



Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

<http://dergipark.gov.tr/yyufbed>



Araştırma Makalesi

Modülüs Fonksiyon Yardımı ile Tanımlanan İnvaryant Yakınsak Dizi Uzaylarının Topolojik Özellikleri

Hasan KARA¹, Dinçer ATASOY*²

¹Iğdır Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Iğdır, Türkiye

²Iğdır Üniversitesi, Iğdır Meslek Yüksekokulu, Finans-Bankacılık ve Sigortacılık Bölümü, Iğdır, Türkiye

Hasan KARA, ORCID No: 0000-0001-9828-9006, Dinçer ATASOY, ORCID No: 0000-0003-0389-1059

*Sorumlu yazar e-posta: dincer.atasoy@igdir.edu.tr

Makale Bilgileri

Geliş: 31.05.2021

Kabul: 28.06.2021

Yayınlanma Ağustos 2021

DOI: 10.53433/yyufbed.945323

Öz: Bu çalışmada Modülüs fonksiyon yardımı ile tanımlanan invaryant yakınsak dizi uzayları tanımlanarak aralarında bazı kapsam bağıntıları kuruldu. $[\omega_\sigma(f)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)$ uzayları $[\omega_\sigma(f)(p)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ uzaylarına genişletildi. Genelleştirilen bu dizi uzaylarının topolojik özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler

Dizi uzaylarının topolojik özellikleri,
İnvaryant yakınsak dizi,
Modülüs fonksiyonu

Topological Properties of Invariant Convergent Sequences Defined with the Help of a Modulus Function

Article Info

Received: 31.05.2021

Accepted: 28.06.2021

Published August 2021

DOI: 10.53433/yyufbed.945323

Abstract: In this study, invariant convergent sequence spaces defined with the help of the Modulus function were defined and some scope relations were established between them. Spaces of $[\omega_\sigma(f)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)$ and $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)$ is extended to $[\omega_\sigma(f)(p)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ and $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ spaces. Topological properties of generalized sequence spaces are studied.

Keywords

Topological properties of
sequence spaces,
Invariant convergent sequence,
Modulus function

1. Giriş

Bu çalışmada modülüs fonksiyon yardımı ile tanımlanan invaryant yakınsak dizi uzayları tanımlanmıştır. $[\omega_\sigma(f)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)$ uzayları $[\omega_\sigma(f)(p)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ dizi uzaylarına genişletilmiştir. Lorentz (1948), Savaş (2018), Rafeiro ve ark. (2018) ve Oğur (2020) tarafından çeşitli yönleri ile çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar kapsamında daha genel dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Tanım 1.

X bir lineer uzayı üzerinde bir $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa g fonksiyonuna X üzerinde bir paranorm ve (X, g) 'ye de bir paranormlu uzay denir (Lorentz, 1948).

P1. $g(\theta) = 0$

P2. $g(x) = g(-x)$

P3. $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

P4. $\lambda \rightarrow \lambda_0, x \rightarrow x_0$ olması, $\lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$ olmasını gerektirir.

Tanım 2.

$P = (P_m)$ her m için $P_m > 0$ ve $\text{Sup } P_m = H < \infty$ olacak şekilde reel sayılar dizisi olsun. Bu takdirde

$$[\omega_\sigma(f)(p)] = \{x: \lim_k \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k f|(t_{mn}(X-L)|^{P_m} = 0, n'ye göre düzgün\}$$

$$\bar{\omega}_\sigma(f)(p) = \{x: \sum_{n=0}^{\infty} f(|\Psi_{mn}(x) - t_{m-1,n}(x)|)^{P_m}, n'ye göre düzgün yakınsak\}$$

$$\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p) = \{x: \text{Sup}_n \sum_{m=0}^{\infty} f(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|)^{P_m} < \infty\} \text{ dur.}$$

$\forall m$ için $(P_m) = P$ olduğunda $[\omega_{\sigma p}(f)]$, $\bar{\omega}_{\sigma p}(f)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_{\sigma p}(f)$ uzaylarına eşit olur.

Ayrıca $\sigma_{(n)} = n + 1$ olduğunda, bu uzaylar $[\omega_\sigma(f)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)$ dizi uzaylarına indirgenir. (Sahoo, 1992).

Şimdi tanımlanan bu uzaylar ile ilgili özellikleri verelim.

