

N-Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeylerin Bazı Karakterizasyonları

Mustafa SEVİNÇ¹, Hatice KUŞAK SAMANCI^{2*}

Öz

Bu çalışmada, doğrultmanı N-Bishop çatısının elemanlarından ve dayanak eğrisi ise asli normalinin integral eğrisinden oluşan yeni bir regle yüzey tanımlaması yapılmıştır. Daha sonra, tanımlanan bu yeni regle yüzeyin dağılıma parametresi, sitriksiyon çizgisi, Gauss ve ortalama eğriliği gibi diferansiyel geometrik özellikleri incelenmiştir. Çalışmanın sonunda ise bu yeni regle yüzey ile ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regle yüzeyleri, Serret-Frenet çatısı, N-Bishop çatısı.

Characterizations of The Ruled Surfaces due to N-Bishop Frame

Abstract

In this study, a new ruled surface was defined by using the elements of the N-Bishop frame as a directed vector and the integral curve of the principal normal as a base curve. Then, the differential geometric properties of this new ruled surface such as distribution parameter, striction curve, Gaussian and mean curvature were examined. At the end of the work, various examples were presented related to this new ruled surface.

Keywords: Ruled surfaces, Serret-Frenet frame, N-Bishop frame.

¹Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye, mustafa.sevinc.13.13@gmail.com

²Bitlis Eren Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye, hkusak@beu.edu.tr

¹<https://orcid.org/0000-0001-9812-1844>

²<http://orcid.org/0000-0001-6685-236X>

1. Giriş

Regle yüzeyler ilk kez G. Monge (1850) tarafından elde edilmiştir. Daha sonraki yıllarda Guggenheimer (1963) ve Hoschek (1971) klasik geometrideki farklı bakış açıları ile regle yüzeylerini incelemişlerdir. Regle yüzeyler uzayda dayanak eğrisi veya taban eğrisi de denilen bir eğri üzerinde düz bir çizginin sürekli hareketi ile elde edilen yüzeylerdir. Düz çizgiler, doğrultman ve teğet yüzeylere dayanır. Diferansiyel geometride regle yüzeyler üzerine birçok çalışma yapılmış olsa da halen ilgi çeken konulardan birisi olmaya devam etmektedir. Regle yüzeyler özellikle basit bir yapıya sahip olduğu için mimarlık, mühendislik, mekanik, kinematik ve bilgisayar destekli tasarım, vb. gibi birçok alanda kullanılmasıyla daha da önem kazanmaktadır [Andaras (2011); Bottema ve Roth (1979)].

Diğer yandan, diferansiyel geometride Serret-Frenet formülleri Öklid uzayında bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın kinematik özelliklerini ifade eder. $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ çatısı olarak bilinen bu çatı sırasıyla teğet vektör, asli normal vektör ve binormal vektörden oluşmaktadır. Serret-Frenet çatısı diğer çatı çalışmalarının temel taşı olmuştur. Ayrıca, günümüze kadar eğrilerin özelliklerinin incelenmesinde çeşitli alternatif çatılar oluşturulmuştur. Bu alternatif çatılardan biri L. Bishop tarafından 1975 yılında bulunan Bishop çatısıdır [Bishop (1975)]. Yaylı (2012), Kılıçoğlu vd. (2013), Yüksel vd. (2015) Damar vd.(2017), Masal vd. (2019) regle yüzeylerini Bishop çatısına göre incelemişlerdir [Damar ve ark. (2017), Kılıçoğlu ve Hacısalihoğlu (2013), Masal ve Azak (2019), Yaylı ve Saraçoğlu (2012), Yüksel ve ark. (2015)]. Şentürk ve arkadaşları (2015) Öklid 3-uzayındaki regle yüzeylerini Darboux çatısı ile incelemişlerdir [Şentürk ve Yüce (2015)]. Ayrıca, Uzunoğlu ve arkadaşları daha önce Scofield tarafından tanımlanan C vektör alanını geliştirerek yeni bir alternatif hareketli çatı elde etmişlerdir (Uzunoğlu ve ark (2016), Scofield (1995)). Bu alternatif hareketli çatı N asli normal, C asli normalinin türevi doğrultusundaki birim vektörü ve W Darboux vektöründen oluşmak üzere $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısıdır [Scofield (1995), Uzunoğlu ve ark (2016), Yılmaz ve ark.(2017)]. Dahası, Keskin ve arkadaşları $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısına dayandırarak farklı bir alternatif Bishop çatısı üretmişlerdir. Bu çatıya N-Bishop çatısı denilmektedir. Başka bir deyişle, $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif hareketli çatısındaki asli normal vektörünün etrafında oluşan dönme hareketi ile N-Bishop çatısı oluşturulmuştur [Keskin ve ark. (2017)]. $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısına göre doğrultu eğrilerinden oluşan açılabilir regle yüzeyin özelliklerini Yılmaz vd. (2017) çalışmışlardır. Ouarab ve arkadaşları ve ayrıca Şahiner Öklid 3-uzayında alternatif $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısına göre genel regle yüzeylerinin geometrik özelliklerini incelemişlerdir [Quarab ve ark. (2018), Şahiner (2019)]. Çalışkan ve

arkadaşları ise dual uzayda alternatif çatıya göre regle yüzeylerini incelemişlerdir [Çalışkan ve ark.(2018)].

Bu çalışmamızda, doğrultmanı N-Bishop çatısının elemanlarından oluşan dayanak eğrisi asli normal vektörünün integral eğrisinden oluşan yeni regle yüzey tanımları verilmiş ve bu yüzeylerin geometrik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca yeni bir yaklaşım olarak N-Bishop çatısının Darboux vektörü doğrultusunda regle yüzeyleri de incelenmiş ve geometrik özellikleri ele alınmıştır. Çalışma sonunda, oluşturulan bu yeni regle yüzeyleri ile ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde ilk olarak, Öklid 3-uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet, $\{N,C,W\}$ ve N-Bishop çatılarının tanımları verilmiş ve regle yüzeyler ile ilgili bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 2.1. $\lambda(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, s yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş regüler bir eğri olsun. \vec{T} birim teğet vektör alanı, N asli normal vektör alanı ve B binormal vektör alanı olmak üzere λ eğrisinin Serret-Frenet çatısı $\vec{T} = \lambda'(s)$, $\vec{N} = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|}$, $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ ile tanımlanır. Bu çatının türev formülleri ise $\vec{T}' = \kappa \vec{N}$, $\vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$, $\vec{B}' = -\tau \vec{N}$ denklemleri ile verilir. Eğrinin teğet çizgisinden sapma miktarı olan eğriliği ve oskülatör düzlemde sapma miktarı olan burulması sırasıyla $\kappa = \|\vec{T}'\|$ ve $\tau = -\langle \vec{B}', \vec{N} \rangle$ denklemleri ile elde edilir. $\kappa = 0$ ise eğri bir doğru, $\tau = 0$ ise eğri düzlemsel bir eğri olur [Hacısalihoglu (1983)].

