenci Kod 2 düzeyinde yanıt vermemiş, beşinci önermede 4 öğrenci, verilen ifadenin doğru olduğunu düşünerek önermeyi örnekle doğrulamaya çalışmışlardır. İspat Testi'nde yer alan 5. ve 6. önermelere ilişkin cevapların kodlamalara göre sayısı ve yüzdesi Tablo 6 ve Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 6. *Beşinci Önermeye İlişkin Bulgular; " İki sayının karelerinin toplamı her zaman çift sayıdır."*

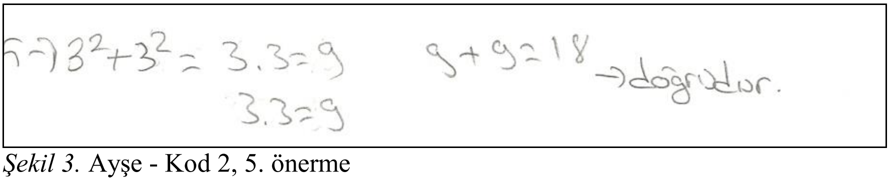
Çözüme ilişkin kodlar	Toplam (41/48)	
	f	%
Kod 1	3	7.3
Kod 2	4	9.8
Kod 3	34	82.9

Tablo 7. *Altıncı Önermeye İlişkin Bulgular; " a sayısı (b + c)' yi tam bölen bir sayı olsun. Bu durumda a sayısı hem b, hem de c sayısını tam olarak bölen bir sayıdır."*

Çözüme ilişkin kodlar	Toplam (10/48)	
	f	%
Kod 1	1	10
Kod 2	-	-
Kod 3	9	90

Aynı ispat yöntemi ile ispatlanacak bu iki önerme içerisinden 5. önermeyi çok sayıda öğrencinin seçmiş olmasına karşın 6. önermeyi seçen öğrenci sayısı oldukça azdır. Öğrencilerin bu seçiminde önermenin uzun olup olmayışının, 6. önermenin bölünebilme kavramını içermesinin, 5. önermenin daha anlaşılır oluşunun etkili olduğu düşünülmektedir.

Beşinci önermenin doğru olduğunu düşünen 4 öğrenci önermeyi tek bir örnek deneyerek doğrulamıştır. Bu öğrenciler karşı örnek vererek ispat yönteminin önerilmiş olmasına rağmen karşı örnek verme eğiliminde bulunmamış, denedikleri bir örneğin ifadeyi doğrulamasıyla yetinerek önermenin doğru olduğunu savunmuşlardır. Bu öğrencilerde ispat yönteminin ismine yönelik bir farkındalık olmadığı gözlenmektedir. Ayşe denediği tek bir örneğin genellenebilir bir yargı sunacağını düşünerek bu hataya düşen öğrencilerden birisidir.



Şekil 3. Ayşe - Kod 2, 5. önerme

Karşı örnek vererek ispat yönteminin kullanıldığı önermelerde öğrencilerin bu soruları seçme oranları değişkenlik göstermekle birlikte, öğrencilerin ispatı yapma oranları her iki önermede de oldukça yüksektir.

Öğrencilerin Durum Yolu ile İspat Yöntemine İlişkin Becerileri

İspat Testi'nde yer alan 7 ve 8. sorudaki önermelerin ispatı için en uygun yöntemin durum yolu ile ispat yöntemi olduğu, parantez içinde yöntemin adı verilerek vurgulanmıştır. Bu sorulara verilen yanıtların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız, yanlış işlemler yapılmış.
Kod 2: İfade'nin yanlış olduğu çeşitli şekillerde savunulmuş.
Kod 3: İfade örnek vererek doğrulanmış.
Kod 4: Durum yolu ile ispat yapılmış.

