

Newton tabanlı kök bulma yöntemleri için simülatör tasarımı

Fahri Vatansever^{1*}, Metin Hatun²

25.03.2015 Geliş/Received, 12.05.2015 Kabul/Accepted

ÖZ

Mühendislik problemlerinin çoğunda denklemlerin köklerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için birçok yöntemler geliştirilmiştir. Ancak, özellikle gerçek zamanlı uygulamalarda köklerin en az işlemle, en kısa sürede, yüksek hassasiyetle bulunması istenen başlıca özelliktir. Gerçekleştirilen çalışmada, Newton tabanlı 42 yöntemi barındıran grafiksel arayüz programı geliştirilmiştir. Kullanıcı dostu ve eğitim amaçlı da kullanılabilen simülatörde tanımlanan/girilen denklemlerin, belirtilen aralıkta ve istenen hassasiyette kökleri hesaplanabilmekte; köke yakınsama adımları (iterasyonları) hem sayısal hem de grafiksel (animasyonlu veya animasyonsuz) olarak görülebilmekte, yöntemlerle ilgili konu anlatımları sunulmaktadır. Ayrıca yöntemlerin performans analizleri (iterasyon sayısı, bulunan kök, hesaplama süresi) de karşılaştırmalı olarak yapılabilmektedir. Böylece simülatör ile kullanıcılar farklı yöntemlerle kök bulma işlemlerini karşılaştırmalı olarak gerçekleştirebilmekte; öğrenciler bu alandaki yöntemleri görsel olarak öğrenip uygulayabilmekte; tasarımcılar sistemleri için performans açısından en uygun yöntemi kolaylıkla, etkin ve verimli bir şekilde seçebilmektedirler.

Anahtar Kelimeler: Kök bulma, Newton yöntemleri, Simülatör

Design the simulator for root-finding based on Newton's methods

ABSTRACT

In most of the engineering problems, the calculation of the roots of the equations is required. Many methods have been developed for this purpose. However, especially to obtain the roots in real-time applications with a minimum operation in minimum time, and having high accuracy are main properties. In the performed study, a graphical user interface program that contains 42 Newton-based methods was developed. In the user friendly simulator which can be used also for educational purposes, the roots of the defined/entered equations can be calculated within the specified range with a desired precision; the convergence steps (iterations) to the root can be seen as both numerical and graphical (animated or non-animated), the descriptions of subjects related to the methods are presented. Also, the performance analyzes (the iteration number, the obtained root, the computation time) of the methods can be performed comparatively. Thus, the users can perform the root-finding operations with different methods comparatively by the simulator; the students can learn and apply the methods visually in this field; the designers can choose the most appropriate method in terms of performance easily, effectively and efficiently for their systems.

Keywords: Root-finding, Newton's methods, Simulator

* Sorumlu Yazar / Corresponding Author

1 Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Bursa - fahriv@uludag.edu.tr

2 Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Bursa - metinh@uludag.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Matematiksel denklemlerin köklerinin bulunması/hesaplanması, temel ve uygulamalı bilimlerin birçok alanında en sık yapılan işlemlerdendir. Her bir uygulama alanı için kendine has anlamlar taşıyan köklerin hesaplanması için birçok yöntemler geliştirilmiştir ve geliştirilmeye de devam edilmektedir. Sayısal hesaplama teknolojilerindeki gelişmelere paralel olarak daha az iterasyonla, daha kısa hesaplama zamanında, daha az bellek alanı kullanarak ve daha az sayıda farklı türde işlemler gerçekleştirerek daha yüksek doğrulukta/hassasiyette sonuçlar üreten yöntemler üzerindeki çalışmalar da sürmektedir. Ayrıca tüm mühendislik eğitimlerinde yer alan sayısal analizin temel konu başlıklarından birisi de kök bulma yöntemleridir.

MATLAB, Maple, Mathcad, Mathematica, Scilab gibi genel amaçlı geliştirilen yazılımlar, birçok sayısal analiz yöntemini barındırmaktadır [1,2]. Bunların yanında sayısal yöntemlerle hesaplamalar yapabilmek için web sayfaları [3], mobil uygulamalar [4], eğitim amaçlı uzaktan erişimli kurs/ders sayfaları [5] ve yazılımsal eğitim araçları [6-11] geliştirilmiştir.

Gerçekleştirilen çalışmada; kök hesaplamalarını Newton tabanlı 42 farklı yöntemle yapabilen, bunlar hakkında konu anlatımları sunabilen ve performans analizleri sağlayabilen simülasyon tasarlanmıştır. Eğitim ve uygulama amaçlı kullanılacak kullanıcı dostu simülasyon ile istenilen denklemlerin/fonksiyonların kökleri, tanımlanan aralık ve hassasiyetlerde, seçilen yöntemlerle kolaylıkla hesaplanabilmekte ve sonuçları hem sayısal hem de grafiksel olarak görülebilmektedir.

2. NEWTON TABANLI KÖK BULMA YÖNTEMLERİ (NEWTON BASED ROOT-FINDING METHODS)

Sayısal analizde, kök hesaplamaları için birçok yöntem mevcuttur. Bunların içinde Newton yöntemleri en çok kullanılanlarıdır. Temel Newton-Raphson yöntemiyle $y = f(x)$ fonksiyonu için $[a, b]$ aralığında yaklaşık kök hesabı yapılırken; birinci adımda, iterasyona başlangıç x_0 değeri belirlenir. Başlangıç değeri olarak da fonksiyonun ve ikinci türevinin aynı işaretli olduğu sınır değeri alınabilir. Yani x_0 başlangıç değeri

$$\begin{cases} f(a).f''(a) > 0 \Rightarrow x_0 = a \\ f(b).f''(b) > 0 \Rightarrow x_0 = b \end{cases} \quad (1)$$

koşulu test edilerek bulunabilir. Bu belirlemeden sonra $[x_0, f(x_0)]$ ile $[x_1, 0]$ arasında bir doğru çizilir. Burada, köşeleri $x_0, f(x_0)$ ve x_1 olan bir dik üçgen oluşur (Şekil 1). x_1 değerini bulmak için “bir noktadaki türev, o noktadan geçen teğetin eğimidir” tanımından hareketle

$$\text{Tan}(x_1) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0} = -f'(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2)$$