Tanım 2.2. (N-C-W Çatısı) $\lambda(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ üçboyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. \vec{N} asli normal vektör, \vec{C} asli normalin türevi yönündeki birim normal vektör ve \vec{W} Darboux vektör yönündeki birim vektör olmak üzere $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısı $\vec{N} = \vec{N}$, $\vec{C} = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|}$, $\vec{W} = \frac{\tau \vec{T} + \kappa \vec{B}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ ile tanımlanır. $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının birinci ve ikinci eğriliği $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$ olmak üzere çatının türev formülleri $\vec{N}' = f \vec{C}$, $\vec{C}' = -f \vec{N} + g \vec{W}$, $\vec{W}' = -g \vec{C}$ olarak verilmiştir [Keskin ve Yaylı(2017); Uzunoğlu ve ark. (2016)].

Tanım 2.3. (N-Bishop Çatısı) $\lambda(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, s yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş regüler bir eğri ve $\{\bar{N}, \bar{C}, \bar{W}\}$ çatısı da $\lambda(s)$ eğrisinin alternatif hareketli çatısı olsun. ψ açısı \bar{C} ile \bar{N}_1 arasındaki açısı olmak üzere $\{\bar{N}, \bar{C}, \bar{W}\}$ alternatif çatısı keyfi bir ψ açısı kadar $\lambda(s)$ eğrisinin birim normal vektörü boyunca döndürülsün. \bar{N} vektörü $\lambda(s)$ eğrisinin asli normali olmak üzere alternatif çatının diğer iki vektörü $\bar{C} = \cos \psi \bar{N}_1 + \sin \psi \bar{N}_2$ ve $\bar{W} = -\sin \psi \bar{N}_1 + \cos \psi \bar{N}_2$ olarak elde edilebilir. Eğrilikleri $k_1 = f \cos \psi(s)$, $k_2 = f \sin \psi(s)$ ve $\psi(s) = \int_{s_0}^s g(t) dt = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$ olup $\{\bar{N}, \bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ çatısı N-Bishop çatısı olarak adlandırılır. N-Bishop çatısının türev formülleri; $\bar{N}' = k_1 \bar{N}_1 + k_2 \bar{N}_2$, $\bar{N}_1' = -k_1 \bar{N}$ ve $\bar{N}_2' = -k_2 \bar{N}$ dir. κ ve τ Serret-Frenet eğrilikleri ile N-Bishop çatısının k_1 ve k_2 eğrilikleri arasında $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ bağıntısı vardır [Keskin ve Yaylı(2017)].

Tanım 2.4. (N-Bishop Darboux Vektörü) Üç boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi verilsin. k_1 ve k_2 birinci ve ikinci eğrilik olmak üzere $\{\bar{N}, \bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ γ eğrisinin N-Bishop çatısı olsun. $\{\bar{N}, \bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ N-Bishop çatısının \bar{W}_d Darboux vektörü $\bar{W}_d = -k_2 \bar{N}_1 + k_1 \bar{N}_2$ ile tanımlanır [Kuşak Samancı (2020)].

Tanım 2.5. (Regle Yüzey) Üç boyutlu Öklid uzayında $M \subset E^3$ bir yüzey olmak üzere, $\forall P \in M$ noktasında E^3 'ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye regle yüzey denir. Başka bir deyişle doğrunun doğurduğu yüzeye regle yüzey denir. $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M yüzeyinin doğrultmanı denir. $\lambda(s)$ dayanak eğrisi ve $X(s)$ doğrultman olmak üzere bir regle yüzey $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v \bar{X}(s)$ denklemi ile tanımlıdır [Damar ve ark.(2017); Hacısalihoglu (1983)].

Tanım 2.6. (Dağılma Parametresi) Öklid 3-uzayında $\gamma: I \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v \bar{X}(s)$ denklemi ile verilen regle yüzeyin dağılma parametresi (drali)

$$P_x = \frac{\det[\lambda', \bar{X}, \bar{X}']}{\|\bar{X}'\|^2}$$

denklemlerle tanımlanır. Regle yüzeyler için dağılma parametresi, koordinat değişimlerine göre en basit diferansiyel invaryanttır [Damar ve ark.(2017); Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.7. $\gamma(s, v)$ yüzeyi Öklid 3-uzayında bir regle yüzeyi olsun. $\gamma(s, v)$ yüzeyinin $\bar{\lambda}(s)$ sitriksiyon çizgisinin yer vektörü

$$\bar{\lambda}(s) = \lambda(s) - \frac{\langle \bar{X}', \bar{T} \rangle}{\|\bar{X}'\|^2} \bar{X}(s)$$

denklemlerle verilir [Damar ve ark.(2017); Hacısalihoğlu (1983)].

3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde doğrultmanı N-Bishop çatısının elemanları ile oluşturulmuş yeni bir regle yüzey tanımlandıktan sonra, oluşturulan bu regle yüzeyin dağılma parametresi, sitriksiyon çizgisi, Gauss ve ortalama eğriliği gibi diferansiyel özellikleri incelenecektir.

3.1. N-Bishop Çatılı Regle Yüzeyler

Üç boyutlu Öklid uzayında tanımlanan regüler bir $\alpha(s)$ eğrisinin N-Bishop çatısına göre asli normalinin $\lambda(s) = \int \bar{N}(s) ds$ integral eğrisi dayanak eğrisi olarak alınırsa regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} \gamma: I \times R &\rightarrow R^3, \\ (s, v) &\rightarrow \gamma(s, v) = \lambda(s) + v\bar{X}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinde yazılır. $\bar{X}(s) = Sp\{\bar{N}, \bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ doğrultman vektörü N-Bishop çatısının elemanlarından oluşacak şekilde seçildiğinde $\forall x_1, x_2, x_3 \in R$ için $X(s)$ doğrultman vektörü

$$\bar{X}(s) = x_1 \bar{N} + x_2 \bar{N}_1 + x_3 \bar{N}_2, \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1) \quad (2)$$

olur. Doğrultman vektörünün türevi alınır

$$\vec{X}' = (-x_2k_1 - x_3k_2)\vec{N} + x_1k_1\vec{N}_1 + x_1k_2\vec{N}_2 \quad (3)$$

