



Bir düzlemsel robotun anlık pol planı ve hız vektörlerinin geometrik tasarımı

Engin Can^{1*}

27.06.2014 Geliş/Received, 24.07.2014 Kabul/Accepted

ÖZ

Bu çalışma projektif geometrinin bir konusu olan bir düzlem paralel robotun pol planı ve hız vektörlerinin grafiksel çözümlerini içermektedir. Geometrik bakış açısıyla incelendiğinde tüm mümkün haller ele alınmıştır. CAD 2D [11] ile tasarımı yapılan bu grafiksel çözümler, pol planının olmadığı durumdan sonsuz çözümün olduğu duruma kadar genişletilmiştir. Bunlar sırasıyla singüler (robotik de olduğu gibi) ve iki kere singüler çözümler olarak tanımlanmıştır. Bu tip durumlar, aynı düzlemdeki taşıyıcı kolların bir noktada kesişmesi ve bazı özel paralellerin noktadaş olmaları ile geometrik olarak ifade edilecektir.

Anahtar Kelimeler: düzlemsel mekanizma, F-mekanizması, geometriksel pol plan tasarımı, geometriksel hız tasarımı

The geometric design of currently polplan and velocity vectors of a planar parallel robot

ABSTRACT

This study includes graphical methods for polplan and velocity analysis of a planar parallel robot, which can be reduced to a problem of projective geometry. This is examined with geometric perspective for all possible special cases. The graphical methods, which is demonstrated with CAD 2D [11], already reveal that there are poses in which there is either no pole configuration or an infinite number of pole configurations. These poses are called singular (like in robotics) or twofold singular, respectively. There are simple geometric characterizations for both by coplanar carrier lines of the arms or additionally by particular coplanar parallels.

Keywords: planar mechanism, F-mechanism, geometrical polplan construction, geometrical velocity construction

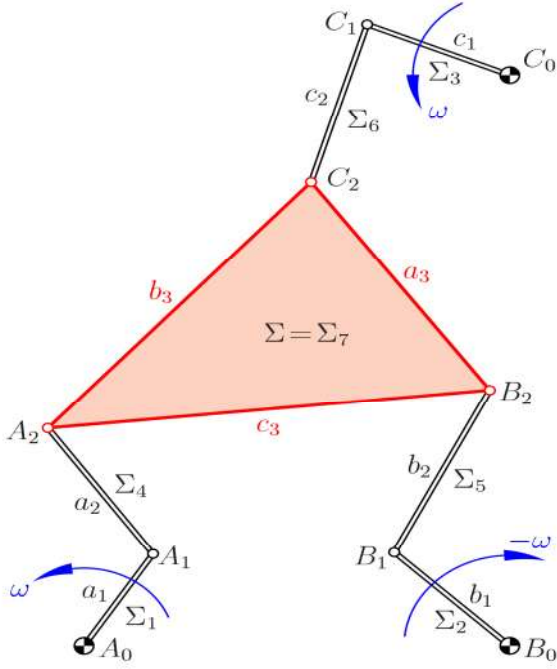
* Sorumlu Yazar / Corresponding Author

1 Sakarya Üniversitesi, Kaynarca Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu, Sakarya - ecan@sakarya.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

1.1. F-mekanizması Tanımı (Definition of F-mechanism)

Fehrer Mekanizması (kısaca F-mekanizması), şekil 1 de görülen, 8 elemanlı kinematik zincir olup, aşağıdaki özelliklere sahip bir düzlem paralel 3-RRR robottur. [1].



Şekil 1. Tersyönlü F-mekanizması (Indirected F-mechanism)

Sırasıyla A_0, B_0 ve C_0 sabit noktaları ve A_1, B_1 ve C_1 uç noktalarına bağlı, aynı ω açısal hızıyla hareket eden üç adet $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ krankı mevcuttur. Bu krankların sırasıyla uzunlukları a_1, b_1 ve c_1 olsun. Σ_1 ve Σ_3 krankları matematiksel pozitif yöne dönerken, Σ_2 ters yönlü ise buna *ters yönlü hareket*, aksi halde *aynı yönlü hareket* diye tanımlanmıştır.

$\Sigma = \Sigma_7$ hareket sisteminin A_2, B_2 ve C_2 noktaları, uzunlukları sırasıyla a_2, b_2 ve c_2 olan $\Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6$ kollarının A_1, B_1 ve C_1 krank uçları ile bağlıdır.