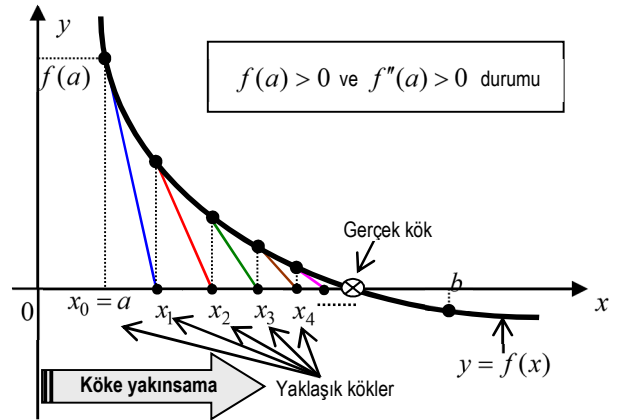
bulunur. x_1 değeri, benzer bir yolla şu şekilde de belirlenebilir. $[x_0, f(x_0)]$ noktasına teğet olan doğrunun denklemi;

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

dir. x_1 , bu teğetin x -eksenini kestiği nokta olduğundan $y = 0$ için

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (4)$$

elde edilir (Şekil 1). Eğer köke yeterince yaklaşılmadıysa, $x_0 = x_1$ alınıp iterasyona devam edilir.



Şekil 1. Newton-Raphson yönteminin geometrik açıklaması (The geometrical description of Newton-Raphson method)

Özetle $[a, b]$ aralığında herhangi bir $f(x) = 0$ denklemi için temel Newton iterasyonu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5)$$

ile verilmektedir [12-14]. Bu iterasyona dayanan çok farklı iterasyon eşitlikleri geliştirilmiştir. Çalışmada tasarlanan simülasyonun içerdiği yöntemlere ait seçilen iterasyon eşitlikleri ve yakınsama dereceleri Tablo 1'de özetlenmektedir.

Tablo 1. Simülasyonun içerdiği yöntemler (Methods contained in the simulator)

| Yöntem | İterasyon eşitlikleri | Der. |
|---|---|------|
| Newton-Raphson [12] [15] [16] [17] | $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | 2 |
| Chebyshev [16] | $L(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$, $x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L(x_n)\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | 3 |
| Halley [16] [18] | $L(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$, $x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{2-L(x_n)}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | 3 |
| Super Halley [19] | $L(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$, $x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L(x_n)}{1-L(x_n)}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | 3 |
| Steffensen [16] [17] | $x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$ | 2 |
| İki adımlı Newton [16] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ | 4 |
| Ortak Jacobian'lı iki adımlı Newton [16] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$ | 3 |
| Newton-Secant [16] [20] [21] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $y_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]}$ | 3 |
| Steffensen-Newton [22] | $y_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$, $x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ | 4 |
| Aritmetik ortalama Newton [23] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$ | 3 |
| Orta nokta Newton [24] [25] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)}$ | 3 |
| Harmonik ortalama Newton [26] [27] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right)$ | 3 |
| Orta nokta harmonik ortalama Newton [28] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right) - f'(x_n)}\right)$ | 3 |
| Kontra harmonik ortalama Newton [29] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)[f'(x_n) + f'(y_n)]}{f'^2(x_n) + f'^2(y_n)}$ | 3 |
| Geometrik ortalama Newton [30] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\text{sign}(f'(x_0))\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}$ | 3 |
| Yamuklar Newton [31] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 2f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) + f'(y_n)}$ | 3 |
| Newton-Simpson [32] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{6f(x_n)}{f'(x_n) + 4f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) + f'(y_n)}$ | 3 |
| Açık Newton [33] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{3f(x_n)}{2f'\left(\frac{3x_n + y_n}{4}\right) - f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) + 2f'\left(\frac{x_n + 3y_n}{4}\right)}$ | 3 |

| | | |
|--|---|----------------|
| Steffensen-secant (SSM) [34] | $y_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f^3(x_n)}{[f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)][f(x_n) - f(y_n)]}$ | 3 |
| Potra-Pták [35] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$ | 3 |
| Kou-Li-Wang [36] | $y_n = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$ | 3 |
| Kou-Li-1 [37] | $x_{n+1} = x_n - \frac{2f\left(x_n - \frac{(\sqrt{5}-1)f(x_n)}{2f'(x_n)}\right)}{(3-\sqrt{5})f'(x_n)}$ | 3 |
| Kou-Li-2 [37] | $x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n + \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right) + f(x_n)}{4f'(x_n)}$ | 3 |
| Bisectrix Newton [38] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{[f'(x_n) + f'(y_n)]f(x_n)}{f'(x_n)f'(y_n) + \sqrt{[1 + f'(x_n)^2][1 + f'(y_n)^2]} - 1}$ | 3 |
| Traub-Ostrowski [16] [39] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{2f'(y_n) - f'(x_n)} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | 4 |
| Jarrat [40] | $y_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{[3f'(y_n) + f'(x_n)]f(x_n)}{[3f'(y_n) - f'(x_n)]f'(x_n)}$ | 4 |
| Newton-Steffensen-Potra-Pták [41] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2 + f(y_n)^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]}$ | 4 |
| Wu [42] | $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) + f'(x_n)}$ | 2 |
| Ostrowski [39] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)} \cdot \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$ | 4 |
| Wang [43] | $y_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 3f'(y_n)}$ | 3 |
| Harmonic-Simpson-Newton [44] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{3f(x_n)}{\frac{2f'(x_n)f'(y_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} + 2f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)}$ | 3 |
| McDougall-Wotherspoon [45] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left[\frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})\right]}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left[\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right]}$ | 1 + $\sqrt{2}$ |
| Maheshwari [46] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} \cdot \left[\frac{f^2(x_n)}{f(y_n) - f(x_n)} - \frac{f^2(y_n)}{f(x_n)} \right]$ | 4 |
| Dehghan-Hajarian [47] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(x_n)f'(y_n)} + \frac{1}{6f'\left(x_n + \frac{y_n}{2}\right) - 3f'(x_n)} \right]$ | 4 |
| King [48] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + 3f(y_n)}{f(x_n) + f(y_n)} \cdot \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$ | 4 |
| 3 adımlı (4. derece) Newton [16] [49] [50] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$ | 4 |
| 5. derece aritmetik ortalamalı Newton (FAN) [50] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(y_n) + f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}$ | 5 |