olur. $\lambda(s)$ eğrisinin teğeti

$$\vec{T} = \vec{\lambda}'(s) = \left(\int \vec{N}(s) ds \right)' = \vec{N}, \quad (4)$$

olur. (2), (3) ve (4) denklemleri Tanım 2.6 da yerine yazıldığında $\lambda(s)$ eğrisinin dağılma parametresi

$$P_x = \frac{x_1x_2k_2 - x_1x_3k_1}{(x_2k_1 + x_3k_2)^2 + x_1^2(k_1^2 + k_2^2)} \quad (5)$$

olur. Tanım 2.7. den $\vec{\lambda}$ sitriksiyon çizgisinin yer vektörü

$$\vec{\lambda}(s) = \vec{\lambda}(s) - \frac{(x_2k_1 + x_3k_2)(-x_2k_1 - x_3k_2, x_1k_1, x_1k_2)}{(x_2k_1 + x_3k_2)^2 + x_1^2(k_1^2 + k_2^2)} \quad (6)$$

biçiminde elde edilir. Regle yüzeyin birinci esas formu

$$I = Eds^2 + 2Fdsdv + Gdv^2 \quad (7)$$

$$E = \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle, F = \langle \gamma_s, \gamma_v \rangle, G = \langle \gamma_v, \gamma_v \rangle \quad (8)$$

bağıntısıyla verilir. Buna göre (1) ifadesinin s ve v ye göre türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \lambda'(s) + v \left(x_1\vec{N}' + x_2\vec{N}_1' + x_3\vec{N}_2' \right) \\ &= \vec{N} + v \left(x_1(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) - x_2k_1\vec{N} - x_3k_2\vec{N} \right) \\ &= (1 - vx_2k_1 - vx_3k_2)\vec{N} + vx_1k_1\vec{N}_1 + vx_1k_2\vec{N}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\gamma_v = x_1\vec{N} + x_2\vec{N}_1 + x_3\vec{N}_2 \quad (10)$$

bulunur. Daha sonra (9) ve (10) da elde edilen bu denklemler (8) ifadesinde yerine yazılırsa temel form katsayıları

$$E = (1 - vx_2k_1 - vx_3k_2)^2 + v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2), \quad F = x_1, \quad G = 1 \quad (11)$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (7) de yerine yazılırsa yüzeyin birinci temel formu

$$I = \left[(1 - vx_2k_1 - vx_3k_2)^2 + v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2) \right] ds^2 + 2x_1 ds dv + dv^2$$

olarak bulunur. Yüzeyin ikinci esas formu için katsayıları ise

$$L = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_{ss}, \vec{\gamma}_s, \vec{\gamma}_v \end{bmatrix}}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}, \quad M = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_{sv}, \vec{\gamma}_s, \vec{\gamma}_v \end{bmatrix}}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}, \quad N = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_{vv}, \vec{\gamma}_s, \vec{\gamma}_v \end{bmatrix}}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \quad (12)$$

denklemlerinden hesaplanır. Bu denklemlerdeki kısmi türevler

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{ss} &= \left(-v(x_2k_1' + x_3k_2' + x_1(k_1^2 + k_2^2)) \right) \vec{N} \\ &\quad + (k_1(1 - vx_2k_1 - vx_3k_2) + vx_1k_1) \vec{N}_1 \\ &\quad + (k_2(1 - vx_2k_1 - vx_3k_2) + vx_1k_2') \vec{N}_2, \\ \vec{\gamma}_{sv} &= -(x_2k_1 + x_3k_2) \vec{N} + x_1k_1 \vec{N}_1 + x_1k_2 \vec{N}_2, \\ \vec{\gamma}_{vv} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

olarak elde edilir. Ayrıca yüzeyin normal vektör alanı $n = \frac{\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}$ olduğundan (9) ve (10) daki

türevlerinden yüzey normali

$$\begin{aligned} \|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\| &= \sqrt{v^2x_1^2(x_3k_1 - x_2k_2)^2 + \left((1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))x_3 - vx_1^2k_2 \right)^2 + \left((1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))x_2 - vx_1^2k_1 \right)^2}, \\ \vec{n} &= \frac{1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \begin{bmatrix} vx_1(x_3k_1 - x_2k_2) \vec{N} \\ -\left((1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))x_3 - vx_1^2k_2 \right) \vec{N}_1 \\ +\left((1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))x_2 - vx_1^2k_1 \right) \vec{N}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

olarak elde edilir. Buradan hareketle ikinci esas formun katsayıları

$$L = \frac{1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \begin{bmatrix} (1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))^2(x_2k_2 - x_3k_1) \\ + (1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))vx_1(x_2k_2' - x_3k_1') \\ + v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') \\ + (x_2k_2 - x_3k_1)v^2x_1(x_1(k_1^2 + k_2^2) \\ + (x_2k_1' + x_3k_2')) \end{bmatrix}, \quad M = \frac{x_1(x_2k_2 - x_3k_1)}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}, \quad N = 0$$

olarak hesaplanır. Ayrıca yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)}$$

denklemleri ile verildiğinden bu eğrilikler

$$H_x = \frac{\begin{bmatrix} (1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))^2(x_2k_2 - x_3k_1) \\ + (1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))vx_1(x_2k_2' - x_3k_1') \\ + v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') \\ + (x_2k_2 - x_3k_1)v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2) \\ + (x_2k_1' + x_3k_2') - 2x_1^2 \end{bmatrix}}{2\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\| \left[(1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))^2 + x_1^2(v^2(k_1^2 + k_2^2) - 1) \right]},$$

$$K_x = \frac{-x_1^2(x_2k_2 - x_3k_1)^2}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|^2 \left[(1 - v(x_2k_1 + x_3k_2))^2 + x_1^2(v^2(k_1^2 + k_2^2) - 1) \right]} \quad (15)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi hesaplanan bu elemanlar doğrultusunda birkaç teorem ele alınacaktır.

Teorem 3.1.1. $\gamma: I \times R \rightarrow R^3$, $\gamma(s, v) = \vec{\lambda}(s) + v\vec{X}(s)$ regle yüzeyi verilsin. Yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart X doğrultman vektörünün \vec{N}_1 ve \vec{N}_2 vektörlerinin gerdiği düzlemde bulunması ya da λ dayanak eğrisinin düzlemsel olması ve ayrıca k_1 ve k_2 eğrilikleri için $\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_2}{x_3}$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır. $k_1, k_2, x_3 \neq 0$ olmak üzere (5) denkleminde $P_X = 0$ alındığında $\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_2}{x_3}$ eşitliği elde edilir.