1.2. Pol Plan Tanımı (Definition of Polplan)

F-mekanizması, hareketsiz Σ_0 sisteminin yanında, üç krank, üç bağlantı kolu ve bir hareketli sistem olmak üzere $\Sigma_1, \dots, \Sigma_7$ yedi hareketli sisteme sahiptir. Bilindiği üzere her Σ_i, Σ_j sistem ikilisi için, Σ_i/Σ_j ve Σ_j/Σ_i hareketinin her anına bir $P_{ij} = P_{ji}$ (kısaca $i < j$ için ij) relatif polü tekabül eder.

Böylece $\binom{8}{2} = 28$ relatif pol noktası mevcuttur. Bu çalışmada hareketli sistem Σ_7 nin, hareketsiz sistem Σ_0 a karşılık gelmesi beklenen anlık polü olarak gösterilecek olan $P = 07$ relatif polü araştırılacaktır.

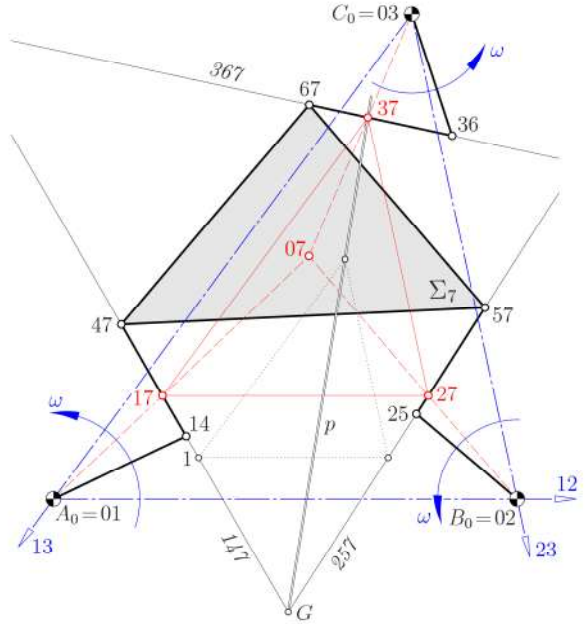
Herhangi üç $\Sigma_i, \Sigma_j, \Sigma_k$ sistemi için Aronhold ve Kennedy'nin *üçpol teoremi*' ne göre P_{ij}, P_{ik}, P_{jk} polleri doğrudur ve tek bir g_{ijk} (kısaca $i < j < k$ için ijk) pol doğrusu üzerinde bulunurlar. Böylece birbiriyle çakışsa da toplam $\binom{8}{3} = 56$ pol doğrusu mevcuttur.

Bütün bu pol noktaları ve pol doğrularının oluşturduğu yapıya kinematik zincirin *anlık pol planı* denir.

2. GEOMETRİK TASARIMLAR (GEOMETRIC CONSTRUCTIONS)

2.1. Pol planın Geometrik Tasarımı (Geometrical Construction of Polplan)

Pol planın geometrik olarak elde edilebilmesi için şu yol izlenir (Şekil 2): Sabit noktalar A_0, B_0 ve C_0 sırasıyla 01, 02 ve 03 polleridir. Krank uçları A_1, B_1 ve C_1 üzerinde sırasıyla 14, 25 ve 36, ayrıca kol uçları A_2, B_2 ve C_2 üzerinde sırasıyla 47, 57 ve 67 polleri bulunur.



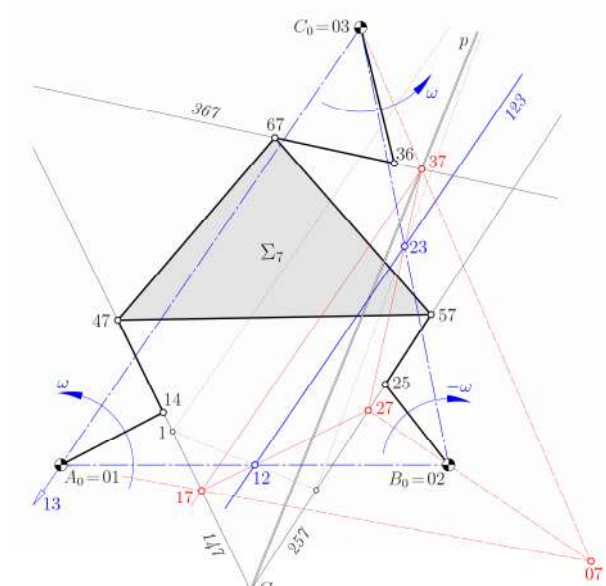
Şekil 2. Aynı yönlü durumunda pol planı tasarımı (Polplan construction of direct fall)