| | | |
|--|--|---|
| 5. derece orta noktalı Newton (FMN) [50] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right)}, x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right) - f'(x_n)}$ | 5 |
| 5. derece harmonik ortalamalı Newton (FHN) [50] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left[\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right], x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}$ | 5 |
| Singh-Singh [51] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left[\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right],$ $x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)[2f'(y_n)]}{2f'(x_n)f'(y_n) - f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}$ | 6 |
| 6. derece aritmetik ortalamalı Newton (SAN) [49] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(y_n) + f'(x_n)}, x_{n+1} = z_n - \frac{f'(y_n) + f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)} \cdot \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$ | 6 |
| 6. derece harmonik ortalamalı Newton (SHN) [49] | $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right), x_{n+1} = z_n - \frac{f'(y_n) + f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)} \cdot \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$ | 6 |

3. TASARLANAN SİMÜLATÖR (THE DESIGNED SIMULATOR)

MATLAB [52] kullanılarak tasarlanan simülatora ait ana ekran görüntüsü ve açıklamaları Şekil 2'de verilmektedir. Simülatora; kökü hesaplanmak istenen $f(x)$ fonksiyonu, kökün aranacağı aralık ve hesaplama hassasiyeti girilmektedir. Seçilen yönteme göre hesaplama gerçekleştirilmekte ve iterasyon adımlarıyla bu adımlardaki yaklaşık kök değerleri listelenmektedir. Bu sonuçlar aynı zamanda animasyonlu veya doğrudan grafiksel olarak çizdirilmektedir. Ayrıca geçen hesaplama süresi de kullanıcıya sunulmaktadır. İlgili menüler ile sonuçlar kaydedilebilmekte ve yazdırılabilmekte; programla ilgili ayarlar yapılabilmekte, sonuçların gösterim şekli (ondalıklı veya üstel) değiştirilebilmekte ve yardım konularına erişilebilmektedir (Şekil 3). İstenirse seçilen yöntemle ilgili konu anlatım penceresi açılmaktadır (Şekil 4). Ayrıca simülator, girilen fonksiyon için tüm yöntemlerle hesaplamalar yapıp karşılaştırma (iterasyon sayısı, hesaplanan kök, hesaplama süresi) tablosu oluşturabilmekte ve kullanıcıya ayrı bir pencerede sunmaktadır. Simülatorün, temel Newton-Raphson yöntemi için iterasyonları yürütme akış diyagramı Şekil 5'te verilmektedir. Şekil 5'te de görüldüğü gibi girilen fonksiyonun belirtilen aralıktaki kökünün kullanıcı tarafından tanımlanan tolerans içinde hesaplanabilmesi için öncelikle fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri bulunarak iterasyon başlangıç değeri ayarlanmaktadır. Daha sonra iterasyon başlatılmakta, bulunan yaklaşık değer fonksiyonda yerine yazılarak hesaplatılmakta ve mutlak değerinin toleranstan küçük olup olmadığı

sinanmaktadır. Eğer hesaplanan mutlak değer; toleranstan küçük değilse, atama yapılarak iterasyona devam edilmektedir.

Örnek simülasyon olarak

$$f(x) = x.e^{x^2} - \sin^2(x) + 3.\cos(x) + 5 \quad (6)$$

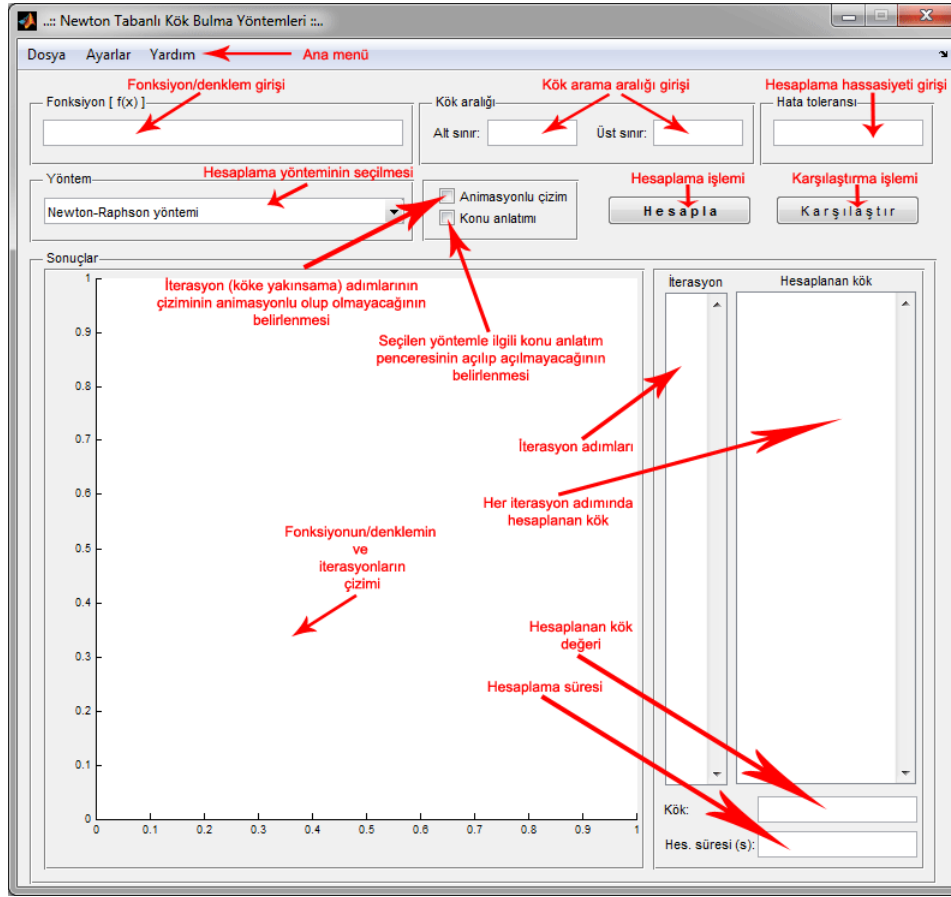
denkleminin [45] $[-2,2]$ aralığındaki kökünün 0.000000000001 ($1e-12$) hassasiyetle "Aritmetik ortalama Newton yöntemi"yle hesaplanmasına ait ekran Şekil 6'da verilmektedir. Şekil 7'de