Bu eşitlikten $X \in Sp\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ olduğu görülür. Ayrıca $\psi(s) = \arctan\left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\right)$ açısı \vec{C} ve \vec{N}_1 arasındaki açı olmak üzere, $\tau(s) = -\frac{d\psi(s)}{ds}$ burulması $\tau = 0$ olacağından eğrinin düzlemsel bir eğri olduğu anlaşılır.

Teorem 3.1.2. $\gamma: I \times R \rightarrow R^3$, $\gamma(s, v) = \vec{\lambda}(s) + v\vec{X}(s)$ regle yüzeyi verilsin. Eğer $\lambda(s)$ sitriksiyon çizgisi ise k_1 ve k_2 eğrilikleri arasında $x_2k_1 + x_3k_2 = 0$ koşulu sağlanır.

İspat. λ dayanak eğrisinin sitriksiyon çizgisi olması için Tanım 2.7 deki denklemde $\left\langle \frac{d\vec{\lambda}}{ds}, \vec{X}' \right\rangle = 0$ olmalıdır. O halde (3) ve (4) denklemleri kullanılarak $x_2k_1 + x_3k_2 = 0$ ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3. $\gamma(s, v)$ yüzeyinin dayanak eğrisi sitriksiyon çizgisi ise dayanak eğrisi düzlemsel bir eğridir.

İspat. $k_2, x_2 \neq 0$ olmak üzere Teorem (3.1.2) den $x_2k_1 + x_3k_2 = 0$ ise $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{x_3}{x_2} = sbt$ olacaktır. Bu denklemden $\tau = 0$ bulunur. Burulmanın sıfır olması ise eğrinin düzlemsel bir eğri olduğunu gösterir.

3.2. N-Bishop Çatısı ile Oluşturulan Özel Hallerdeki Regle Yüzeylerin Karakterizasyonları

Bu bölümde N-Bishop çatısının elemanları ile oluşturulan regle yüzey denkleminde özel durumlar alınarak oluşan regle yüzeylerin karakterizasyonları yapılacaktır.

3.2.1. X=N Doğrultman Vektörlü Regle Yüzeyler

Denklem (1)'de tanımlanan N-Bishop çatılı regle yüzeylerin genel denkleminde $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ özel durumu alındığında $\gamma(s, v) = \vec{\lambda}(s) + v\vec{N}(s)$ asli normal doğrultman vektörlü regle yüzeyi denklemi oluşur. Bu özel durum için (5) denklemindeki regle yüzeyinin dağılma

parametresinin sıfır olduğu görülmektedir. Dağılıma parametresi sıfır ise regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir. Şimdi bu özel durum için yüzeyin birim normali, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliklerini inceleyelim.

Teorem 3.2.1.1. Öklid 3-uzayında alınan γ_N yüzeyi, λ dayanak eğrisinin \bar{N} birim normal vektörü tarafından üretilen regle yüzey olsun.

$v > 0$ için γ_N yüzeyinin dışa dönük birim normal vektörü

$$\bar{U}_N = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \bar{N}_1 - \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \bar{N}_2$$

$v < 0$ için γ_N yüzeyinin içe dönük birim normal vektörü

$$\bar{U}_N = -\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \bar{N}_1 + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \bar{N}_2$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

İspat. $x_1 = 1, x_2 = 0,$ ve $x_3 = 0$ değerleri (14) denkleminde yerine yazılırsa özel durum için birim normal vektörü hesaplanmış olur.

Teorem 3.2.1.2. Öklid 3-uzayında alınan γ_N yüzeyi, λ dayanak eğrisinin \bar{N} birim normal vektörü tarafından üretilen regle yüzey olsun. M_N yüzeyinin ortalama ve Gauss eğriliği

$$H_N = \frac{v^2 (k_1' k_2 - k_1 k_2') - 2}{2v^3 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}}, \quad K_N = 0$$

dir.

İspat. (15) denkleminde verilen değerler yerine yazıldığında ispat tamamlanmış olur.

3.2.2. $X=N_1$ Doğrultman Vektörlü Regle Yüzey

(1) denkleminde tanımlanan N-Bishop çatısının elemanlarından oluşan regle yüzeylerin genel denkleminde $x_1 = 0, x_2 = 1,$ ve $x_3 = 0$ değerleri alındığında $\bar{N}_1(s)$ doğrultmanlı regle yüzey denklemi

$\gamma(s, v) = \bar{\lambda}(s) + v\bar{N}_1(s)$ olarak elde edilir. Bu koşullar (5) denkleminde yerine yazıldığında $P_{N_1} = 0$ dağılma parametresi elde edilir. O halde regle yüzeyinin açılabilir olduğu görülmektedir.

γ_{N_1} yüzeyi, λ dayanak eğrisi ve doğrultmanı \bar{N}_1 vektörü tarafından üretilen regle yüzey olsun. γ_{N_1} yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_{N_1} = \frac{1-vk_1}{\sqrt{(1-vk_1)^2}} \bar{N}_2 = \bar{N}_2.$$

Teorem 3.2.2.1. Öklid 3-uzayında γ_{N_1} yüzeyi, λ dayanak eğrisi ve doğrultmanı \bar{N}_1 vektörü tarafından üretilen regle yüzey olsun. γ_{N_1} yüzeyinin ortalama ve Gauss eğriliği

$$H_{N_1} = \frac{(1-vk_1)^2 k_2 - k_1'}{2(1-vk_1)^{3/2}}, \text{ ve } K_{N_1} = 0$$

dir.

İspat. (15) denkleminde $x_1 = 0, x_2 = 1, \text{ ve } x_3 = 0$ değerleri yerine yazıldığında ispat tamamlanmış olacaktır.

3.2.3. $X=N_2$ Doğrultmanlı Regle Yüzey

$x_3 = 1, \text{ ve } x_1 = x_2 = 0$ özel koşulları alındığında $\bar{N}_2(s)$ doğrultmanlı regle yüzey denklemi $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v\bar{N}_2(s)$ olarak elde edilir. Dağılma parametresi $P_{N_2} = 0$ olduğu için regle yüzeyin açılabilir yüzey olduğu görülür. Bu bölümde bu özel koşullar ile oluşan regle yüzeyin geometrik özellikleri incelenecektir.