Σ_1, Σ_2 ve Σ_3 krankları aynı yada zıt yönlü bile olsalar eşit açısal hızda olmaları öngörüldüğünden, aynı yönlü hareket için 12, 23 ve 13 relatif polleri $A_0B_0C_0$ üçgeninin

kenarının oluşturduğu 012, 023 ve 013 doğruları üzerindedir. Ters yönlü harekette 12 ve 23 polleri sırasıyla A_0B_0 ve B_0C_0 kenarlarının orta noktalarıdır (şekil 3). Her iki durumda da bu relatif poller 123 pol doğrusu üzerindedirler.

17, 27 ve 37 polleri ise bir taraftan Σ_4, Σ_5 ve Σ_6 taşıyıcı kolları yani sırasıyla 147, 257 ve 367 üzerideyken, diğer taraftan da bu pollerin pol doğruları sırasıyla 127, 237 ve 137 dir ve bunlar da sırasıyla 12, 23 ve 13 pol noktalarından geçerler.

Bu durumda 17, 27 ve 37 relatif pollerinin belirlenmesi, aşağıda sonuçları verilen, çözümü [2] de incelenmiş klasik bir projektif geometri problemidir.



Şekil 3. Ters yönlü durumda pol planı tasarımı (Polplan construction of indirect fall)

2.1.1. Genel çözüm (General solution)

Şekil 2 ve şekil 3 de görülen 17, 27 ve 37 pol noktalarının oluşturduğu 17 27 37 üçgenini ele alalım. Bu üçgen, sistemin sabit noktalarının belirlediği $A_0B_0C_0$ üçgenine 123 pol doğrusundan perspektiftir, öyle ki $[A_0 B_0] = [01 02]$ ve $[17 27]$ kenarları yani 012 ve 127 pol doğruları 12 pol noktasından geçer.[2]

Bu perspektifliğin bir merkezi vardır ve bu merkez 017, 027 ve 037 pol doğrularının kesişimi, Σ_7/Σ_0 hareketinin aranan pol noktasıdır.

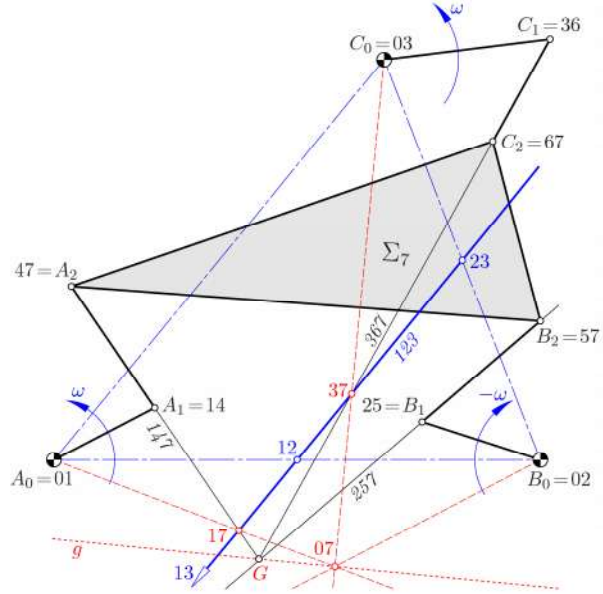
2.1.2. Aşıkâr çözüm (Trivial solution)

Yukarıda bahsedilen genel çözümün yanında aşıkâr çözüm de mevcuttur:

17, 27 ve 37 pol noktaları birbirinden farklı ve hepsi 123 pol doğrusu üzerinde olabilirler (şekil 4). Yani:

$$\begin{aligned} 17 &= 123 \cap 147 \\ 27 &= 123 \cap 257 \\ 37 &= 123 \cap 367 \end{aligned}$$

olabilir. Bu çözümün, $[A_0 17]$, $[B_0 27]$ ve $[C_0 37]$ doğruları da bir noktada kesiştiğinden, uygun bir çözüm olduğu görülür.