$$E = M + e.\sin(E) \quad (7)$$

Kepler denkleminin simülatorle çözümü verilmektedir. Şekil 8'de ise

$$f(x) = x^2 + \cos(x) - x.e^x \quad (8)$$

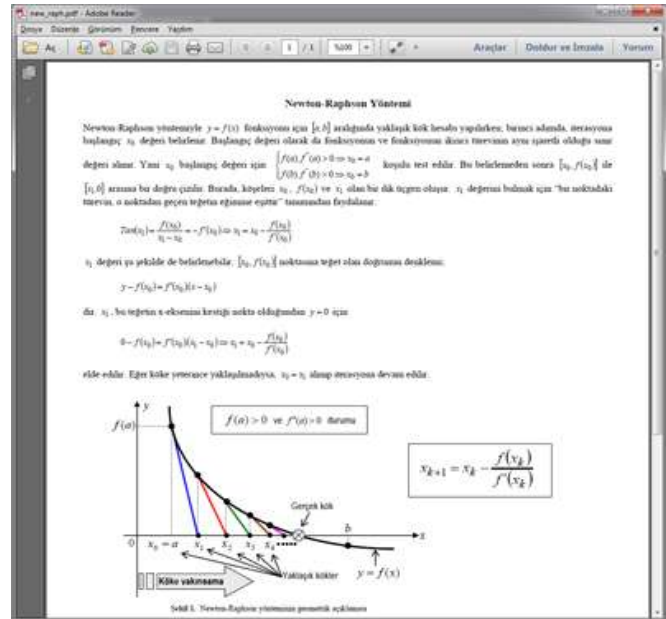
denkleminin [34] $[0,1]$ aralığındaki kökünün 0.000000000001 ($1e-12$) hassasiyetle hesaplanmasının karşılaştırma ekranı görülmektedir. Tablo 2'de yer alan test fonksiyonları için AMD FX(tm)-8350 Eight-Core 4.00 GHz işlemci, 16 GB RAM, 64 bit işletim sistemine sahip bilgisayarda gerçekleştirilen performans analizi sonuçları Tablo 3'te karşılaştırmalı olarak yer almaktadır. Böylece kullanıcı yöntemlerin etkinliğini açık bir şekilde gözlemleyebilmektedir.



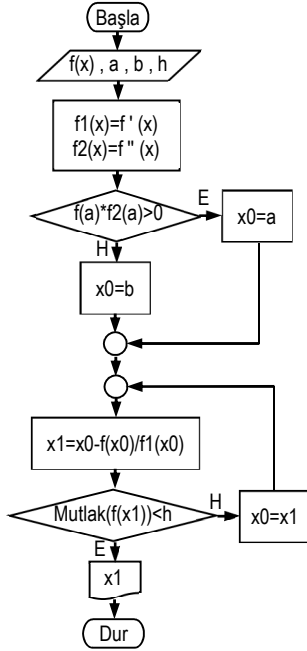
Şekil 2. Simülörün ana ekranı (The main screen of the simulator)



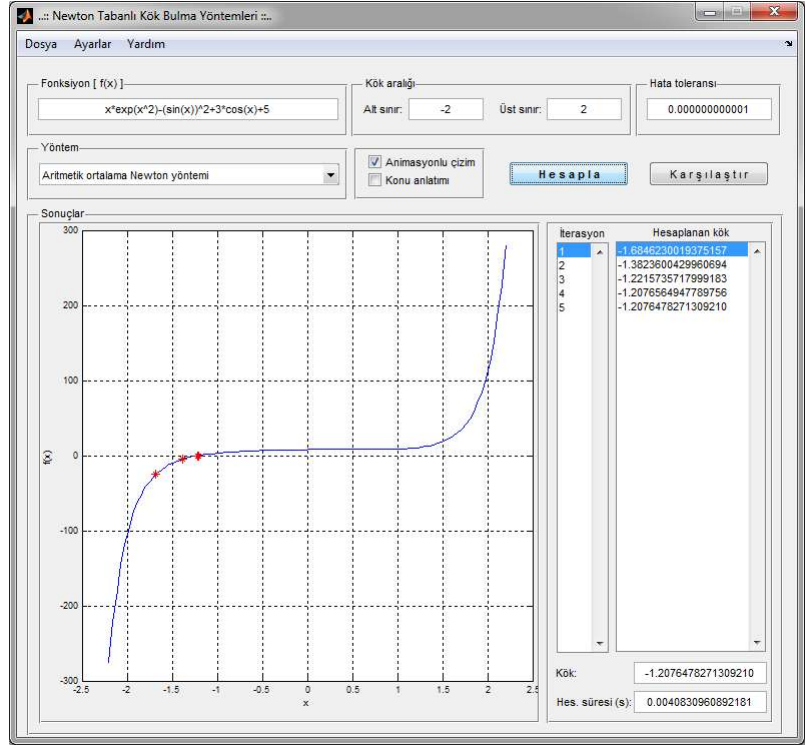
Şekil 3. Simülörün menü öğeleri (The menu items of simulator)