Sınav esnasında hiçbir öğrenci durum yolu ile ispat yapamamış, yani Kod 4 düzeyinde yer almamıştır. Öğrencilerin önemli bir bölümü bu önermeleri de örnek vererek doğrulamışlardır. Yedinci önermede öğrencilerin % 55'i, sekizinci önermede ise % 75'i Kod 3'te yer almaktadır. İspat Testi'nde yer alan 7 ve 8. önermelere ilişkin cevapların kodlamalara göre sayısı ve yüzdesi Tablo 8 ve Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 8. *Yedinci Önermeye İlişkin Bulgular; " Bir tam sayı tutun ve daha sonra bu sayının karesini alın, elde ettiğiniz sayının 4'e bölümünden kalan her zaman 0 veya 1'dir."*

Çözüme ilişkin kodlar		Toplam (20/48)	
		f	%
Kod 1		5	25
Kod 2		4	20
Kod 3	Tek bir örnek	5	25
	Çok örnek	6	30
Kod 4		-	-

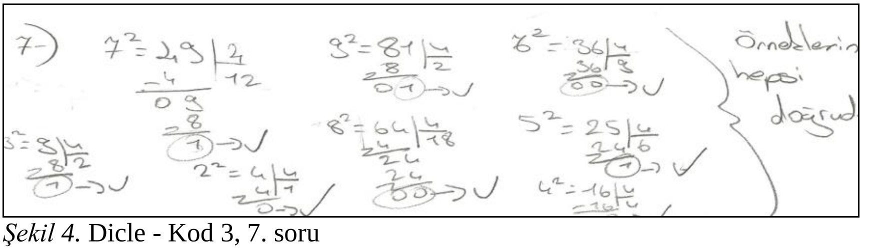
Tablo 9. *Sekizinci Önermeye İlişkin Bulgular; " x tam sayı olsun. Bu durumda $x - |x| \leq 0$ dır."*

Çözüme ilişkin kodlar	Toplam (4/48)	
	f	%
Kod 1	1	25
Kod 2	-	-
Kod 3 (birden çok örnek)	3	75
Kod 4	-	-

Yedinci ve sekizinci önermelerin seçiminde de öğrenciler verili ispat yöntemini temel alarak değil (sadece Berk 7. önermeyi seçme nedenini, tüm ispat yöntemlerinden birer tane yapmak istediğini ve buna göre soruları seçtiğini belirterek açıklamıştır) önermenin kolay ve anlaşılır olmasına dikkat ederek seçimlerini yaptıklarını belirtmişlerdir. Cebirsel ifadeler ile matematiksel sembolleri içeren 8. önerme sadece 4 kişi tarafından seçilmiştir.

Yedinci önermeyi seçen 4 öğrenci sorunun ispatı için örnek denemiş, bölüm ve bölen kavramlarını karıştırdıkları için yaptıkları işlemin sonunda önermenin yanlış olduğunu savunmuşlardır. Bu nedenle Kod 2'de yer almışlardır. Altıncı önermenin öğrenciler tarafından seçilmemesinde etkili olan bölme, bölünebilme kavramları, bu önermenin ispatında da öğrencilerin hata yapmalarına neden olmuştur.

Birden çok örnekle önermeyi doğrulayan öğrenciler her ne kadar önermenin ispatında yer alan durumları örneklendirmiş olsalar da kullandıkları örnekler üzerinden de bir çıkarımda bulunamamışlardır. Bu öğrencilerden birisi olan Dicle 7. önermenin ispatı için çok sayıda örnek denemiştir. Denediği sayılardan tek sayı olanlarının bölümünden kalan sayının 1, çift sayıların bölümünden kalanının 0 olduğu yargısına denediği örnekler üzerinden ulaşamamış, sadece örneklerin sonucuna bakarak önermenin doğru olduğuna kanaat getirmiştir.



Şekil 4. Dicle - Kod 3, 7. soru

Durum yolu ile ispat yönteminin kullanıldığı önermeler birlikte dikkate alındığında öğrencilerin en başarısız olduğu yöntem bu olmuştur. Hiçbir öğrenci ispatı tamamlayamamıştır.