Şekil 4. Aşıkâr çözüm (Trivial solution)

Sonuç olarak, aşağıdaki lemmalar verilebilir:

Lemma 2.1. Eğer 123 pol doğrusu üzerindeki (17, 23), (27, 13) ve (37, 12) nokta çiftleri *Desargues involusyon teoremi* şartlarını sağlıyor ve 123 pol doğrusu A_0, B_0, C_0 sabit noktalarının oluşturduğu üçgenin hiçbir köşesinden geçmiyorsa

$$\begin{aligned} 17 &= 123 \cap 147 \\ 27 &= 123 \cap 257 \\ 37 &= 123 \cap 367 \\ 07 &= [A_0 17] \cap [B_0 27] \cap [C_0 37] \end{aligned}$$

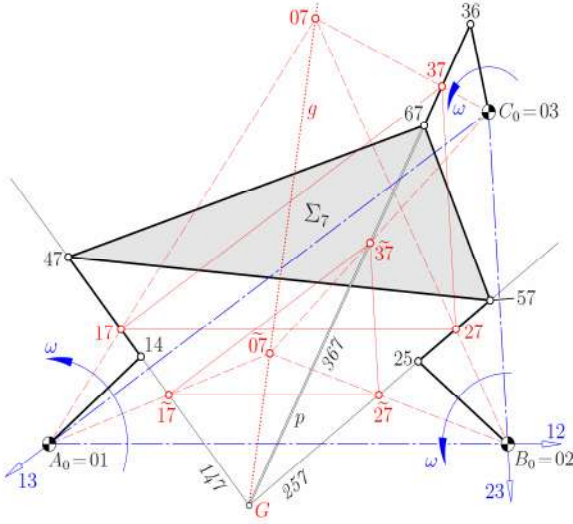
dir.[2]

Lemma 2.2. Eğer yukarıda bahsedilen pol plan tasarımının, 367 pol doğrusu ve 123 pol doğrusu bir noktada kesişiyorsa, o zaman aşıkâr çözüm vardır ve $[A_0 17]$, $[B_0 27]$ ve $[C_0 37]$ noktadaştır.[2]

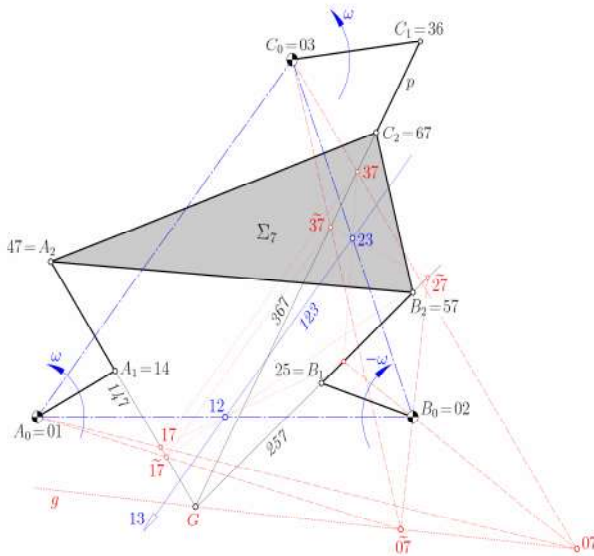
2.1.3. Sonsuz çözüm (Infinite solution)

Lemma 2.1. Eğer A_0, B_0, C_0 sabit noktaları bir üçgen oluşturan herhangi bir F-mekanizması için; A_1A_2, B_1B_2 ve C_1C_2 kollarından geçen 147, 257 ve 367 pol doğruları bir G noktasında kesişiyor ve 17, 27 ve 37 pol noktalarının oluşturduğu üçgenin kenarları sırasıyla 12, 23 ve 13 pol noktalarından geçiyorsa, sonsuz çoklukta 07 pol noktası mevcuttur [2](şekil 5 ve şekil 6).

Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir:



Şekil 5. Aynı yönlü durumunda sonsuz çözüm (Infinite solution of direct fall)



Şekil 6. Ters yönlü durumda sonsuz çözüm (Infinite solution of indirect fall)

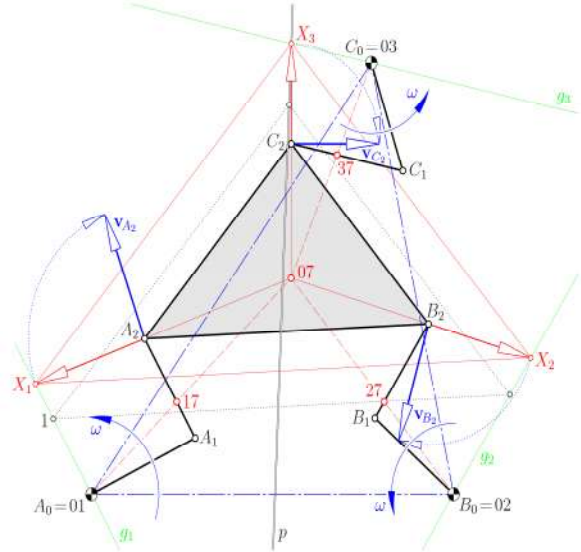
Teorem 2.1. A_0, B_0, C_0 sabit noktaları bir üçgen oluşturan herhangi bir F-mekanizması için; ya bir tek ya da sonsuz pol plan çözümü vardır [2].

2.2. Hız Vektörlerinin Geometrik Tasarımı (Geometrical Construction of Velocity Vectors)

2.2.1. Aynı yönlü hareket durumu (Direct fall)

$\overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{B_1B_0}, \overrightarrow{C_1C_0}$ vektörleri, krank uçlarının hız vektörleridir. A_2, B_2, C_2 noktalarının hız vektörleri aynı anda A_0, B_0 ve C_0 dan geçen ve A_1A_2, B_1B_2 ve C_1C_2 kollarına paralel olan g_1, g_2, g_3 doğruları üzerindedirler. Aynı zamanda bu vektörlerin uç noktaları $A_2B_2C_2$ üçgenine benzer bir üçgen oluştururlar (şekil 5).

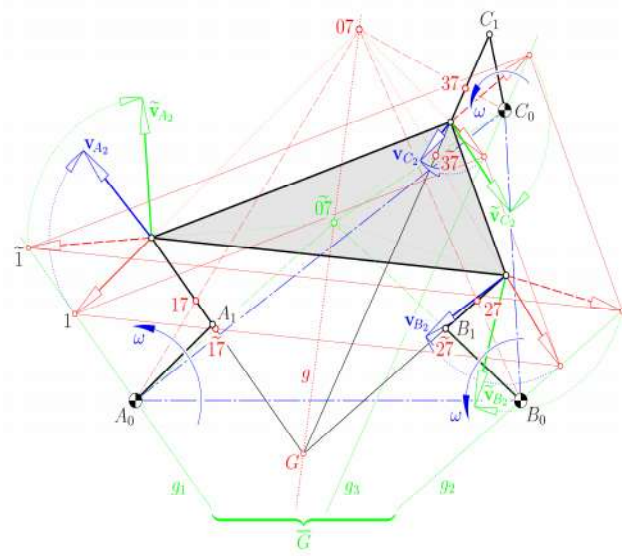
Tasarım için $1 \in g_1$ seçilir. 1 den geçen A_2B_2 ye çizilen paralelin g_2 ile kesiştiği nokta bulunur. 1 ve bu yeni noktadan, $A_2B_2C_2$ üçgenine benzer olacak şekilde paraleller çizilerek yeni bir üçgen elde edilir. Bulunan üçüncü köşe noktası, $1 \in g_1$ seçiminden bağımsız olarak $\bar{G} = g_1 \cap g_2$ den geçen p doğrusu üzerindedir.



Şekil 7. Aynı yönde hız vektörleri tasarımı (Construction of velocity vectors by direct fall)

Böylece aşağıdaki sonuçlar görülür:

- $X_3 = p \cap g_3$ noktası C_3 noktasının hız vektörüdür.
- $p \parallel g_3$ ve $p \neq g_3$ ise çözüm yoktur, başka deyişle A_2, B_2 ve C_2 köşelerinin hız vektörlerin büyüklüğü sonsuza gider.
- $p = g_3$ olursa, yani iki doğru çakışırsa sonsuz çözüm oluşur.(şekil 8)