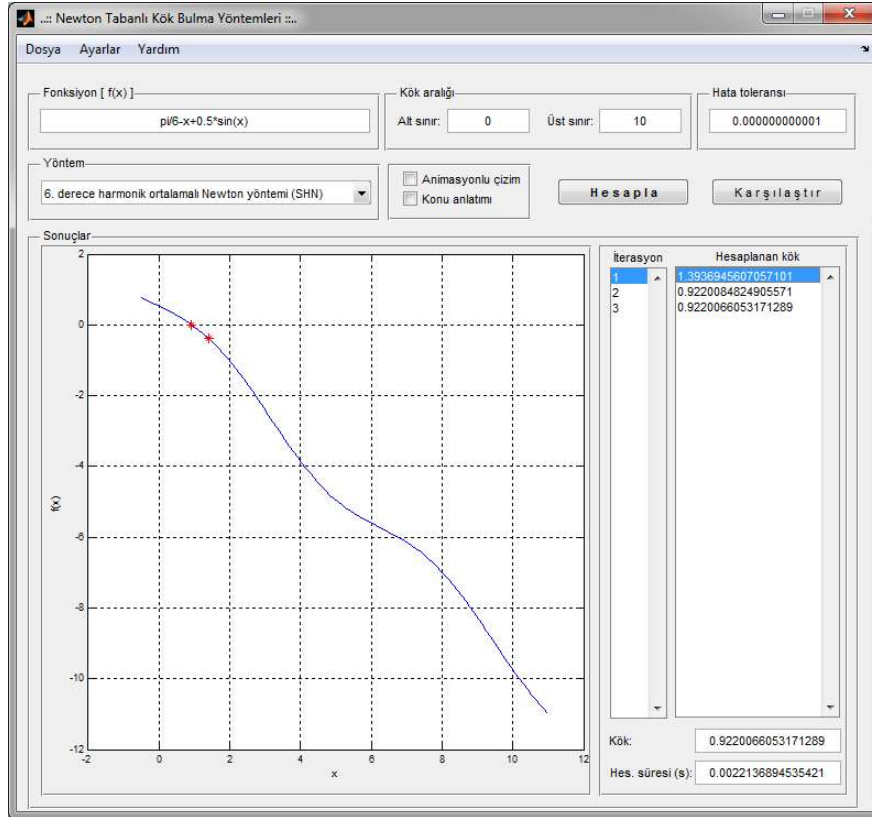
Şekil 4. Örnek konu anlatım ekranı (The sample subject description screen)



Şekil 5. Newton-Raphson yönteminin akış diyagramı (The flowchart of Newton-Raphson method)



Şekil 6. Örnek simülasyon ekran görüntüsü (The sample simulation screenshot)



Şekil 7. Kepler denkleminin çözümünün ekran görüntüsü (The screenshot of solution of the Kepler's equation)

| Yöntem | İterasyon sayısı | Hesaplanan kök | Hesaplama süresi (s) |
|---|------------------|-------------------|----------------------|
| Newton-Raphson yöntemi | 5 | 0.639154096332008 | 0.00326408981356286 |
| Chebyshev yöntemi | 3 | 0.639154096332010 | 0.00297919226748250 |
| Halley yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00250546733132563 |
| Super Halley yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00249068731655581 |
| Steffensen yöntemi | 6 | 0.639154096332008 | 0.00334359609991086 |
| İki adımlı Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00286936148807227 |
| Ortak Jacobian'lı iki adımlı Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332115 | 0.00289255082159044 |
| Newton-Secant yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00245220831258010 |
| Steffensen-Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00293816500510420 |
| Aritmetik ortalama Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332011 | 0.00245144382906352 |
| Orta nokta Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00234721924215219 |
| Harmonik ortalama Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00244481830520119 |
| Orta nokta harmonik ortalama Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00250291905291704 |
| Kontra harmonik ortalama Newton yöntemi | 4 | 0.639154096332008 | 0.00332728711809589 |
| Geometrik ortalama Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00248355213701176 |
| Yamuklar Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00287596701193461 |
| Newton-Simpson yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00296848951816642 |
| Açık Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00338538786581174 |
| Steffensen-secant yöntemi (SSM) | 4 | 0.639154096332008 | 0.00320700837721044 |
| Potra-Ptāk yöntemi | 3 | 0.639154096332115 | 0.00249119697223753 |
| Kou-Li-Wang yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00247692661314942 |
| Kou-Li-1 yöntemi | 3 | 0.639154096332037 | 0.00247769109667200 |
| Kou-Li-2 yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00295014191362457 |
| Bisectrix Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00348706417431448 |
| Traub-Ostrowski yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00263292110682944 |
| Jarrat yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00332754194593674 |
| Newton-Steffensen-Potra-Ptāk yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00284158525341864 |
| Wu yöntemi | 6 | 0.639154096332008 | 0.00339991305274070 |
| Traub-Ostrowski yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00278883589036083 |
| Wang yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00253579184438785 |
| Harmonic-Simpson-Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.0030926197270386 |
| McDougall-Wotherspoon yöntemi | 4 | 0.639154096332008 | 0.00290096014033879 |
| Maheshwari yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00279036485740599 |
| Dehghan-Hajarian yöntemi | 17 | 0.639154096332407 | 0.0137752285933146 |
| King yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.00280641901138010 |
| 3 adımlı (4. derece) Newton yöntemi | 3 | 0.639154096332008 | 0.0029580606021378 |
| 5. derece aritmetik ortalama Newton yöntemi (FAN) | 2 | 0.639154096332205 | 0.00215966595127997 |
| 5. derece orta noktalı Newton yöntemi (FMN) | 2 | 0.639154096332008 | 0.00226643681659989 |
| 5. derece harmonik ortalama Newton yöntemi (FHN) | 2 | 0.639154096332009 | 0.00222897912399362 |
| Singh-Singh yöntemi | 2 | 0.639154096332008 | 0.00228784435523205 |
| 6. derece aritmetik ortalama Newton yöntemi (SAN) | 2 | 0.639154096332008 | 0.00221547324842809 |
| 6. derece harmonik ortalama Newton yöntemi (SHN) | 2 | 0.639154096332008 | 0.00222031497740442 |

Şekil 8. Örnek karşılaştırma ekranı görüntüsü (The sample comparison screenshot)

Tablo 2. Örnek test fonksiyonları (The sample test functions) [27]

| Fonksiyon | Aralık | Hassasiyet |
|-------------------------------|--------|----------------|
| $f_1(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ | [0,1] | 0.000000000001 |
| $f_2(x) = \cos(x) - x$ | [0,1] | 0.000000000001 |
| $f_3(x) = (x-1)^3 - 1$ | [1,3] | 0.000000000001 |

Tablo 3. Karşılaştırmalı test sonuçları (The comparative test results)

| Yöntem | $f_1(x)$ | | | $f_2(x)$ | | | $f_3(x)$ | | |
|-------------------------------------|----------|---------------|------------------|----------|----------------|------------------|----------|-----|------------------|
| | İtr. | Kök | Süre (s) | İtr. | Kök | Süre (s) | İtr. | Kök | Süre (s) |
| Newton-Raphson | 4 | 0.25753028544 | 0.00259847287161 | 4 | 0.739085133215 | 0.00160846923267 | 6 | 2.0 | 0.0030986986485 |
| Chebyshev | 3 | 0.25753028544 | 0.00266931483084 | 3 | 0.739085133215 | 0.00170989045489 | 4 | 2.0 | 0.00261248836714 |
| Halley | 3 | 0.25753028544 | 0.00227305854808 | 3 | 0.739085133215 | 0.00148385873604 | 4 | 2.0 | 0.00213341324714 |
| Super Halley | 3 | 0.25753028544 | 0.00227484233842 | 3 | 0.739085133215 | 0.00148768114391 | 3 | 2.0 | 0.00161101750459 |
| Steffensen | 4 | 0.25753028544 | 0.00239563042718 | 4 | 0.739085133215 | 0.00147876219221 | 15 | 2.0 | 0.00610667881683 |
| İki adımlı Newton | 2 | 0.25753028544 | 0.00205212337306 | 2 | 0.739085133215 | 0.00124228255851 | 3 | 2.0 | 0.00209518916842 |
| Ortak Jacobian'lı iki adımlı Newton | 3 | 0.25753028544 | 0.00278220327667 | 3 | 0.739085133215 | 0.0018801150188 | 4 | 2.0 | 0.00270244236573 |
| Newton-Secant | 2 | 0.25753028544 | 0.00173562800123 | 3 | 0.739085133215 | 0.0015389014094 | 4 | 2.0 | 0.00222540586327 |
| Steffensen-Newton | 2 | 0.25753028544 | 0.00202944375301 | 2 | 0.739085133215 | 0.00125604322685 | 4 | 2.0 | 0.00275111435931 |
| Aritmetik ortalama Newton | 3 | 0.25753028544 | 0.00228579990765 | 2 | 0.739085133215 | 0.00101089946863 | 4 | 2.0 | 0.00220527451514 |
| Orta nokta Newton | 2 | 0.25753028544 | 0.0017216125057 | 3 | 0.739085133215 | 0.00162987471676 | 4 | 2.0 | 0.00217979179599 |
| Harmonik ortalama Newton | 3 | 0.25753028544 | 0.00228172267259 | 3 | 0.739085133215 | 0.00150144181225 | 4 | 2.0 | 0.00217724352408 |
| Orta nokta harmonik ortalama Newton | 2 | 0.25753028544 | 0.00182124993757 | 3 | 0.739085133215 | 0.00171320320838 | 3 | 2.0 | 0.00164618365701 |
| Kontra harmonik ortalama Newton | 3 | 0.25753028544 | 0.00251871196067 | 3 | 0.739085133215 | 0.00150755766485 | 4 | 2.0 | 0.00222515103608 |
| Geometrik ortalama Newton | 3 | 0.25753028544 | 0.00230261850229 | 2 | 0.739085133215 | 0.00107282247617 | 4 | 2.0 | 0.00217851766003 |
| Yamuklar Newton | 3 | 0.25753028544 | 0.00272486715859 | 3 | 0.739085133215 | 0.00186941227676 | 4 | 2.0 | 0.00270448098327 |
| Newton-Simpson | 2 | 0.25753028544 | 0.00194101871757 | 3 | 0.739085133215 | 0.0019820458954 | 4 | 2.0 | 0.00280335393356 |
| Açık Newton | 2 | 0.25753028544 | 0.00236275771948 | 3 | 0.739085133215 | 0.00231051814522 | 4 | 2.0 | 0.00323808912224 |
| Steffensen-secant | 3 | 0.25753028544 | 0.0025118316265 | 3 | 0.739085133215 | 0.00150016767629 | 5 | 2.0 | 0.00282730768956 |

| | | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---|---------------|------------------|----|----------------|------------------|----|-----|------------------|
| Potra-Pták | 3 | 0,25753028544 | 0,00240149145259 | 3 | 0,739085133215 | 0,00147876219221 | 4 | 2,0 | 0,00219278798276 |
| Kou-Li-Wang | 3 | 0,25753028544 | 0,00241448763935 | 3 | 0,739085133215 | 0,00170555839263 | 4 | 2,0 | 0,00217112767148 |
| Kou-Li-1 | 2 | 0,25753028544 | 0,00176085589318 | 3 | 0,739085133215 | 0,00152590522263 | 4 | 2,0 | 0,00224349859386 |
| Kou-Li-2 | 3 | 0,25753028544 | 0,00278221036649 | 3 | 0,739085133215 | 0,00183246700362 | 4 | 2,0 | 0,00299320781873 |
| Bisectrix Newton | 3 | 0,25753028544 | 0,0032572011616 | 3 | 0,739085133215 | 0,00187909571004 | 4 | 2,0 | 0,00279953152569 |
| Traub-Ostrowski | 2 | 0,25753028544 | 0,00209238606931 | 2 | 0,739085133215 | 0,0010029998257 | 3 | 2,0 | 0,00170097150318 |
| Jarrat | 2 | 0,25753028544 | 0,00239180801931 | 2 | 0,739085133215 | 0,00125400460931 | 3 | 2,0 | 0,00212118154195 |
| Newton-Steffensen-Potra-Pták | 2 | 0,25753028544 | 0,00204957510114 | 2 | 0,739085133215 | 0,00100452878885 | 4 | 2,0 | 0,00221878035629 |
| Wu | 5 | 0,25753028544 | 0,00284692938331 | 5 | 0,739085133215 | 0,0018503002374 | 8 | 2,0 | 0,0032572011616 |
| Ostrowski | 2 | 0,25753028544 | 0,00202460203638 | 2 | 0,739085133215 | 0,00100376430727 | 3 | 2,0 | 0,00172467043199 |
| Wang | 2 | 0,25753028544 | 0,0017723231168 | 3 | 0,739085133215 | 0,00164006780442 | 4 | 2,0 | 0,0021795369688 |
| Harmonic-Simpson-Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00204651717484 | 3 | 0,739085133215 | 0,00191935840629 | 4 | 2,0 | 0,00280666668705 |
| McDougall-Wotherspoon | 3 | 0,25753028544 | 0,00222591551765 | 3 | 0,739085133215 | 0,00137351856212 | 5 | 2,0 | 0,00262319110918 |
| Maheshwari | 2 | 0,25753028544 | 0,00211328189901 | 2 | 0,739085133215 | 0,00100835119672 | 4 | 2,0 | 0,00225547547186 |
| Dehghan-Hajarian | 6 | 0,25753028544 | 0,00493192546407 | 11 | 0,739085133215 | 0,00680821807499 | 24 | 2,0 | 0,0161845845858 |
| King | 2 | 0,25753028544 | 0,00205696508969 | 2 | 0,739085133215 | 0,00102287634663 | 4 | 2,0 | 0,00222540586327 |
| 3 adımlı (4. derece) Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00209722778595 | 2 | 0,739085133215 | 0,00124075359536 | 4 | 2,0 | 0,00275238849527 |
| 5. derece aritmetik ortalamalı Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00204830096518 | 2 | 0,739085133215 | 0,00129859936782 | 3 | 2,0 | 0,0020837219448 |
| 5. derece orta noktalı Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00217265663463 | 2 | 0,739085133215 | 0,00125069185582 | 3 | 2,0 | 0,00208040919131 |
| 5. derece harmonik ortalamalı Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00214335150761 | 2 | 0,739085133215 | 0,00127999698285 | 3 | 2,0 | 0,0021377453094 |
| Singh-Singh | 2 | 0,25753028544 | 0,00217087284429 | 2 | 0,739085133215 | 0,00125094668302 | 3 | 2,0 | 0,00209034745178 |
| 6. derece aritmetik ortalamalı Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00210844018237 | 2 | 0,739085133215 | 0,00125196599178 | 3 | 2,0 | 0,00215278011369 |
| 6. derece harmonik ortalamalı Newton | 2 | 0,25753028544 | 0,00205900370723 | 2 | 0,739085133215 | 0,00124992737425 | 3 | 2,0 | 0,00208142850008 |

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Gerçekleştirilen çalışmada Newton tabanlı kök bulma yöntemleri için değişik teknik (temel bilimler, mühendislik bilimleri vb.) alanlarda kullanılabilecek genel amaçlı simülasyon geliştirilmiştir. Eğitim amaçlı da kullanılabilen simülasyon; kullanıcının tanımladığı/girdiği denklemin kökü, belirtilen aralıkta ve hassasiyette, seçilen yöntemle bulunmakta ve sonuçlar hem sayısal hem de grafiksel olarak gösterilmektedir. 42 tane farklı yöntemi barındıran simülasyonda, konu anlatımları da yer almaktadır. Ayrıca yöntemler için karşılaştırmalı performans analizleri de sunan yazılım ile kullanıcılar, yöntemlerin etkinliğini ve verimliliğini rahatlıkla görebilmektedirler. Böylece öğrencilerin ya da uygulamalarında kullanacak olanların, yöntem tercihini kolaylaştırmaktadır. Simülasyona, diğer ve yeni geliştirilecek kök bulma yöntemleri de ilave edilerek genişletilmesi ve web sayfası şeklinde hazırlanıp çevrimiçi kullanıma sunulması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] "List of numerical analysis software," 11 Mart 2015. [Çevrimiçi]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_numerical_analysis_software.
- [2] "Comparison of numerical analysis software," 11 Mart 2015. [Çevrimiçi]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_numerical_analysis_software.
- [3] "Keisan online calculator," 11 Mart 2015. [Çevrimiçi]. Available: <http://keisan.casio.com/menu/system/000000000980>.
- [4] "Numerical analysis tools," 11 Mart 2015. [Çevrimiçi]. Available: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ay0w.rootstation.natools>.
- [5] "Practical Numerical Methods with Python," 11 Mart 2015. [Çevrimiçi]. Available: http://openedx.seas.gwu.edu/courses/GW/MAE6286/2014_fall/about.
- [6] "Mathematical Visualization Toolkit," 11 Mart 2015. [Çevrimiçi]. Available: <http://amath.colorado.edu/java/>.
- [7] A. B. Hassan, M. S. Abolarin ve O. H. Jimoh, "The Application of Visual Basic Programming Language to Simulate Numerical Iterations," *Leonardo Journal of Sciences*, no. 9, pp. 125-136, 2006.
- [8] P. Wlodkowski, "Teaching Numerical Methods in Engineering with Mathcad," *American Mathematical Society for Engineering Education*, no. 2006-1549, 2006.
- [9] S. Yüncü ve C. Aslan, "Nümerik Yöntemlerde Hata Analizi ve Bir Nümerik Çözüm Paketinin Hazırlanması," *Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.*, cilt 17, no. 2, pp. 87-102, 2002.
- [10] J. Carroll, "The Role of Computer Software in Numerical Analysis Teaching," *ACM SIGNUM Newsletter*, cilt 27, no. 2, pp. 2-31, 1992.
- [11] C. Balsa, L. Alves, M. J. Pereira, P. J. Rodrigues ve R. P. Lopes, "Graphical Simulation of Numerical Algorithms - An Approach based on

- Code Instrumentation and Java Technologies,” %1 içinde *CSEDEU*, Porto, 2012.
- [12] R. L. Burden ve J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Canada: Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.
- [13] A. Gilat ve V. Subramaniam, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, USA: Wiley, 2014.
- [14] F. Vatanserver, *İleri Programlama Uygulamaları*, Ankara: Seçkin Yayıncılık, 2006.
- [15] J. M. Ortega ve W. G. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, New York: Academic Press, 1970.
- [16] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, New Jersey: Prentice-Hall, 1964.
- [17] S. D. Conte ve C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill, 1980.
- [18] I. K. Argyros, “A note on the Halley method in Banach spaces,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 58, pp. 215-224, 1993.
- [19] J. M. Gutiérrez ve M. A. Hernández, “An acceleration of Newton’s method: Super-Halley method,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 117, pp. 223-239, 2001.
- [20] A. B. Kasturiarachi, “Leap-frogging Newton’s method,” *Int. J. Math. Education. Sci. Technol.*, cilt 33, no. 4, pp. 521-527, 2002.
- [21] J. R. Sharma, “A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 169, pp. 242-246, 2005.
- [22] H. Ren, Q. Wu ve W. Bi, “A class of two-step Steffensen type methods with fourth-order convergence,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 209, pp. 206-210, 2009.
- [23] S. Weerakoon ve T. G. I. Fernando, “A variant of Newton’s method with accelerated third-order convergence,” *Appl. Math. Lett.*, cilt 13, pp. 87-93, 2000.
- [24] M. Frontini ve E. Sormani, “Some variant of Newton’s method with third-order convergence,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 140, pp. 419-426, 2003.
- [25] H. H. H. Homeier, “A modified Newton method for root finding with cubic convergence,” *J. Comput. Appl. Math.*, cilt 157, pp. 227-230, 2003.
- [26] A. Y. Özban, “Some new variants of Newton’s method,” *Appl. Math. Lett.*, cilt 17, pp. 677-682, 2004.
- [27] H. H. H. Homeier, “On Newton-type methods with cubic convergence,” *J. Comput. Appl. Math.*, cilt 176, pp. 425-432, 2005.
- [28] K. Jisheng, L. Yitian ve W. Xiuhua, “Third-order modification of Newton’s method,” *J. Comput. Appl. Math.*, cilt 205, pp. 1-5, 2007.
- [29] O. Y. Ababneh, “New Newton’s method with third-order convergence for solving nonlinear equations,” *Int. Scholarly and Scientific Research & Innovation*, cilt 6, pp. 1269-1271, 2012.
- [30] T. Lukić ve N. M. Ralević, “Geometric mean Newton’s method for simple and multiple roots,” *Appl. Math. Lett.*, cilt 21, pp. 30-36, 2008.
- [31] G. Nedzhibov, “On a few iterative methods for solving nonlinear equations,” %1 içinde *Application of Mathematics in Engineering and Economics’28, in: Proceedings of the XXVIII Summer School Sozopol’ 2002*, Sofia, 2002.
- [32] V. I. Hasanov, I. G. Ivanov ve G. Nedzhibov, “A new modification of Newton’s method,” *Appl. Math. Eng.*, cilt 27, pp. 278-286, 2002.
- [33] A. Cordero ve J. R. Torregrosa, “Variants of Newton’s method using fifth-order quadrature formulas,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 190, pp. 686-698, 2007.
- [34] P. Jain, “Steffensen type methods for solving nonlinear equations,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 194, pp. 527-533, 2007.
- [35] V. Pták ve F. A. Potra, *Nondiscrete Induction and Iterative Processes*, Pitman, Boston: Chapman & Hall / CRC Research Notes in Mathematics Series, vol. 103, 1984.
- [36] J. Kou, Y. Li ve X. Wang, “A modification of Newton method with third-order convergence,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 181, pp. 1106-1111, 2006.
- [37] J. Kou ve Y. Li, “Modified Chebyshev’s method free from second derivative for non-linear equations,” *Applied Mathematics and Computation*, cilt 187, p. 1027-1032, 2007.
- [38] G. Ardelean, “A new third-order newton-type iterative method for solving nonlinear equations,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 219, p. 9856-9864, 2013.
- [39] A. M. Ostrowski, *Solutions of Equations and System of Equations*, New York: Academic Press, 1966.
- [40] I. K. Argyros, D. Chen ve Q. Qian, “The Jarratt method in Banach space setting,” *J. Comput. Appl. Math.*, cilt 51, pp. 103-106, 1994.
- [41] K. Jisheng, L. Yitian ve W. Xiuhua, “A composite fourth-order iterative method for solving nonlinear equations,” *Appl. Math. Comput.*, cilt 184, pp. 471-475, 2007.

- [42] X. Y. Wu, "A new continuation Newton-like method and its deformation," *Appl. Math. Comput.*, cilt 112, pp. 75-78, 2000.
- [43] P. Wang, "A third-order family of Newton-like iteration methods for solving nonlinear equations," *J. Numer. Math. Stoch.*, cilt 3, pp. 13-19, 2011.
- [44] J. Jayakumarand ve M. Kalyanasundaram, "Modified Newton's method using harmonic mean for solving nonlinear equations," *IOSR J. Math.*, cilt 7, pp. 93-97, 2013.
- [45] T. J. McDougall ve S. J. Wotherspoon, "A simple modification of Newton's method to achieve convergence of order $1+\sqrt{2}$," *Appl. Math. Lett.*, cilt 29, pp. 20-25, 2014.
- [46] A. K. Maheshwari, "A fourth order iterative method for solving nonlinear equations," *Appl. Math. Comput.*, cilt 211, pp. 383-391, 2009.
- [47] M. Dehghan ve M. Hajarjan, "Fourth-order variants of Newton's method without second derivatives for solving non-linear equations," *Engineering Computations: Int.J. for Computer-Aided Engineering and Software*, cilt 29, no. 4, pp. 356-365, 2012.
- [48] R. F. King, "A family of fourth order methods for nonlinear equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, cilt 10, pp. 876-879, 1973.
- [49] J. Kou, "The improvements of modified Newton's method," *Appl. Math. Comput.*, cilt 189, pp. 602-609, 2007.
- [50] J. Kou, Y. Li ve X. Wang, "Some modifications of Newton's method with fifth-order convergence," *J. Comput. Appl. Math.*, cilt 209, pp. 146-152, 2007.
- [51] M. K. Singh ve S. R. Singh, "Six-order modification of Newton's method for solving nonlinear equations," *International Journal of Computational Cognition*, cilt 9, pp. 66-71, 2011.
- [52] Mathworks, *MATLAB*, www.mathworks.com, 2007.