Öğrencilerin İspat Tercih ve Becerilerinin Birlikte Değerlendirilmesi

Tablo 10. *Önermeleri Tercih Eden ve İspatı gerçekleştiren Öğrenci Sayıları*

İspat Yöntemi ve Önerme	Önermeyi Tercih Eden Öğrenci Sayısı	İspatı Yapan Öğrenci	
		Sayısı	Yüzdesi
1. Önerme (Doğrudan İspat Yöntemi)	39	7	17.9
2. Önerme (Doğrudan İspat Yöntemi)	43	13	30.2
3. Önerme (Tüketerek İspat Yöntemi)	15	8	53.3
4. Önerme (Tüketerek İspat Yöntemi)	12	7	58.3
5. Önerme (Karşı Örnek Vererek İspat Y.)	41	34	82.9
6. Önerme (Karşı Örnek Vererek İspat Y.)	10	9	90

7. Önerme (Durum Yolu İle İspat Yöntemi)	20	-	-
8. Önerme (Durum Yolu İle İspat Yöntemi)	4	-	-

Tablodan da görüldüğü üzere, 5. önermenin tercih edilme ve ispatlanma düzeyi diğer verili önermelere göre oldukça yüksektir. Aynı yöntem ile ispatlanacak olmalarına karşın, 5 ve 6. önerme ile 7 ve 8. önermeler arasında tercih edilme oranları bakımından önemli bir fark vardır. Öğrencilerin bu önermeleri seçiminde ispat yöntemi değil, önermelerin içerdiği matematiksel içerik etkili olmuştur.

Önermelerin seçilme oranı ile ispatlarının yapılma oranı birlikte incelenirse tüm ispat yöntemleri için seçimin bilinçli yapıldığı söylenemez. Tüketerek ispat ve karşı örnek vererek ispat yöntemleri ile ilgili önermelerin seçilme ve başarılı bir şekilde ispatlanma düzeyleri arasında bir tutarlılık gözlenmektedir. Doğrudan ispat yöntemi ve durum yolu ile ispat yöntemi ile ilgili önermelerde ise bu tutarlılığa rastlanamamaktadır. Sekizinci önermede yer alan mutlak değer ve eşitsizlik sembolleri öğrencilerin önerme seçiminde caydırıcı bir etki yaratırken, yedinci önerme anlatımının içerdiği basitlik nedeniyle 20 öğrenci tarafından seçilmiştir. Bu iki önermenin seçilme oranları arasında ciddi bir fark varken her iki önerme de öğrenciler tarafından ispatlanamamıştır.

SONUÇ ve YORUM

İspat becerisini geliştirmek amacıyla yapılan öğretim sürecinin öncesinde doğru bir önermenin ispatında öğrenciler ya soruyu boş bırakmış, ya da önermeyi örnek vererek doğrulamıştı. Öğretim sürecinin ardından ise öğrencilerin doğru bir önermenin ispatında örnek vererek doğrulama eğilimleri azalmış ama yine de devam etmiştir. Öğretim sürecinin ardından uygulanan İspat Testi dikkate alındığında, öğrencilerin doğru bir önermenin ispatında yoğun olarak örnek vererek doğrulama eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Bu sonuç literatürde yer alan pek çok çalışma (Cooper, Walkington, Williams, Akinsiku, Kalish, Ellis 2011; Çalışkan 2012; Healy ve Hoyles 2000; Knuth, Chopin ve Bieda 2012) ile uyumludur. Önermeyi yoğun olarak tek bir örnek ile mi, yoksa birden çok sayıda örnek deneyerek mi doğruladıkları sorulara göre değişkenlik göstermiştir. Bu ayrıştırmada baskın bir eğilime rastlanamamış, öğrencilerin bu doğrultudaki tercihlerinde anlamlı bir farka ulaşılmamıştır. Oranlar birbirine yakındır. Buna karşın literatürde (Balacheff 1988; Cooper vd. 2011; Lannin 2005) örnek vererek doğrulama eğilimlerinde kullanılan örneklerin sayısı ve niteliğinin genellenebilir bir yargı sunma çabaları açısından anlam taşıyabildiğine de değinilmektedir. Bu araştırmada ayrıntılı olarak bu bağlamda bir analize girilmemiştir. Ampirik verilerle gerçekleştirilen doğrulama ve ispat ilişkisi bu yaş kuşağı ele alınarak başka bir çalışma kapsamında yürütülebilir.