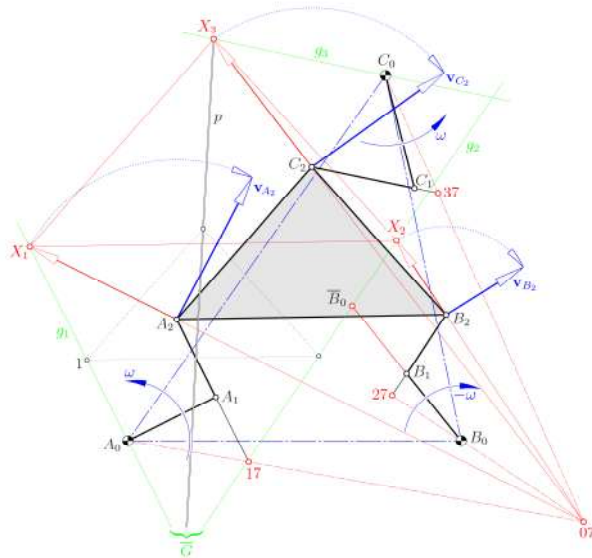


Şekil 8. Sonsuz çözüm (Infinite solution)

Sırasıyla $\mathbf{v}_{A_2}, \mathbf{v}_{B_2}, \mathbf{v}_{C_2}$ hız vektörlerinin $\overline{A_2X_1}, \overline{B_2X_2}, \overline{C_2X_3}$ taşıyıcı doğruları, A_2, B_2 ve C_2 köşelerinin yörünge normalleridir ve birbirleriyle Σ_7/Σ_0 hareketinin 07 relatif polünde keşirler. Bu pol noktası da, $A_2B_2C_2$ üçgeni ile vektör uçlarının oluşturduğu $X_1X_2X_3$ üçgeninin perspektiflik merkezidir.

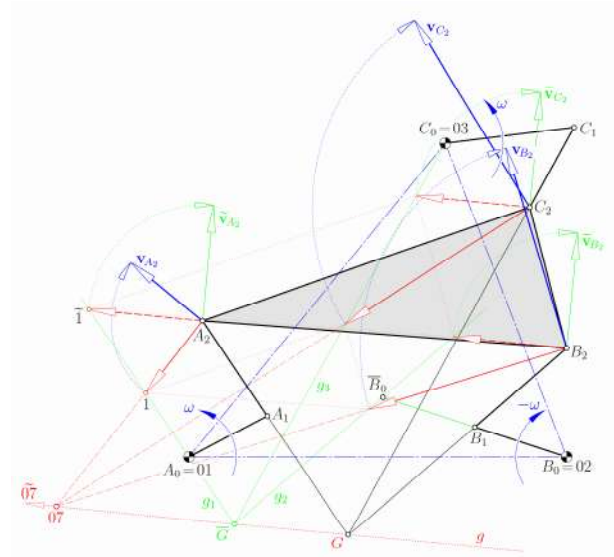
2.2.2. Ters yönlü hareket durumu (Indirect fall)

F-mekanizması için ters yönlü hareket söz konusu ise, B_0B_1 krankı ters yöne hareket edeceğinden B_1 noktasının hız vektörü $\overline{B_0}$ dir.[2](Şekil 9 ve şekil 10)



Şekil 9. Ters yönde hız vektörleri tasarımı (Construction of velocity vectors by indirect fall)

Bu $\overline{B_0}$ noktasından B_1B_2 koluna paralel g_2 doğrusu çizilir ve aynı yönlü harekette anlatılan metod uygulanırsa hız vektörleri bulunmuş olur.



Şekil 10. Sonsuz çözüm (Infinite solution)

3. SİNGÜLER POZİSYONLAR (SINGULAR POSITIONS)

3.1. Tanım (Definition)

F-mekanizmasının bir pozisyonu için eğer;

a) Krankların hepsi, yani $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ hareketsiz dururken ($\omega = 0$), diğer sistemlerden en az biri sonsuz hareketlilik durumundaysa pozisyona *singüler*,

b) Verilen ω çalışma hızı için, sistemlerden herhangi birinin yerel serbestlik derecesi en az iki ise pozisyona *iki kere singüler*,

denir. Burada yerel serbestlik derecesinden kasıt, ω den bağımsız olmak üzere herhangi bir sistemin anlık mümkün hız vektörlerinin oluşturduğu vektör uzayının boyutudur.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

