

Sur les fonctions de Bloch de la troisième espèce

par Cengiz ULUÇAY

(*Institut de Mathématiques de l'Université d'Ankara*)

Özet: Üçüncü nevi Bloch fonksiyonları hakkında. Üçüncü nevi Bloch fonksiyonları ilk defa olarak R. M. Robinson [1] tarafından tarif edilmiştir. Bunların hakkında Teorem 2 yi [1] ispatlamıştır. İspatsız olarak ta bizim burada ispatını vermiş olduğumuz neticeyi söylemiştir (§3). §4 de Birim daireinde analitik $w = f(z) = z + \dots$ fonksiyonlarının bir alt sınıfı ile ilgili yeni bir \mathfrak{C} Sabiti tarif ediyoruz ve gösteriyoruz ki $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{C}$.

Résümé: Les fonctions de Bloch de la troisième espèce ont été introduites par R. M. Robinson [1] qui a établi à leur sujet le Théorème 2 [1]. Il a annoncé le résultat (§3 de cette note) que nous nous proposons de démontrer. Au §4 nous considérons les fonctions $w = f(z) = z + \dots$ analytiques dans le cercle unité pour lesquelles nous définissons une nouvelle constante \mathfrak{C} et nous montrons que $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{C}$.

1. Soit

$$(1) \quad w = f(z) = z + \dots$$

une fonction de Bloch de la troisième espèce donnant la représentation conforme de $|z| < 1$ sur un domaine simple R.

Si la frontière de R comprend un arc analytique on est dans le cas du Théorème 2 [1] (voir cependant notre remarque à la fin du §3).

D'un autre côté la frontière de R ne peut contenir d'arc qui n'est pas suffisamment régulier de façon à permettre à un cercle \mathfrak{A} de rouler le long de cet arc à l'intérieur de R. Car dans ce cas il y'aurait un point P sur cet arc et un voisinage de P dans R qui n'est pas coupé par un cercle \mathfrak{A} . On peut alors prolonger R au delà de P en la région $R' \supset R$ sans avoir augmenté le rayon des cercles contenus dans R.

Soit

$$(2) \quad W = \alpha z + \dots, \quad \alpha \text{ réel,}$$

la fonction donnant la représentation conforme de R' sur $|z| < 1$. Il est aisé de voir que $\alpha > 1$. En effet la fonction (2) représente R conformément sur une partie (z') de $|z| < 1$. Avec les nouvelles notations (2) s'écrira

$$(2)' \quad w = \alpha z' + \dots$$

Ensuite nous représentons $|z| < 1$ conformément sur (z') au moyen d'une fonction de la forme

$$(3) \quad z' = \beta z + \dots, \quad \beta \text{ réel,}$$

D'après le Lemme de Schwarz $\beta < 1$.

En combinant (2)' et (3) on obtient $w = \alpha\beta z + \dots$ c'est à dire la fonction (1). D'où $\alpha\beta = 1$ et par suite $\alpha > 1$. La proposition finale s'établit immédiatement par l'absurde.

Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas intermédiaire, c'est à dire le cas d'un arc frontière qui n'est pas analytique mais qui cependant est suffisamment régulier de façon à permettre à un cercle \mathcal{U} de rouler le long de l'arc à l'intérieur de R . Pour simplifier le langage un tel arc sera dit un arc de frontière *admissible*. Il s'agit de montrer que la frontière de R ne peut pas non plus contenir d'arc de frontière admissible.

2. Citons tout d'abord deux Lemmes.

Définition. Nous entendons par rayon intérieur d'une région R par rapport à un point a de R le nombre $\rho > 0$ tel que $|z| < \rho$ peut être représenté sur R au moyen d'une fonction de la forme $a + z + \dots$.

Lemme 1. Soit $R(\theta)$ la région obtenue en modifiant la frontière de $|z| < 1$ comme suit. Remplacer l'arc du cercle unité joignant $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ par la corde qui le sous-tend. Alors le rayon intérieur de $R(\theta)$ par rapport à l'origine est

$$\frac{(\pi - \theta) \sin \pi\theta / (\pi - \theta)}{\pi \sin \theta}$$

En effet il suffit de remplacer dans le lemme 1 [1] de R. M. Robinson α par $(1 - \theta)/\pi$.