Öğrencilerin doğru bir önermenin ispatında örnek vererek doğrulama eğilimlerinin baskın olmasına karşın, öğretim sürecinin ardından ispat becerilerinde de bir artış gözlenmiştir. Öğrenciler doğrudan ispat yönteminin kullanıldığı 1. ve 2. önermelerde sırasıyla % 18 ile % 30'a yaklaşan bir oranda verilen önermeleri eksiksiz olarak ispatlayabilmiştir. Bu oran doğrudan ispat yöntemi mantığını uygulayan ama çeşitli hatalar nedeniyle ispatı tamamlayamayan öğrenciler de dâhil edildiğinde sırasıyla % 26 ve % 37'ye yaklaşabilmektedir. Tüketerek ispat yöntemi ile ilgili sorularda da benzer bir eğilim gözlenmiş, tüketerek ispat mantığını kullanan öğrencilerin oranı her iki önermede de % 65'i geçebilmiştir. Öğrencilerin en başarısız olduğu ispat yöntemi durum yolu ile ispat yöntemi olmuştur, hiçbir öğrenci durum yolu ile ispat yapamamıştır.

Yanlış bir önermenin ispatında ise öğrencilerin gerek öğretim süreci öncesi, gerekse sonrası başarı düzeyleri dikkat çekecek düzeyde yüksek çıkmıştır. Hazır Bulunuşluk Testinde öğrenciler % 53 oranında bir önermenin yanlışlığını ispatlayabilmişken, bu oran öğretim sürecinin ardından % 80 düzeyini geçebilmiştir. İspat Testinde öğrencilerin en başarılı olduğu ispat yöntemi karşı örnek vererek ispat yöntemi olmuştur. Bunda ele aldıkları önermenin, önermeyi sağlamayan bir örnek bulunarak çürütülmesinin kolaylığının etkili olduğu düşünülmektedir.

Araştırma kapsamında gerçekleştirilen uygulamada ispat yöntemlerine yönelik adlandırma, uygulamanın sonunda ele alınmıştır. Elde edilen bulgular öğrencilerin ispat yöntemlerinin adlarına yönelik farkındalıklarının yeterince gelişmediğini ortaya koymuştur. Sınav sırasında öğrenci "karşı örnek vererek ispat" ifadesini gördüğünde karşı örnek vererek önermeyi çürüteceğini, ya da "tüketerek ispat" adını gördüğünde ise kümedeki tüm elemanları tek tek deneyerek tüketeceğini fark edememiştir. Öğrenciler bu durumu görüşmede ifade etmişlerdir. Birebir görüşmede bu yöntemler üzerine yürütülen tartışmaların ardından ise ispat yöntemleri ve adlarına yönelik farkındalıklarının arttığı gözlenmiştir. Görüşmede öğrencilere, bu testteki soru tercihlerini neye göre yaptıkları da sorulmuştur. Belki de ispat yöntemlerinin adlarına yönelik sahip oldukları eksikliklerin de etkisiyle öğrenciler seçiminde yöntem adlarından ziyade, matematiksel ifadenin kolay ve anlaşılır olmasına dikkat ettiklerini belirtmişlerdir. Tercihlerinde ispat yöntemleri adlarına göre seçim yaptıklarını belirten sadece iki öğrenci olmuştur ve bu öğrenciler ispat performansları yüksek olan öğrencilerdir.

Son olarak, araştırmada elde edilen bulgular öğrencilerin sembolik ifadeleri anlama ve yazmada zorlandıklarını da ortaya koymaktadır. İspata yönelik performanslarını olumsuz etkileyen faktörlerden birisi de budur. Arslan (2007) çalışmasında öğrencilerin cebir kullanarak genellemeye ulaşma eğiliminin düşük olduğunu ortaya koyarken, Zaimoğlu (2012) da öğrencilerin cebirsel ispatı bir yöntem olarak kullanmayı tercih etmediğini belirtmektedir. Cooper ve diğerlerinin (2011) gerçekleştirdikleri bir çalışmanın sonucuna göre ise öğrenciler ispat yaparken öncelikle görsel ve anlatımsal yöntemleri, en son olarak da cebirsel ifadeleri kullanmaktadırlar. Buna karşın öğrencilerin sınıf düzeyi ilerledikçe (6. sınıftan 8'e doğru) cebir kullanarak doğru sonuca ulaşma eğiliminde, beklenen düzeyde olmasa da bir artış yaşanmaktadır (Arslan 2007; Çalışkan 2012). Tüm bu çalışmalar cebir öğrenme alanına yeni giriş yapan bu yaş kuşağının bu alanla ilgili yaşadıkları sorunu ve bu sorunun ispat becerisi ile ilişkisini ortaya koymaktadır. Bu araştırmada da öğrenciler cebirsel ifade kullanımında zorlanmış ve tercih etmemişlerdir. İspat Testinde örnek vererek doğrulamayı ispat sanan öğrencilerle daha sonrasında yapılan görüşmede onların örnek vererek doğruladıkları önermeleri yeniden ispatlamaları da istenmiştir. Az sayıdaki öğrenci yaptıkları doğrulamanın ispat olduğu noktasında ısrarcı olurken, öğrencilerin önemli bir kısmı araştırmacının destek ve yönlendirmeleri ile ispatı tamamlayabilmiştir.