Teorem 1.

$[\omega_\sigma(f)(p)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ kümeleri \mathbb{C} üzerinde lineer uzaylardır.

İspat.

$[\omega_\sigma(f)(p)]$, $\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ kümeleri \mathbb{C} kümesinin alt kümeleridir.

$[\omega_\sigma(f)(p)]$ kümesinin \mathbb{C} üzerinde lineer uzay olduğunu göstereceğiz. $\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ and $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ kümeleri de benzer şekilde lineer uzay oldukları gösterilebilir.

$x, y \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $|\lambda|^{P_m} \leq k_1 = \max(1, |\lambda|^H)$ ve $|\mu|^{P_m} = k_2 = \max(1, |\mu|^H)$ olmak üzere

$$|X_{\sigma(n)} + Y_{\sigma(n)}|^{P_m} \leq k (|X_{\sigma(n)}|^{P_m} + |Y_{\sigma(n)}|^{P_m}) \text{ olduğundan}$$

$$\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k f|(t_{mn}(\lambda x + \mu y)|^{P_m} \leq k. k_1 \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k f|(t_{mn}(x)|^{P_m} + k. k_2 \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k f|(t_{mn}(y)|^{P_m})$$

elde edilir (Maddox, 1979).

$[\omega_\sigma(f)(p)] - \lim = 0$ ve $x, y \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ olduğundan $\lambda.x + \mu.y \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ sonucu elde edilir. Bu da $[\omega_\sigma(f)(p)]$ nin skaler çarpımla vektörel toplamlı bir lineer uzay olduğunu verir (Kara, 1994).

2. Materyal ve Yöntem

Teorem 2.

$P = (P_m)$ dizisi her m için $P_m > 0$, $SupP_m < \infty$ olsun. Bu takdirde

$[\omega_\sigma(f)(p)]$, $M = \max(1, SupP_m)$ olmak üzere

$$g(f(x)) = \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^k (|t_{mn}f(x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (1)$$

Fonksiyonu ile tam paranormlu bir lineer topolojik uzaydır.

İspat.

Teoremin ispatı için $g: [\omega_\sigma(f)(p)] \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $x \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ için

$\text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x)|^{P_m}) \right) < \infty$ olduğundan $g(f(x))$, \mathbb{C} de tanımlıdır. Şimdi paranorm şartlarını sağlatalım.

$$\text{i) } g(f(0)) = \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(0)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \text{ olur}$$

$$\text{ii) } g(f(-x)) = \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(-x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(-1.x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^k (|t_{mn}f(|-1||x|)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^k (|t_{mn}f(x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= g(f(x))$$

olur (Mursaleen, 1983).

$$\text{iii) } m \geq 1 \text{ ve } \forall m \text{ için } \frac{P_m}{M} \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$g(f(x+y)) = \text{Sup}_{k, n} \left(\sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x+y)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leq \text{Sup}_{k, n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k \left(|t_{mn}f(x) + t_{mn}f(y)|^{\frac{P_m}{M}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k \left(|t_{mn}f(x)|^{\frac{P_m}{M}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} + \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k \left(|t_{mn}f(y)|^{\frac{P_m}{M}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x)|^{P_k}) \right)^{\frac{1}{m}} + \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(y)|^{P_k}) \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \end{aligned} \quad (2)$$

olur (Oğur, 2020).

Şimdi $[\omega_\sigma(f)(p)]$ deki skaler çarpımın sürekliliğini gösterelim. $P = (P_m)$ dizisi için $\text{Sup} P_m < \infty$ olduğundan $P_m > \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Şimdi $|\lambda| \leq 1$ için $|\lambda|^{P_m} \leq |\lambda|^\delta$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(\lambda.x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq |\lambda|^{\frac{\delta}{m}}. g(f(x)) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\lambda \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ ise $\lambda x \rightarrow 0$ ve eğer λ sabit ve $x \rightarrow 0$ ise $\lambda x \rightarrow 0$ dir.

$x \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ sabit ve verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ sayısı vardır ki $\forall n$ için

$$\text{Sup}_{k \geq k_0} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(\lambda.x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

ve $|\lambda| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz (Nakano, 1953).

dolayısıyla $\forall n$ için

$$\text{Sup}_{k \leq k_0} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(\lambda.x)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

olur. Böylece (3) ve (4) ifadelerinden $|\lambda| < \delta$ oldukça $g(f(\lambda.x)) < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar (Savaş, 2018).