γ_{N_2} yüzeyi, λ dayanak eğrisi ve doğrultmanı N_2 vektörü tarafından üretilen regle yüzey olsun. γ_{N_2} yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_{N_2} = -\frac{(1-vk_2)}{\sqrt{(1-vk_2)^2}} \bar{N}_1 = -\bar{N}_1.$$

Teorem 3.2.3.1. Üç boyutlu Öklid uzayında γ_{N_2} yüzeyi, λ dayanak eğrisi ve doğrultmanı \bar{N}_2 vektörü tarafından üretilen regle yüzey olsun. γ_{N_2} yüzeyinin ortalama ve Gauss eğriliği

$$H_{N_2} = -\frac{k_1(1-vk_2)^2 + k_2'}{2(1-vk_2)^3}, K_{N_2} = 0$$

olarak elde edilir.

3.2.4. Doğrultman Vektörü $X \in Sp\{\bar{N}, \bar{N}_1\}$ Tarafından Üretilen Regle Yüzey

$x_3 = 0$, ve $x_1^2 + x_2^2 = 1$ özel koşulları alındığında $X \in Sp\{\bar{N}, \bar{N}_1\}$ doğrultmanlı regle yüzey denklemi $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_1\bar{N} + x_2\bar{N}_1)$ olarak elde edilir.

Teorem 3.2.4.1. $X \in Sp\{\bar{N}, \bar{N}_1\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_1\bar{N} + x_2\bar{N}_1)$ regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_x = \pm \frac{x_1 \cdot k_2 \sqrt{1-x_1^2}}{k_1^2 + k_2^2 x_1^2} \quad (16)$$

olur.

Teorem 3.2.4.2. $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_1\bar{N} + x_2\bar{N}_1)$ ile verilen regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $x_1 = 0$ veya $k_2 = 0$ olmasıdır.

İspat. Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır. O halde (16) denklemindeki dağılma parametresi sıfıra eşitlenirse $\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot k_2}{k_1^2 + k_2^2 x_1^2} = 0$ denkleminde ya $x_1 = 0$, ya da $k_2 = 0$ olacaktır. O halde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.4.3. $\gamma(s, v)$ yüzeyi $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_1\}$ doğrultmanlı regle yüzey denklemi olsun. $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin I. ve II. temel formu

$$I = \left[(1-vx_2k_1)^2 + v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2) \right] ds^2 + 2x_1 dsdv + dv^2$$

$$II = \frac{1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \left\{ \left[\begin{array}{l} (1-vx_2k_1)^2(x_2k_2) + (1-vx_2k_1)vx_1x_2k_2' \\ +v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') + x_2k_2v^2x_1(x_1(k_1^2 + k_2^2) + x_2k_1') \end{array} \right] ds^2 + 2(x_1k_2x_2) dsdv \right\}$$

olarak hesaplanır.

İspat. $E = (1-vx_2k_1)^2 + v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2)$, $F = x_1$, $G = 1$ katsayılarının kullanılmasıyla I. temel form

$$I = \left[(1-vx_2k_1)^2 + v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2) \right] ds^2 + 2x_1 dsdv + dv^2$$

olarak hesaplanır.

$$\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\| = \sqrt{(vx_1x_2k_2)^2 + (vx_1^2k_2)^2 + ((1-vx_2k_1)x_2 - vx_1^2k_1)^2}$$

olmak üzere (12) denkleminde II. temel formun katsayıları

$$L = \frac{1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \left[\begin{array}{l} (1-vx_2k_1)^2(x_2k_2) + (1-vx_2k_1)vx_1x_2k_2' \\ +v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') \\ +x_2k_2v^2x_1(x_1(k_1^2 + k_2^2) + x_2k_1') \end{array} \right], \quad M = \frac{x_1k_2x_2}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}, \quad N = 0$$

denklemleri ile hesaplanır. Böylece II. temel form

$$II = \frac{1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \left\{ \left[\begin{array}{l} (1-vx_2k_1)^2(x_2k_2) + (1-vx_2k_1)vx_1x_2k_2' \\ +v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') + x_2k_2v^2x_1(x_1(k_1^2 + k_2^2) + x_2k_1') \end{array} \right] ds^2 + 2(x_1k_2x_2) dsdv \right\}$$

halini alır.

Sonuç 3.2.4.4 $S_p\{\bar{N}, \bar{N}_1\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$U = \frac{(-vx_1x_2k_2)\bar{N} + (vx_1^2k_2)\bar{N}_1 + (x_2 - vk_1)\bar{N}_2}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}$$

olur.

Sonuç 3.2.4.5. $Sp\{N, N_1\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini bulmak için Teorem 3.2.4.3’de hesaplanan I. ve II. temel formun katsayılarından Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{-x_1^2 x_2^2 k_2^2}{\|\gamma_s \times \gamma_v\|^2 \left[(1 - vx_2 k_1)^2 + x_1^2 (v^2 (k_1^2 + k_2^2) - 1) \right]},$$

$$H = \frac{\begin{bmatrix} (1 - vx_2 k_1)^2 x_2 k_2 + (1 - vx_2 k_1) vx_1 x_2 k_2' + v^2 x_1^3 (k_1' k_2 - k_1 k_2') \\ + x_2 k_2 \left(v^2 x_1 (x_1 (k_1^2 + k_2^2) + x_2 k_1') - 2x_1^2 \right) \end{bmatrix}}{2\|\gamma_s \times \gamma_v\|^2 \left[(1 - vx_2 k_1)^2 + x_1^2 (v^2 (k_1^2 + k_2^2) - 1) \right]}$$

olarak hesaplanır.

3.2.5. Doğrultman Vektörü $\bar{X} \in Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ Tarafından Üretilen Regle Yüzey

$x_2 = 0$ ve $x_1^2 + x_3^2 = 1$ özel koşulları alındığında $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı regle yüzey denklemi $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_1 \bar{N} + x_3 \bar{N}_2)$ olarak elde edilir.

Teorem 3.2.5.1 $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyi verilsin. $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin dağılıma parametresi

$$P_x = \pm \frac{x_1 \sqrt{1 - x_1^2 k_1}}{x_1^2 k_1^2 + k_2^2} \quad (17)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.5.2 $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart; $x_1 = 0$ veya $x_3 = 0$ veya $k_1 = 0$ olmasıdır.

İspat. Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır. O halde (17) denklemindeki dağılma parametresi sıfıra eşitlendiğinde $P_x = 0$ olduğundan ya $x_1 = 0$ veya $x_3 = 0$ veya $k_1 = 0$ eşitlikleri sağlanacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.5.3 $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin I. temel form katsayıları

$$E = (1 - vx_3k_2)^2 + v^2x_1^2(k_1^2 + k_2^2), \quad F = x_1, \quad G = 1,$$

ve II. temel form katsayıları

$$L = \frac{(1 - vx_3k_2)^2(-x_3k_1) + (1 - vx_3k_2)(-x_3k_1')vx_1 + v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') - x_3k_1v^2x_1(x_1(k_1^2 + k_2^2) + x_3k_2')}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|},$$

$$M = -\frac{x_1x_3k_1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|},$$

$$N = 0$$

olarak hesaplanır. Burada $\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\| = \sqrt{(vx_1x_3k_1)^2 + ((1 - vx_3k_2)x_3 - vx_1^2k_2)^2 + (vx_1^2k_1)^2}$ dir.