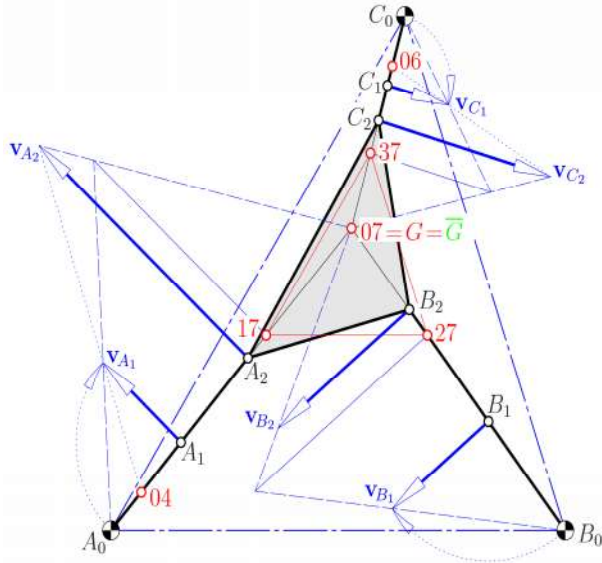
1) Eğer bir F-mekanizmasının A_1A_2, B_1B_2 ve C_1C_2 taşıma kollarının oluşturduğu doğrular bir noktada keşiyorsa, pozisyonu *singülerdir*. [3]

2) Eğer bir F-mekanizmasının pol planı tek bir çözümle bulunamıyorsa (pol planı için sonsuz çözümler mevcutsa), pozisyonu *iki kere singülerdir*.

3) Eğer bir F-mekanizmasının A_1A_2, B_1B_2 ve C_1C_2 kolları bir G noktasında keşirirken, aynı zamanda A_0, A_1

ve A_2 den çizilen g_1 , g_2 , g_3 paralelleri de bir \bar{G} noktasında kesişiyorsa, pozisyon yine iki kere singülerdir.

4) Limit durumu:



Şekil 11. $G = \bar{G}$ limit durumu (Limit fall for $G = \bar{G}$)

$G = \bar{G}$ olması hali limit durumudur. Burada şekil 11 de görüldüğü gibi tüm hareket sisteminin 07 polleri aynıdır, yani Σ_7 yerel serbestlik derecesi 1 olmasına rağmen, hareketsiz sisteme göre açısal hızı serbesttir ve hareket hızı ω nin seçiminden bağımsızdır.

Pol plan çözümü de mevcuttur ve 17, 27 ve 37 pol noktalarının oluşturduğu üçgen, sistemin hareketsiz A_0, B_0 ve C_0 noktalarının oluşturduğu $A_0B_0C_0$ üçgenine benzerdir ve tanım 3.1 b) de verildiği gibi serbestlik derecesi 1 den büyük olmamasına rağmen iki kere singülerdir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] E. Can, H. Stachel, "A planar parallel 3-RRR robot with synchronously driven cranks", Mechanism ve Machine Theory, Cilt. 79, September, pp. 25-42, 2014
- [2] E. Can, "Analyse und Synthese eines schnelllaufenden ebenen Mechanismus mit modifizierbaren Zwangsläufen", PhD thesis, Vienna University of Technology, 2012.
- [3] H.R. Mohammadi Daniali, K. Kamali, A. Akbarzadeh, "Singularity analysis of planar parallel manipulators", Mechanism ve Machine Theory, Cilt. 30, pp 665-678, 1995
- [4] Ş. Staicu, "Kinematics of the 3-RRR planar parallel robot", U.P.B. Sci. Bull., Ser. D, Cilt. 70/2, pp. 3-14, 2008
- [5] R. Di Gregorio, "A novel method for the singularity analysis of planar mechanisms with more than one degree of freedom", Mechanism ve Machine Theory, Cilt. 44, pp. 83-102, 2009
- [6] W. Blaschke ve H.R. Müller, "Ebene Kinematik", Verlag R. Oldenburg, München, 1956
- [7] H. Stachel, "Über zweiparametrische ebene Bewegungsvorgänge", Monats. Math., Cilt 88, pp. 45-54, 1979
- [8] B. Wegner, 'On the projektive invariance of shaky structures in Euclidean space', Acta Mech., Cilt 53, pp. 163-171, 1984
- [9] W. Wunderlich, "Ebene Kinematik", BI Hochschultaschenbücher, Bve 447, Mannheim, 1970
- [10] W. Wunderlich, "Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen", Z. Angew. Math. Mech., Cilt. 60, pp. 703-708, 1980
- [11] CAD 2D, Differential Geometry ve Geometric Structures, Vienna University of Technology Licensing, [Online], Available: <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/software/cad3ddos/>, 1996-2007.