3. Bulgular

$[\omega_\sigma(f)(p)]$ uzayının g paranormuna göre tam olduğu görülecektir.

(x^s) nin $[\omega_\sigma(f)(p)]$ de bir Cauchy dizisi olsun. Yani

$s, t \rightarrow \infty$ iken $g(f(x^s - x^t)) \rightarrow 0$ olsun.

$$g(f(x^s - x^t)) = \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x^s - x^t)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

ve

$$g(f(x^s - x^t)) \geq \text{Sup}_{k,n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x^s - x^t)|^{P_m}) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5)$$

olduğundan $\forall m$ ve n için

$$\lim_{s,t \rightarrow \infty} |t_{mn}f(x^s - x^t)|^{P_m} = 0$$

elde edilir. Özel olarak $m=0$ olmak üzere herhangi n için $s, t \rightarrow \infty$ iken

$|t_{mn}f(x^s - x^t)| = f(|x^s - x^t|) = |x^s - x^t| \rightarrow 0$ dir. Böylece $(x^s), \mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir.

\mathbb{C} tam olduğundan dolayı $s \rightarrow \infty$ iken $x^s \rightarrow x$ olacak şekilde $x \in \mathbb{C}$ vardır. (5) numaralı ifadeden $\varepsilon > 0$ ve $\exists \mathbb{N}$ öyleki $s, t > \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x^s - x^t)|^{P_m})\right)^{\frac{1}{m}} < \varepsilon \quad (6)$$

olur.

Şimdi $s > \mathbb{N}$ ve $t \rightarrow \infty$ olsun. Bu takdirde (6) numaralı ifadeden

$$\left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (|t_{mn}f(x^s - x^t)|^{P_m})\right)^{\frac{1}{m}} < \varepsilon$$
 elde edilir. Buradan da

$\delta \rightarrow \infty$ iken $g(f(x^s - x^t)) \rightarrow \infty$ olur.

Bu da $x^s \rightarrow x'$ e yakınsaması demektir (Mursaleen, 1983).

(6) numaralı ifadeden ve her bir s için $x^s \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ ve $[\omega_\sigma(f)(p)]$ nin lineer olduğundan $g(f(x)) = g(f(x^s - x^t + x)) \leq g(f(x^s - x)) + g(f(x)) \rightarrow 0$ elde edilir. Buradan $x \in [\omega_\sigma(f)(p)]$ olduğu elde edilir. Böylece $[\omega_\sigma(f)(p)]$ nin tam olduğu görülür (Rafeiro ve ark, 2018).

Bu teoremden p sabit ve $p \geq 1$ ise $[\omega_\sigma(f)(p)]$ uzayı Banach uzayı $0 < p < 1$ ise p - normlu uzaya indirgenir (Sahoo, 1992).

4. Tartışma ve Sonuç

Teorem 3.

$P = (P_m)$ dizisi her m için $P_m > 0$, $Sup P_m < \infty$ olsun. Bu takdirde

$\bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p)$ uzayları $M = \max(1, Sup P_m)$ olmak üzere

$g(f(x)) = Sup_n \left(\sum_{m=0}^\infty f \left(|\Psi_{mn} - \Psi_{m-1,n}|^{P_m} \right) \right)^{\frac{1}{m}}$ fonksiyonu altında bir tam paranormlu lineer topolojik uzaydır.

Teoremin ispatı teorem 2'nin ispatının benzeri olduğundan tekrar vermeyeceğiz.

Teorem 4.

- Eğer $\forall m$ için $p_m \leq q_m$ ise $\bar{\omega}_\sigma(f)(p) \subset \bar{\omega}_\sigma(f)(q)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p) \subset \bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(q)$ dur.
- Eğer p sabit ve $p \geq 1$ ise

$$l_p^\sigma(f) \subset \bar{\omega}_\sigma(f)_p \text{ ve } l_p^{\sigma\sigma}(f) \subset \bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)_p \text{ dir.}$$

İspat.