Teorem 3.2.5.4 $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_1\bar{N} + x_3\bar{N}_2)$ regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$U = \frac{(vx_1x_3k_2)\bar{N} - ((1 - vx_3k_2)x_3 - vx_1^2k_2)\bar{N}_1 - vx_1^2k_1\bar{N}_2}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|}.$$

Teorem 3.2.5.5 $Sp\{\bar{N}, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$H = \frac{\left[\begin{array}{l} (1 - vx_3k_2)^2(-x_3k_1) + (1 - vx_3k_2)vx_1(-x_3k_1') \\ + v^2x_1^3(k_1'k_2 - k_1k_2') + x_3k_1(-v^2x_1(x_1(k_1^2 + k_2^2) + x_3k_2') - 2x_1^2) \end{array} \right]}{2\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|((1 - vx_3k_2)^2 + x_1^2(v^2k_1^2 + v^2k_2^2) - 1)},$$

$$K = \frac{-x_1^2 x_3^2 k_1^2}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|^2 \left((1 - vx_3 k_2)^2 + x_1^2 (v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2) - 1 \right)}$$

bağıntısından hesaplanır.

3.2.6. Doğrultman Vektörü $\vec{X} \in Sp\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ Tarafından Üretilen Regle Yüzey

$x_1 = 0$ ve $x_2^2 + x_3^2 = 1$ özel koşulları alındığında $Sp\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı regle yüzey denklemi $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_2 \bar{N}_1 + x_3 \bar{N}_2)$ olarak elde edilir.

Teorem 3.2.6.1 $Sp\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi (5) denkleminde $P_x = 0$ olarak hesaplanır. Böylece $Sp\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyi açılabilir bir regle yüzey belirtmektedir.

Sonuç 3.2.6.2 $Sp\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyin I. ve II. temel formlarının katsayıları

$$E = (1 - v(x_2 k_1 + x_3 k_2))^2, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$L = \frac{1}{\|\vec{\gamma}_s \times \vec{\gamma}_v\|} \left[(1 - v(x_2 k_1 + x_3 k_2))^2 (x_2 k_2 - x_3 k_1) \right], \quad M = 0, \quad N = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.6.3 $Sp\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v) = \lambda(s) + v(x_2 \bar{N}_1 + x_3 \bar{N}_2)$ regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$U = \frac{\left[\left(-\sqrt{1-x_2^2} + vx_2 \sqrt{1-x_2^2} k_1 + v(1-x_2^2) k_2 \right) \bar{N}_1 + \left(x_2 - vx_2^2 k_1 - vx_2 \sqrt{1-x_2^2} k_2 \right) \bar{N}_2 \right]}{\sqrt{\left(-\sqrt{1-x_2^2} + vx_2 \sqrt{1-x_2^2} k_1 + v(1-x_2^2) k_2 \right)^2 + \left(x_2 - vx_2^2 k_1 - vx_2 \sqrt{1-x_2^2} k_2 \right)^2}}$$

denklemleri ile verilir.

Teorem 3.2.6.4. $Sp\{N_1, N_2\}$ doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K = 0, \quad H = \frac{(x_2 k_2 - x_3 k_1)}{2(1 - v(x_2 k_1 + x_3 k_2))}.$$

3.2.7. Doğrultman Vektörü $\bar{X} \in \bar{W}_d$ Darboux Vektörü Tarafından Üretilen Regle Yüzeyi

N-Bishop çatısının Darboux vektörü $\bar{W}_d = -k_2 \bar{N}_1 + k_1 \bar{N}_2$ dir. W_d doğrultmanlı regle yüzey denklemini $\gamma: I \times R \rightarrow R^3$, $\gamma(s, v) = \bar{\lambda}(s) + v \bar{W}_d$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.2.7.1. \bar{W}_d doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_{W_d} = \frac{-k_1' k_2 + k_1 k_2'}{(k_1')^2 + (k_2')^2}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Teorem 3.2.7.2 \bar{W}_d doğrultmanlı $\gamma: I \times R \rightarrow R^3$, $\gamma(s, v) = \bar{\lambda}(s) + v \bar{W}_d$ regle yüzeyin açılabilir

olması için $\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$ şartının sağlanması gerekir.

İspat. Bir regle yüzeyin açılabilir olması için dağılma parametresinin sıfır olması gerekir. O halde

$P_{W_d} = 0$ denkleminde $k_1 k_2' - k_2 k_1' = 0$ olmalıdır. Bu ifade $\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$ eşitliğini verecektir. $k_2 \neq 0$ olmak

üzere $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = \frac{k_1' k_2 - k_2' k_1}{k_2^2} = 0$ koşulu sağlanır. Bu taktirde $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ sonucuna ulaşılır. Teorem 3.1.1'e

göre $\psi = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = sbt$ olmalıdır. Buna göre, $\tau = -\frac{d\psi}{ds} = 0$ olarak elde edilir. Ohalde dayanak

eğrisi düzlemsel bir eğridir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.7.3 Tanım 2.7 deki sitriksiyon çizgisi denkleminde $\left\langle \frac{d\bar{\lambda}}{ds}, \bar{X}' \right\rangle = 0$ eşitliği sağlandığı için

$\gamma(s, v) = \bar{\lambda}(s) + v\bar{W}_d$ regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi dayanak eğrisine eşit olur.

