COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A_1: Mathématiques

TOME : 32 ANNÉE : 1983

A Note On Hardy's Theorem

by

Sabir HASAN

9

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara. Turquie

Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les diciplines scientifiques représentées à la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara.

La Revue, jusqu'à 1975 à l'exception des tomes I, II, III etait composée de trois séries

Série A: Mathématiques, Physique et Astronomie,
Série B: Chimie,
Série C: Sciences Naturelles.

A partir de 1975 la Revue comprend sept séries:

Série A_1: Mathématiques,
Série A_2: Physique,
Série A_3: Astronomie,
Série B : Chimie,
Série C_1: Géologie,
Série C_2: Botanique,
Série C_3: Zoologie.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible les communications des auteurs étrangers. Les langues Allemande, Anglaise et Française seront acceptées indifféremment. Tout article doit être accompagnés d'un résumé.

Les articles soumis pour publications doivent être remis en trois exemplaires dactylographiés et ne doit pas dépasser 25 pages des Communications, les dessins et figures portes sur les feuilles séparées devant pouvoir être reproduits sans modifications.

Les auteurs reçoivent 25 extraits sans couverture.

l'Adresse : Dergi Yayın Sekreteri,
Ankara Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Beşevler–Ankara

A Note On Hardy's Theorem

By

Sabir HASAN

Department of Mathematics Aligarh Muslim University Aligarh-202001, India

(Received March 30, 1983: accepted June 9, 1983)

ABSTRACT

The aim of this note is to prove the converse part of Hardy's theorem by imposing an additional condition on the sequence (a_n).

1. Hardy [2] proved that if

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

is a Fourier series of a function $f(x) \in L^p\,(0, 2\pi)$ $(p \geq 1)$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ta)_n \operatorname{Sin} nx$$

is the Fourier series of a function $\Phi(x) \in L^p\,(0, 2\pi)$, where $(Ta)_n$ is the n-th aritmetic mean of (a_n) defined as

$$(Ta)_n = \frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

The aim of this note is to prove the converse of Hardy's theorem [2].

Theorem: Suppose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Sin} nx$ with $a_n \downarrow 0$, then a necessary and sufficient condition that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Sin} nx$ be the

Fourier series of a function $f(x) \in L^p(0, \pi)$ is that $\sum_{n=1}^{\infty} (Ta)_n \operatorname{Sin} nx$ be the Fourier series of a function $\Phi(x) \in L^p(0, \pi)$ where $p > 1$ and

$$(Ta)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2. For the proof of our theorem we require the following lemma.

Lemma 1. If $a_n \downarrow 0$ and $1 < p < \infty$, then $f(x) \in L^p(0, \pi)$ if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < \infty.$$

Proof of the theorem. Since $a_n \downarrow 0$ it follows that $(Ta)_n \downarrow 0$. Hence by the lemma we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ta)_n^p n^{p-2} < \infty.$$

Also since

$$(Ta)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\geq \frac{1}{n} n a_n$$

$$= a_n,$$

so that

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ta)_n^p n^{p-2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}.$$

So the convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ta)_n^p n^{p-2}$$

implies the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \, n^{p-2}.$$

Hence by lemma we observe that $\Sigma \; a_n \cos nx$ is the Fourier series of a function belonging to L^p, $p > 1$. This proves the "only if" part while "if" part is a particular case of Hardy's theorem [2].

REFERENCES

[1] **N.K. Bary,** A Treatise on Trigonometric series, 2 vols. Pergamon Press (1964).

[2] **G.H. Hardy,** Note on some points in the integral calculus, LXVI, The arithmetic mean of a Fourier constant, Messenger of Math. 58 (1928), 50-52.