Bu araştırmadan elde edilen bulgular cebir ile ispat becerisi ve tercihi arasında bir ilişkinin olduğunu ortaya koymaktadır. Bu ilişki daha derinlemesine araştırılabilir, ortaokul öğrencilerinin cebir konu alanına ilişkin yeterlikleri ile ispat becerileri arasındaki ilişki başka çalışmalara konu olabilir. Ayrıca araştırma 7. sınıf öğrencileri ile sınırlandıırlmış olup benzer çalışmalar diğer sınıf düzeylerine de uygulanabilir. Tüm bu alan araştırmaları ortaokul döneminde ispatın nasıl ele alınacağına yönelik önemli bilgiler sunacaktır.

KAYNAKLAR

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Albayrak Bahtiyari, Ö. (2010). *8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat Ve Muhakeme Kavramlarının Ve Önemlerinin Farkındalığı*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Aylar, E. (2004). 7. Sınıf Öğrencilerinin ispata Yönelik Becerilerinin İrdlenmesi, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 47 (1), 351-376.

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics, in D. Pimm, *Mathematics, Teaccahers and Children*, London: Hodder & Stoughton.

Balcı, A. (2005). *Sosyal Bilimlerde Araştırma*, Ankara: Pegem Yayıncılık.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 907–920), L.I.Tatsien (Eds.), Vol. III, Beijing: Higher Education Press,

Cooper, J., Walkington, C., Williams, C., Akinsiku, O., Kalish, C., Ellis, A., et. al. (2011). Adolescent Reasoning İn Mathematics: Exploring Middle School Students' Strategic Approaches To Empirical-Based Justifications. *In Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA.

Cyr, S. (2011). Development Of Beginning Skills İn Proving And Proof Writing By Elementary School Students, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Rzeszów, Poland.

Çalışkan, Ç. (2012). *8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarılarıyla İspat Yapabilme Seviyelerinin İlişkilendirilmesi*, Yayınlanmamış Yükseklisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Demir, F. (2011). *Bir Dinamik Geometri Yazılımının İlköğretim Öğrencilerinin Geometride İspat Becerilerine Etkisi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.

Gossett, E. (2003). *Discrete Mathematics With Proof*, USA: Pearson Education, Inc.

Hanna, G. (1995). Challanges to the İmportance of Proof, *For he Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

Karaçay, T. (2009). *Soyut Matematiğe Giriş*, Ankara: Başkent Üniversitesi Yayınları.

Knuth, E. J. (2002).Teachers conceptions of proof in the context of secondary school mathematics, *Journal of Mathematics Teachers Education*, 5, 61 – 88.

Knuth, E. J., Chopin, J. M. & Bieda, K. N. (2012). Middle School Students' Production of Mathematical Justification, *Teaching and Learning Proof Across the Grades A K16 Perspective*, Stylianou, D. A.; Blanton, M. L.; Knuth, E. J. (Eds.), London - New York: Routledge.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities, *Mathematical Thinking and Learning*, 7:3, 231-258.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study, Journal for Research in Mathematics Education, 27 (2), 194-214.

M.E.B. (2013a). *Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Programı*, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

M.E.B. (2013b). *Orta Öğretim Matematik (9.10.11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı*, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (2000). *Principles And Standards For School Mathematics*, Reston, Va: NCTM.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite Öğrencilerinin Analiz Dersi Kapsamında Matematiksel Kanıtlama Süreçleri: Örnek Olay Çalışması, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40 (2), 295-319.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics. Schoenfeld, A. (Eds.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp.53-70), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stylianides, A. J. (2007a). Proof and Proving in School Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2007b*). The Notion Of Proof İn The Context Of Elementary School Mathematics. Educational Studies in Mathematics*, 65, 1–20.