Pour les valeurs de θ suffisamment petites la fonction qui donne la représentation conforme du cercle unité sur $R(\theta)$ est de la forme

$$h(x, \theta) = (1 - \theta^3/3\pi)x + \dots$$

Lemme 2. Le rayon intérieur de la région $R(\varphi)$, par rapport à l'origine, obtenue de $|z| < 1$ en ajoutant l'intérieur du cercle passant par $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ orthogonal au cercle unité et supprimant les points $z \geq 1 - \varphi/3$ est plus grand que 1 si φ est suffisamment petit. D'une manière plus précise il est de la forme $1 + k\varphi^2$ où k est une constante positive indépendante de φ .

En effet, la première partie du Lemme est due à R. M. Robinson, quant à la seconde, elle s'obtient par un calcul facile.

3. Soit $w = f(z) = z + \dots$ une fonction de Bloch de la Troisième espèce donnant la représentation conforme de $|z| < 1$ sur un domaine simple. Soit γ un arc de frontière admissible. D'après un Théorème de Carathéodory la transformation est continue et biunivoque sur γ . Donc à deux points voisins sur γ correspondent sur $|z| = 1$ deux points voisins A et B. D'où au segment de droite AB correspond dans R un arc analytique PQ qui peut être confondu avec un segment de droite J, lorsque les points P et Q sont suffisamment rapprochés.

Si $R(\theta)$ désigne la région du Lemme 1, la fonction

$$g(x) = (1 - \theta^3/3\pi)x + \dots$$

donne la représentation conforme de $|x| < 1$ sur la région R' obtenue de R en remplaçant l'arc de frontière admissible PQ par le segment de droite J (c'est à dire en supprimant la région déterminée par γ et J). Soit $A'B'$ l'arc de cercle $|x| = 1$ correspondant à J. La fonction $g(x)$ peut être continuée analytiquement à travers $A'B'$ dans une petite région limitée par un arc de cercle passant par A' et B' et orthogonal à $|x| = 1$. En faisant tourner le cercle autour de son centre si cela est nécessaire soient $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ les affixes de A' et B' respectivement. La fonction $g(x)$ est univalente dans la région $R(\varphi)$ du Lemme 2 qui est représentée conformément sur la région R'' obtenue de R' en remplaçant l'arc de frontière analytique J par un nouvel arc analytique K, extérieur à R' , qui est approximativement un demi cercle de diamètre J et par une coupure L faite le long d'un arc analytique qui est approximativement un segment du diamètre de K perpendiculaire à J, de longueur égale à peu près au deux tiers du diamètre de K.

Le Lemme 1 montre que

$$x = (1 + k\varphi^2)y + \dots$$

où $\theta = h'(1, \theta)\varphi$ avec $h'(1, \theta) \rightarrow 1$ lorsque $\theta \rightarrow 0$.

D'où la fonction

$$w = (1 - \theta^3/3\pi)(1 + k\theta^2/h'^2(1, \theta))y + \dots$$

qui pour θ suffisamment petit s'écrit

$$w = (1 + k\theta^2)y + \dots$$

représente conformément R'' sur $|y| < 1$ tout en restant univalente dans le cercle unité.

La fonction $w(y)$ montre que le rayon intérieur de R'' par rapport à l'origine est plus grand que 1. Il s'en suit que R'' doit contenir des cercles de rayon plus grand que \mathcal{U} . D'un autre côté l'opération qui consiste à remplacer J par K et L ne peut augmenter le rayon des cercles \mathcal{U} lorsque θ est suffisamment petit.

Nous pouvons donc énoncer le résultat général suivant annoncé par R. M. Robinson.

Théorème. Toute fonction de Bloch de la troisième espèce représente conformément $|z| < 1$ sur un domaine simple R comprenant tout le plan tel que tout point du plan est ou bien un point intérieur ou bien un point frontière.