Sonuç 3.2.7.4 \bar{W}_d doğrultmanlı $\gamma: I \times R \rightarrow R^3$, $\gamma(s, v) = \bar{\lambda}(s) + v\bar{W}_d$ regle yüzeyin I. ve II. temel formlarının katsayıları

$$E = 1 + v^2 \left[(k_1')^2 + (k_2')^2 \right], \quad F = v(k_2 k_2' + k_1 k_1'), \quad G = k_1^2 + k_2^2$$

$$L = \frac{\left[(k_1^2 (k_2')^2 - k_2^2 (k_1')^2) v^2 - k_1^2 + k_1 k_2'' + k_2^2 + k_1'' k_2 \right]}{\sqrt{v^2 (-k_1 k_2' + k_1' k_2) + k_1^2 + k_2^2}}, \quad M = \frac{k_1 k_2' + k_1' k_2}{\sqrt{v^2 (-k_1 k_2' + k_1' k_2) + k_1^2 + k_2^2}}, \quad N = 0$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.7.5 \bar{W}_d doğrultmanlı $\gamma: I \times R \rightarrow R^3$, $\gamma(s, v) = \bar{\lambda}(s) + v\bar{W}_d$ regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_{W_d} = \frac{\left[(-k_1 k_2' + k_1' k_2) v N - k_1 N_1 + k_2 N_2 \right]}{\sqrt{v^2 (-k_1 k_2' + k_1' k_2) + k_1^2 + k_2^2}}.$$

Teorem 3.2.7.6 \bar{W}_d doğrultmanlı $\gamma(s, v)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{k_1^2 (k_2')^2 + 2k_1 k_2 k_1' k_2' + (k_1')^2 k_2^2}{\left[v^2 (-k_1 k_2' + k_1' k_2) + k_1^2 + k_2^2 \right] \left[k_1^2 + k_2^2 + v^2 (k_1 k_2' + k_2 k_1')^2 \right]}$$

ve ortalama eğriliği

$$H = \frac{(k_1^2 + k_2^2) \left[\left(k_1^2 (k_2')^2 - (k_1')^2 k_2^2 \right) v^2 + k_2^2 - k_1^2 + k_1 k_2'' + k_1'' k_2 \right] - 2 \left[k_1' k_2' (k_1^2 + k_2^2) + k_1 k_2 \left((k_1')^2 + (k_2')^2 \right) \right]}{2 \left(k_1^2 + k_2^2 + v^2 (k_1 k_2' + k_2 k_1')^2 \right) \sqrt{v^2 (-k_1 k_2' + k_1' k_2)^2 + k_1^2 + k_2^2}}$$

denklemleri ile hesaplanır.

4. Sayısal Uygulamalar

Uygulama 4.1. $\alpha(s) = \left(5 \cos \frac{s}{13}, 5 \sin \frac{s}{13}, \frac{12s}{13} \right)$ uzay eğrisinin N-Bishop çatısındaki $\bar{N}(s)$ vektörünün integral eğrisini dayanak eğrisi ve bu eğrinin N-Bishop çatısının Darboux vektörü doğrultusunda alınan doğrultman ile oluşturulan $\gamma(s, v) = \int \bar{N}(s) ds + v \bar{W}_d(s)$ regle yüzeyini alalım. Bu regle yüzeyin dağılma parametresi, sitriksiyon çizgisi, yüzey birim normal vektörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğini hesaplayalım.

$\alpha(s)$ eğrisi birim hızlı olduğundan $\kappa = \frac{5}{169}$ ve $\tau = \frac{12}{169}$ bulunur. $\{N, C, W\}$ çatısının eğrilikleri

$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{1}{13}$, $g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$ dir. $\psi = s = sbt$. olduğundan N-Bishop çatısının eğrilikleri

$k_1 = f \cos s = \frac{1}{13} \cos s$, ve $k_2 = \frac{1}{13} \sin s$ olarak elde edilir. N-Bishop çatısının Darboux vektörü

$W_d = -k_2 N_1 + k_1 N_2 = \left(0, 0, \frac{1}{13} \right)$ dir. Dayanak eğrisi α ve doğrultmanı $\bar{X} = \bar{W}_d$ olan

$\gamma(s, v) = \int \bar{N}(s) ds + v \bar{W}_d(s) = \left(-13 \sin \frac{s}{13}, 13 \cos \frac{s}{13}, \frac{v}{13} \right)$ regle yüzeyini ele alalım. $\gamma(s, v)$ regle

yüzeyinin dağılma parametresi $P_{w_d} = 0$ dir. O halde $\gamma(s, v)$ regle yüzeyi bir açılabilir regle yüzeydir.

Tanım 2.7 de verilen striksiyon çizgisi denkleminde $\left\langle \bar{X}', \frac{d\bar{\lambda}}{ds} \right\rangle = 0$ olduğu için $\bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha}(s)$ elde

edilir. Yani $\gamma(s, v)$ regle yüzeyi için sitriksiyon çizgisi ve dayanak eğrisi birbirine eşit olur. $\gamma(s, v)$ regle yüzeyin birim normal vektörü

$$n = \left(-\sin \frac{s}{13}, \cos \frac{s}{13}, 0 \right),$$

I. temel formun katsayıları

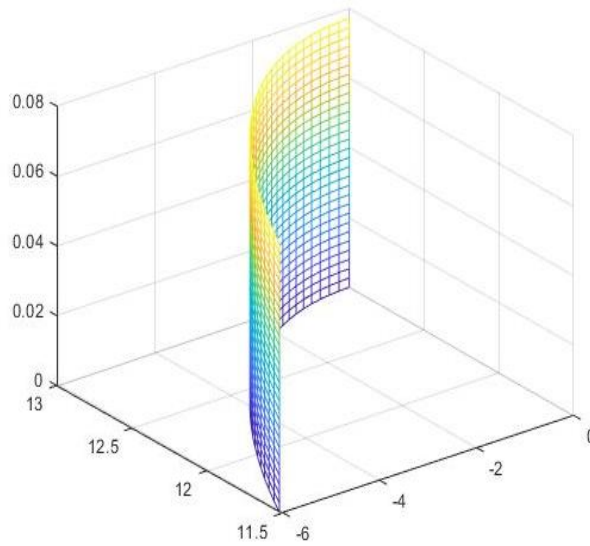
$$E = 1, F = 0, G = \frac{1}{169}$$

olmak üzere I. temel formu $I = ds^2 + \frac{1}{169} dv^2$ olarak hesaplanır. II. temel formun katsayıları

$$L = \frac{-1}{13}, M = N = 0$$

olmak üzere II. esas form sıfıra eşit olacaktır. Gauss ve ortalama eğrilikleri ise

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \text{ ve } H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{26} \text{ eşitlikleriyle hesaplanır.}$$



Şekil 1. $\gamma(s, v) = \left(-13 \sin \frac{s}{13}, 13 \cos \frac{s}{13}, \frac{v}{13} \right)$ regle yüzeyi

Uygulama 4.2. $\alpha(s) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{s}{2}, \sqrt{2} \sin \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{2}s}{2} \right)$ uzay eğrisinin N-Bishop çatısındaki $\bar{N}(s)$

vektörünün integral eğrisi ve doğrultmanı N-Bishop çatısının Darboux vektörü ile üretilen

$\gamma(s, v) = \int \bar{N}(s) ds + v \bar{W}_d$ regle yüzeyinin dağılma parametresi, sitriksiyon çizgisi, yüzey birim

normal vektörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğini hesaplayalım.