- $\bar{\omega}_\sigma(f)(p) \subset \bar{\omega}_\sigma(f)(q)$ göstereceğiz $\bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(p) \subset \bar{\bar{\omega}}_\sigma(f)(q)$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

$x \in \bar{\omega}_\sigma(f)(p)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{m=M}^\infty f \left(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^{P_m} \right) < 1$$

olacak şekilde M tamsayısı vardır. Böylece $\forall n$ ve $m \geq M$ için $f \left(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^{P_m} \right) < 1$ olup $p_m \leq q_m$ olduğundan da $f \left(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^{q_m} \right) < f \left(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^{P_m} \right)$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafının m üzerinden toplamı alınırsa

$\sum_{m=M}^{\infty} f(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^{q_m}) \leq \sum_{m=M}^{\infty} f(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^{p_m})$ elde edilir. Sağdaki seri n ye göre düzgün yakınsak olduğundan, soldaki seri de n ye göre düzgün yakınsak olur. O halde

$\bar{\omega}_{\sigma}(f)(p) \subset \bar{\omega}_{\sigma}(f)(q)$ dur.

b) $l_p^{\sigma}(f)_p \subset \bar{\omega}_{\sigma}(f)_p$ ispatını yapacağız. $l_{\sigma}^{\sigma}(p) \subset \bar{\omega}_{\sigma}(f)_p$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.b)

$x \in l_p^{\sigma}(f)_p$ olsun $p = 1$ iken ifade açıktır. $p > 1$ için

$$\begin{aligned} f(|\Psi_{kn}(x) - \Psi_{k-1,n}(x)|^p) &\leq \frac{1}{k(k+1)^p} \sum_{m=1}^{\infty} m^p f(|t_{mn}(x) - t_{m-1,n}(x)|^p) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p f(|t_{mn}(x) - t_{m-1,n}(x)|^p) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^p} \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} m^p f(|t_{mn}(x) - t_{m-1,n}(x)|^p) \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir. (II) yakınsak olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} f(|\Psi_{mn}(x) - \Psi_{m-1,n}(x)|^p)$ düzgün yakınsaktır. O halde $l_p^{\sigma}(f)_p \subset \bar{\omega}_{\sigma}(f)_p$ olur (Savaş, 2018).

Sonuç olarak modülüs fonksiyon yardımı ile tanımlanan invaryant yakınsak dizi uzayları tanımlanarak bazı kapsamlar kurulmuştur.

$[\omega_{\sigma}(f)]$, $\bar{\omega}_{\sigma}(f)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_{\sigma}(f)$ uzayları $[\omega_{\sigma}(f)(p)]$, $\bar{\omega}_{\sigma}(f)(p)$ ve $\bar{\bar{\omega}}_{\sigma}(f)(p)$ uzaylarına genişletilerek genel dizi uzaylarının topolojik özellikleri incelenmiştir.

Kaynakça

- Kara, H. (1994). *İnvaryant yakınsaklık yardımıyla tanımlanan dizi uzayları*. (Doktora Tezi), Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Van, Türkiye.
- Lorentz, G. (1948). A contribution to the theory of divergent secunces. *Acta Mathematica*. 80, 167-190. doi: 10.1007/BF02393644.
- Maddox, I. J. (1979). On strong alost convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 85, 345-350. doi:10. 1017/S0305004100054281.
- Mursaleen, M. (1983). On some new invariant matrix methods of summability. *Quarterly Journal of Mathematics*, 34, 77. doi:10.1093/qmath/34.1.77.
- Nakano, H. (1953). Concave modulars. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, S:29-49. doi:10.2969/jmsj/00510029.
- Oğur, O. (2020). Modülüs fonksiyonu ile tanımlanmış genelleştirilmiş büyük lebesgue dizi uzaylarının topolojik bazı özellikleri. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 10 (4), 1148-1149. doi: 10.17714/gumusfenbil.732116.
- Rafeiro, H., Samkho, S. & Umarhadzhev, S. (2018). Grand lebesgue sequence spaces. *Georgian Mathematical Journal*, 19(2), 235-246. doi:org/10.1515/gmj-2018-0017.
- Sahoo, G. D. (1992). On some squence spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 164, 381-398. doi:10.1016/0022-247X(92)90122-T.
- Savaş, E. (2018). On some new sequence spaces. *Journal of the Institute of Science and Technology of Balıkesir University. Special Issue*, 20(3). 155-156. doi: 10.25092/baunfbed.487747.