Remarque. Il est clair que notre démonstration peut être rendue valable indépendamment du Théorème 2 de R. M. Robinson. Il suffit en effet de tenir compte explicitement de la condition que les points de γ (qui peut être maintenant un arc analytique) sous considération sont limites de points qui ne sont ni points frontières ni points intérieurs. Ceci étant rappelé le Théorème de R. M. Robinson se trouve maintenant inclus dans le résultat général.

4. Définition. Par systèmes d'arcs analytiques nous entendons un ou plusieurs arcs analytiques en nombre fini issus d'un même sommet et satisfaisant aux conditions suivantes.

1. Deux arcs appartenant à un même système ou à des systèmes différents ne se coupent pas à distance finie.

2. Dans chaque système il est possible qu'un et un seul arc puisse s'étendre jusqu'à l'infini. Dans ce cas nous dirons que le système possède un arc infini, donc un arc fini dans le cas contraire.

Considérons les fonctions $w = f(z) = z + \dots$ qui sont analytiques dans le cercle unité telles que les surfaces de Riemann engendrées par w couvrent le plan entier coupé suivant des systèmes d'arcs analytiques. En plus on suppose que ces surfaces ne possèdent aucun point de ramification et que les systèmes d'arcs analytiques sont en nombre fini dans toute partie finie du plan.

L'ensemble des fonctions $w = f(z)$ se subdivise en deux Classes C et S. À la première classe C appartiennent les fonctions $w = f(z)$ qui ne sont pas univalentes dans le cercle unité tandis qu'à la deuxième classe S appartiennent les fonctions qui sont univalentes dans le cercle unité.

Définition. Soit $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'(f)$, la borne supérieure des rayons des cercles contenus dans le plan coupé relatif à $f \in C$. \mathfrak{C} est définie comme étant le minimum des nombres \mathfrak{C}' . D'après un théorème de R. M. Robinson [1] et [4]

$$\mathfrak{L} < \mathfrak{C}$$

où \mathfrak{L} est la constante de Landau.

Définition. Soit $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(f)$, la borne supérieure des rayons des cercles contenus dans le plan coupé relatif à $f \in S$. \mathfrak{S} est définie comme étant le minimum des nombres \mathfrak{S}' .

D'après le théorème du §3 $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}$ où \mathfrak{U} est la constante de Landau relative aux fonctions $w = f(z) = z + \dots$ qui sont univalentes dans le cercle unité. Désignons par $f_{\mathfrak{S}}$ toute fonction extrémale attachée à \mathfrak{S} , à savoir une fonction de Bloch de la troisième espèce.

Théorème. $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{U}$.

En effet traçons dans le plan w les systèmes d'arcs analytiques qui forment la frontière de la région représentée conformément sur le cercle unité par $f_{\mathfrak{S}}$. Coupons le plan w tout le long de tous les arcs finis à partir de chaque sommet et seulement jusqu'à un point à distance finie lorsqu'il s'agit d'arcs infinis. La surface de recouvrement universel du plan ainsi coupé peut être représentée conformément sur le cercle unité. Il est clair que la fonction inverse $f(z) = z + \dots$ appartient à C. En complétant les coupures le long des arcs infinis $f \rightarrow f_{\mathfrak{S}}$, ce qui démontre le théorème.

Nous avons construit un exemple de la classe C donnant une borne supérieure de \mathcal{C} , et obtenu la valeur \mathcal{Q}^* [2]. A cause du caractère symétrique de la fonction considérée il semble très probable que $\mathcal{Q}^* = \mathcal{C}$ et par suite $\mathcal{Q} \geq \mathcal{Q}^*$ [3].

Littérature

- [1] R. M. Robinson, Bloch functions, *Duke Math. Journal.* 2, 1936.
- [2] C. Uluçay, On the values of the Bloch-Landau constants \mathcal{B} , \mathcal{Q} *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* vol. 54, N. 9, 395*t.* 1948.
- [3] C. Uluçay, (*loc. cit.*), 396*t.*
- [4] C. Uluçay, *Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara, Série A, Tome VI, Fasc: 1.* 1954.

(Manuscrit reçu le 30.1.1954)