Tall, D. & Mejia-Ramos, J. P. (2006). *The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof*, presented at the Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Essen, Germany.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel Düşünme* (2. Baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Zaimoğlu, Ş. (2012), *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

SUMMARY

Mathematical proof is an important part in mathematics and also important in teaching mathematics. Proofs demonstrates the correctness or incorrectness of mathematical information (Tall & Mejia-Ramos 2006) and also it is important in teaching mathematics in terms of the comprehension of mathematical knowledge. Proof has critical value in the teaching process in terms of the prevention of memorization in mathematics, the construction of conceptual knowledge, and the realization of meaningful learning. It has been seen that it is an important instrument in the mathematics learning process (Knuth 2002).

NCTM also discussed proof as an important component of mathematics teaching process for every age group. NCTM does not consider proof as a special activity of certain subjects of the curriculum. Proof and reasoning must be a part of the process of teaching, no matter what the subject is (NCTM 2000).

In the last few decades, even though NCTM has suggested the integration of proofs to all mathematics topics and through all grades, very few studies on Turkey were found focusing on how middle school students deal with proofs. But there is an increase in studies advocating that proof teaching can start in the early age groups, starting from preschool education (Ball et al. 2002; Cyr 2011; Hanna 1995; Maher & Martino 1996; Schoenfeld 1994; Stylianides 2007a; Stylianides 2007b).

During the middle school years, students develop abstract thinking. Students should be able to test mathematical arguments with the induction and deduction methods and they should be able to present examples against incorrect expressions, and express mathematical expressions using symbolic language. Students should be encouraged to use the logic of deduction in this period (NCTM 2000).

By taking these factors into consideration, in this study it was assumed that 7th grade students could perform formal proof by presenting generalisable judgments at a certain level of abstracting and use deductive reasoning. This research explores how seventh graders' ability to do proofs and their preferences on proving have changed as a result of a treatment consisting of 14 hours of instruction, aimed at developing a formal approach to proofs. The study focuses on direct proof, proof by cases, proof by contradiction, and exhaustive proof. Study also describes the difficulties encountered by students when doing proofs.

This study was designed as action research, which is one of the qualitative research approaches. Qualitative and quantitative data have been utilized together in this study. This study was conducted with a 48, 7th grade students in each of the middle schools located in the districts of Yenimahalle and Çankaya in the province of Ankara. With the purpose of having the study present richer

data, two schools and classes were selected from different socioeconomic sets. A purposive sample was formed rather than a random one.

For data collection, Students' Readiness Quiz, Proof Quiz, and semi-structured interview form were developed and used. The data obtained following the application were encoded over the answers of students to each question and the percentages and frequencies of these codes were determined. The reliability of the encoding procedure was ensured through the Investigator Triangulation method. Following the applied quizes, 16 students were selected in a manner covering the diversity of the answer provided by students of both classes and semistructured in-depth interviews were conducted with these students. In these interviews, students were requested to explain and justify each answer and with the selected response, attempts were made to obtain more detailed information on their perception towards proof by questioning whether or not they reached a generalization.

Before the classroom intervention that concentrated in proofs, students could not prove propositions, but attempted at justification by giving numerical examples, and sometimes could not even do that. After the intervention, a decrease was observed in the tendency to attempt to justify propositions via giving numerical examples. Despite this tendency, it was observed that 17.9% or 30.2% of the students could write a direct proof. Students had the highest success rates with propositions that could be proved using a proof by contradiction. Students' lowest performance was in dealing with proofs by cases, none of the students couldn't prove by using proof by cases.

Even after the interventions, students were not comfortable doing proofs; though, they learned to do direct proofs, proofs by contradiction, and exhaustive proofs to various degrees. Students had the most difficulty doing proofs by cases. And also, in the preference for proving, intelligibility of proposition has been observed to be effective rather than proof methods. Findings from this research also reveal that there is a relationship between algebraic thinking and proof skills and preferences.