$\alpha(s)$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere Serret-Frenet çatısının eğrilik ve burulması

$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4}$, ve $\tau = \frac{\sqrt{2}}{4}$ dir. $\{\bar{N}, \bar{C}, \bar{W}\}$ çatısının eğrilikleri ise $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{1}{2}$, ve

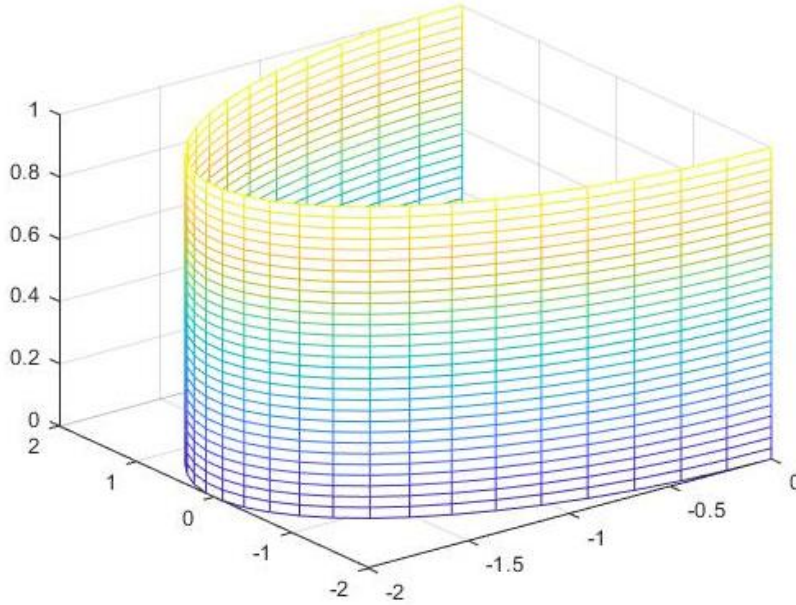
$g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$ dir. N-Bishop çatısının eğrilikleri $k_1 = f \cos s = \frac{1}{2} \cos s$ ve $k_2 = \frac{1}{2} \sin s$ olur.

N-Bishop çatısının Darboux vektörü $\bar{W}_d = -k_2 \bar{N}_1 + k_1 \bar{N}_2 = (0, 0, 1)$ dir. Ohalde regle yüzeyin

denklemini $\gamma(s, v) = \left(-2 \sin \frac{s}{2}, 2 \cos \frac{s}{2}, v \right)$ olarak elde edilir ve dağılma parametresi $P_{W_d} = 0$ olduğu için açılabilir yüzeydir. Tanım 2.7 den $\left\langle \overline{X'}, \frac{d\vec{\lambda}}{ds} \right\rangle = 0$ eşitliği sağlandığı için $\gamma(s, v)$ regle yüzeyin sitriksiyon çizgisi ve dayanak eğrisi birbirine eşit olur. Regle yüzeyin birim normal vektörü $n = \left(-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}, 0 \right)$ dir. $E = 1, F = 0, G = 1$ olduğu için I. esas formu $I = ds^2 + dv^2$ eşitliğiyle elde edilir. $L = \frac{-1}{2}, M = N = 0$ olduğu için II. esas formu sıfır olacaktır. Gauss ve ortalama eğrilikleri ise

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0, \quad H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{4}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 2. $\gamma(s, v) = \left(-2 \sin \frac{s}{2}, 2 \cos \frac{s}{2}, v \right)$ regle yüzeyi

Teşekkür

Bu çalışma ikinci yazarın danışmanlığında birinci yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Yazarların Katkısı

Tüm yazarlar çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

- Andaras,C., Recio,T., Tabera, L.F., Sendra, J.R., Villarino,C., (2011), Proper real reparametrization of rational ruled surfaces. *Comput. Aided Geom. Des.*, 28(2), 102-113.
- Bishop, R. L. (1975). There is more than one way to frame a curve. *Am. Math. Mon.*, 82(3), 246-251.
- Bottema O.,Roth B., (1979). Theoretical kinematics, North-Holland Publishing Company, New York, p.558.
- Çalışkan A., Şenyurt S., (2018). Curves and ruled surfaces according to alternative frame in dual space. *Commun. Fac.Sci.Univ. Ank.Ser.A1 Math.Stat.*, 69 (1), 684-698.
- Damar. E., Yuksel, N., Vanlı, T.A., (2017), The ruled surfaces according to type-2 Bishop frame in E^3 . *Int. Math. Forum*, 2(12), No.3, 133-143.
- Hacısalıhoğlu, H.H., (1983), Diferansiyel geometri II. Gazi Üniversitesi Yayınları.
- Keskin, O., Yaylı, Y., (2017), An application of N-Bishop frame to spherical images for direction curves. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 14(11).
- Kılıçoğlu, Ş., Hacısalıhoğlu, H.H., (2013). On the ruled surfaces whose frame is the Bishop frame in the Öklidean 3-space. *Int. Electron. J. Geom.*, 6(2), 110-117.
- Kuşak Samancı H., (2020). N-Bishop Darboux vector of a timelike curve in Minkowski 3 Space. *Journal of Science and Arts*, 3(52), 519–528.
- Masal, M., Azak, A., (2019). Ruled surfaces according to Bishop frame in the Öklidean 3-spaces. *Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci.* 89(2), 415-424.
- Ouarab, S., Ouazzani, A., Izıd, M. (2018). Ruled surfaces with alternative moving frame in Öklidean 3-space. *International J. of Math. Sci. & Engg. Appls.(IJMSEA)*, 43-58.
- Scofield, P.D., (1995), Curves of constant precessions. *Amer. Math. Monthly*, 102(6), 531-537.
- Senturk, G.Y., Yuce, S., (2015), Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame In E^3 . *Kuwait J. Sci.*, 42(2), 14-33.
- Şahiner B. (2019) Ruled surfaces according to alternative moving frame, arXiv:1910.06589.
- Uzunoğlu, B., Gök, I.,Yaylı, Y., (2016), A New approach on curves of constant precession. *Appl. Math. Comput.*, 275, 317-323.
- Yaylı, Y., Saraçoğlu, S., (2012). Different approaches to ruled surfaces. *SDU Journal of Science*, 7(1), 56-58.
- Yılmaz, B., Ramis, Ç., Yaylı, Y., (2017). On developable ruled surface of the principal direction curve. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(2), 172-180.
- Yüksel, N.,Vanlı, A.T., Damar, E., (2015) 3-boyutlu Öklidyen uzayda Bishop çatılı DNA ve regle yüzeyler. Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri.