

AKÜ FEMÜBİD 22 (2022) 021302 (307-314)

AKU J. Sci. Eng. 22 (2022) 021302 (307-314)

DOI: 10.35414/akufemubid.1068310

Araştırma Makalesi / Research Article

Odd Genelleştirilmiş Yarı Lojistik Weibull-Rayleigh Dağılımı: Özellikleri ve Bir Uygulama

Ceren ÜNAL^{1*}, Gamze ÖZEL¹¹Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara.Sorumlu Yazar e-posta: cerenunal@hacettepe.edu.tr ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9357-1771>gamzeozl@hacettepe.edu.tr ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-3886-3074>

Geliş Tarihi: 04.02.2022

Kabul Tarihi: 08.04.2022

Öz

Anahtar kelimeler

Hazard fonksiyonu; En çok olabilirlik tahmin yöntemi; Weibull dağılımı; Rayleigh dağılımı

Bu çalışmada yeni bir dağılım olan üç parametrelili Odd genelleştirilmiş yarı lojistik Weibull-Rayleigh (OGYLW-R) dağılımı tanıtılmıştır. Dağılımın elde edilmesinde, Chipepa vd. (2020) tarafından önerilen yeni dağılım ailesi olarak Odd genelleştirilmiş yarı lojistik Weibull-genelleştirilmiş (OGYLW-G) dağılım ailesi kullanılmıştır. Elde edilen dağılımın olasılık yoğunluk, dağılım, hazard, yaşam ve kantil fonksiyonları, momentleri, çarpıklık, basıklık katsayıları ve sıralı istatistiklerini içeren temel istatistiksel özellikleri elde edilmiştir. Dağılımın parametre tahmini en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile bulunmuştur. Önerilen dağılımın literatürdeki dağılımlardan üstünlüğünü göstermek için gerçek veri setine uygulanmış ve OGYLW-R dağılımının kesilmiş Weibull-Rayleigh dağılımının uyumu ile karşılaştırılmıştır. OGYLW-R dağılımının veriye daha uyumlu olduğu görülmüştür. Çarpıklık katsayısına göre dağılımın sola çarpık, basıklık katsayısına göre ise normal dağılıma göre daha basık olduğu görülmüştür.

Odd Generalized Half-Logistic Weibull Rayleigh Distribution: Properties and an Application

Abstract

Keywords

Hazard function; Maximum likelihood estimation method; Weibull distribution; Rayleigh distribution

In this study, a new three-parameter Odd generalized semi-logistic Weibull-Rayleigh (OGYLW-R) distribution is introduced. In obtaining the distribution, Chipepa et al. (2020), the Odd generalized semi-logistic Weibull-generalized (OGYLW-G) distribution family was used as the new distribution family. Basic statistical properties of the obtained distribution including probability density, distribution, hazard, survival and quantile functions, moments, skewness, kurtosis coefficients, and ordinal statistics are obtained. The parameter estimation of the distribution was found using the maximum likelihood estimation method. To show the superiority of the proposed distribution over the distributions in the literature, it was applied to the real data set and the OGYLW-R distribution was compared with the fit of the truncated Weibull-Rayleigh distribution. It was seen that the OGYLW-R distribution was more compatible with the data. According to the skewness coefficient, it was observed that the distribution was skewed to the left, and according to the kurtosis coefficient, it was more flattened than the normal distribution.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Birçok istatistiksel dağılım farklı bilimsel alanlarda gerçek yaşam verilerinin modellenmesi ve analiz edilmesi için kullanılmaktadır. Ancak kullanılan istatistiksel dağılımların çoğu veri setine tam olarak uyum sağlayamamaktadır. Bu durum araştırmacıların, gerçek yaşam verilerini daha iyi

modellemek için yeni dağılımlar önermelerine devam etmelerine neden olmaktadır.

Yarı lojistik dağılım Balakrishnan (1985) tarafından lojistik dağılımın dönüştürülmesi ile elde edilmiştir. Bu dağılım fizikçiler, istatistikçiler ve hidrologlar tarafından birçok bilim ve araştırma alanında

uygulanmaktadır. Yarı lojistik olasılık yoğunluk fonksiyonu tek modlu ve ters J şeklindedir. Bu durum, gerçek verilerin genel olarak monoton olmayan hazard (tehlike) fonksiyonları olduğu için bir engel teşkil etmektedir. Temel olarak, verilerin yüksek oranda çarpık veya kalın kuyruklu olabileceği ve hazard fonksiyonunun monoton olmadığı (tek modlu, kuvet, ters kuvet) ve ardından da verilerin analizinde zorluklarla karşılaşılmaktadır. Bu nedenle, klasik dağılımlara ekstra şekil parametreleri eklemek veriyi daha iyi modelleyebilmek için esneklik sağlanmaktadır. Chipepa vd. (2020) çalışmalarında, Cordeiro vd. (2016) tarafından geliştirilen birinci tip yarı lojistik dağılım ailesinin özel bir bölümü olan ($\lambda=1$) yarı lojistik-G ailesini ve Bourguignon vd. (2014) çalışmasından yola çıkarak Odd genelleştirilmiş yarı lojistik Weibull dağılım ailesini (OGYLW-G) geliştirmişlerdir.

Olasılık dağılımları arasında Rayleigh dağılımı en yaygın olarak kullanılan dağılımlardan biridir. Rayleigh tarafından 1880 yılında önerilen Rayleigh dağılımı, Weibull dağılımının özel bir hali olarak ortaya çıkmıştır. Yaşam ve güvenilirlik analizleri, bilgi kuramı, fizik bilimleri, teknoloji, görüntü işleme, uygulamalı istatistik ve klinik araştırmalar gibi gerçek yaşam verilerini modelleme ve analiz etmede önemli bir rol oynamaktadır.

Bu çalışmada odd genelleştirilmiş yarı lojistik Weibull-Rayleigh dağılımı (OGYLW-R) tanıtılmıştır. Üç parametrelili olan bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım, hazard, yaşam, kantil fonksiyonları, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları verilmiştir. Dağılımın parametre tahmini en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile gerçek bir veri seti üzerinde uygulaması yapılmıştır.

2. Odd Genelleştirilmiş Yarı Lojistik Weibull-G Dağılım Ailesi

Chipepa vd. (2020) tarafından geliştirilen OGYLW-G dağılım ailesinin kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırası ile (1) ve (2) eşitlikleri ile verilmiştir:

$$F(x; \alpha, \beta, \xi) = \frac{1 - \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}}{1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}}, \quad (1)$$

$$f(x; \alpha, \beta, \xi) = \frac{2\alpha\beta g(x; \xi)G(x; \xi)^{\beta-1} \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}}{\bar{G}(x; \xi)^{\beta+1} \left(1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}\right)^2}. \quad (2)$$

Burada, $G(x; \xi)$ temel dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu; $g(x; \xi)$ ise kümülatif dağılım fonksiyonunun türevidir. $\alpha, \beta > 0$ şekil parametresi ve ξ temel dağılımın parametre vektörüdür. X raslantı değişkeni (2)'de verilen fonksiyonun yoğunluğuna sahip ise, $X \sim \text{OGYLW-G}(\alpha, \beta, \xi)$ şeklinde yazılabilir.

Momentlerin ve diğer bazı istatistiksel özelliklerin incelenebilmesi için olasılık yoğunluk fonksiyonu genişletilirse, olasılık yoğunluk fonksiyonunun aşağıdaki doğrusal gösterimi elde edilir:

$$f(x; \alpha, \beta, \xi) = \sum_{p,q=0}^{\infty} v_{p,q} g_{\beta(1+q)+p}(x; \xi). \quad (3)$$

Burada,

$$v_{p,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q+n-1} 2\beta(\alpha n)^{q+1} \Gamma(p+\beta(1+q)+1)}{p!q!(\beta(1+q)+p) \Gamma(\beta(1+q)+1)}, \quad (4)$$

$g_{\beta(1+q)+p}(x; \xi) = (\beta(1+q) + p)g(x; \xi)[G(x; \xi)]^{\beta(1+q)+p-1}$, $(\beta(1+q) + p) > 0$ kuvvet (power) parametresi ile bir üstel aile (üstel-G)'dendir. Bu nedenle OGYLW-G dağılımı Üstel-G yoğunluk fonksiyonunun sonsuz doğrusal bir kombinasyonudur. Böylece OGYLW-G dağılımının matematiksel ve istatistiksel özellikleri doğrudan Üstel-G dağılım ailesinden elde edilebilir.

OGYLW-G (α, β, ξ) dağılım ailesinin yaşam (survival) fonksiyonu, hazard fonksiyonu ve kümülatif hazard fonksiyonu sırası ile (5), (6) ve (7) eşitlikleri ile verilmiştir:

$$S(x; \alpha, \beta, \xi) = 1 - \frac{\left[1 - \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}\right]}{\left[1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}\right]}, \quad (5)$$

$$h(x; \alpha, \beta, \xi) = \frac{\alpha\beta g(x; \xi)G(x; \xi)^{\beta-1}}{\bar{G}(x; \xi)^{\beta+1} \left(1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}\right)}, \quad (6)$$

$$H(x; \alpha, \beta, \xi) = -\log \left(1 - \frac{\left[1 - \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}\right]}{\left[1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{G(x; \xi)}{\bar{G}(x; \xi)}\right]^\beta\right\}\right]} \right). \quad (7)$$

3. Odd Genelleştirilmiş Yarı Lojistik Weibull – Rayleigh Dağılımı

Rayleigh dağılımına sahip X rastlantı değişkeninin $\sigma > 0$ ölçek parametresi ile olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (8) ile verilmiştir:

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0, \sigma > 0. \quad (8)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonuna karşılık gelen kümülatif dağılım fonksiyonu (9) ile verilmiştir:

$$F(x; \sigma) = 1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0, \sigma > 0. \quad (9)$$

Chipepa vd. (2020) tarafından yapılan çalışmadan kullanılarak OGYLW-R dağılımı elde edilmiştir. Bu dağılıma ilişkin kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile (10) ve (11) ile verilmiştir:

$$F(x; \alpha, \beta, \xi) = \frac{1 - \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right]^\beta\right\}}{1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right]^\beta\right\}}, \quad (10)$$

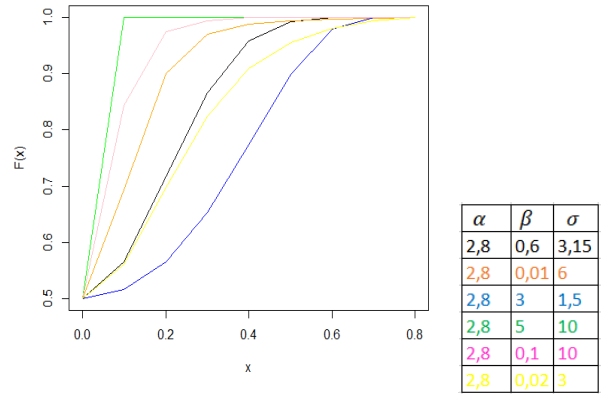
$$f(x; \alpha, \beta, \xi) = \frac{2\alpha\beta \left(\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right]^\beta\right\}}{\left(\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^{\beta+1} \left(1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right]^\beta\right\}\right)^2}, \quad (11)$$

$\alpha, \beta, \xi > 0$.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu genişletilirse doğrusal olasılık yoğunluk fonksiyonu, aşağıdaki gibi yazılabilir:

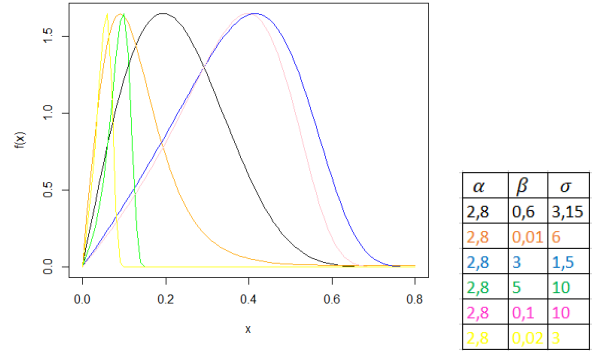
$$f(x; \alpha, \beta, \xi) = \sum_{p,q=0}^{\infty} v_{p,q} (\beta(1+q) + p) \left(\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^{(\beta(1+q)+p-1)} \quad (12)$$

Şekil 1’de farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği verilmiştir:



Şekil 1. Farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının dağılım fonksiyonu

Şekil 2’de farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği verilmiştir:



Şekil 2. Farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 2 incelendiğinde, olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı parametre değerleri için oldukça esnek olduğu görülmektedir.

4. Odd Genelleştirilmiş Yarı Lojistik Weibull – Rayleigh Dağılımının Temel Özellikleri

Bu bölümde OGYLW-R dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu, sıralı istatistikleri, momentleri, moment çıkaran fonksiyonu ve kantil fonksiyonu verilmiştir.

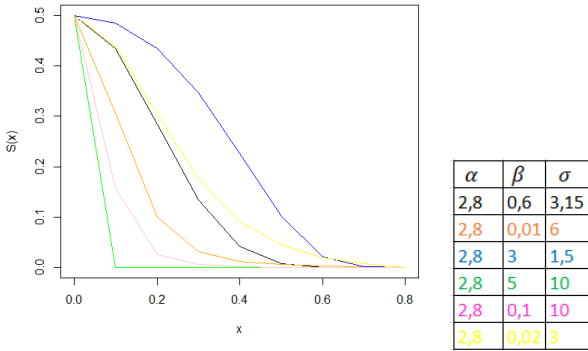
4.1 Yaşam ve hazard fonksiyonları

Yaşam sürelerinin olasılık dağılımını gösteren fonksiyonlara yaşam fonksiyonu adı verilmektedir. Hazard fonksiyonu ise belirli bir zamandaki ölüm olasılığı veya taşınan ölüm riski olarak ifade edilebilir. OGYLW-R dağılımına ait yaşam ve hazard fonksiyonları sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$(x; \alpha, \beta, \sigma) = 1 - \frac{\left[1 - \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)^\beta\right]}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right\} \right]}{\left[1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)^\beta\right]}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right\} \right]} \quad (13)$$

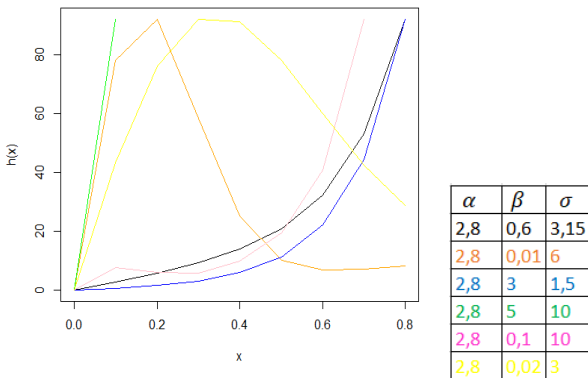
$$(x; \alpha, \beta, \sigma) = \frac{\alpha \beta \left(\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) G\left(1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)^{\beta-1}\right)}{\left(\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^{\beta+1} \left(1 + \exp\left\{-\alpha \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)^\beta\right]}{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right\}\right)} \quad (14)$$

Farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının yaşam fonksiyonu Şekil 3'te gösterilmiştir:



Şekil 3. Farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının yaşam fonksiyonu

OGYLW-R dağılımının hazard fonksiyonu ise farklı parametre değerleri için Şekil 4'teki gibi elde edilmiştir. Şekil 4 incelendiğinde hazard fonksiyonunun artan, azalan, tek tepeli ve ters-J biçiminde olduğu görülmektedir.



Şekil 4. Farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının hazard fonksiyonu

4.2 Sıralı istatistiklerin dağılımı

Rasgele örneklemin sıralı istatistikleri önemli bilgiler sağlamaktadır. Örnekleme ait en küçük değer, en büyük değer veya orta değer pek çok araştırma için kullanılmaktadır. X_1, X_2, \dots, X_n , n büyüklüğünde rasgele örneklemin $f(x)$ dağılımına sahip gözlemleri

olmak üzere ; $X_{(1)}, \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ gözlemlerinin en küçük değeri ve $X_{(2)}$ ikinci en küçük değeri ve $X_{(i)}$ i. küçük değeri olacak şekilde sıralandığında $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ raslantı değişkenlerine $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ rasgele örnekleminin sıralı istatistikleri denir. $X_{(i)}$ Sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (15) ile aşağıda verilmiştir:

$$f_{i,n}(x) = \frac{f(x)}{B(i,n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-j} \binom{n-j}{j} F(x)^{j+i-1} \quad (15)$$

Eşitlik (15)'de yer alan $B(\dots)$, beta fonksiyonudur.

OGYLW-G $(x; \alpha, \beta, \xi)$ dağılım ailesine ait sıralı istatistik fonksiyonu kullanılarak OGYLW-R $(x; \alpha, \beta, \sigma)$ dağılımının i. dereceden sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (16) ile aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{i,n}(x; \alpha, \beta, \sigma) &= \frac{1}{B(i,n-i+1)} \sum_{d,m=0}^{\infty} \sum_{w,z=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^{j+m+z} 2\beta \alpha^{m+1} (1+w+z)^m}{d! m! (\beta(m+1)+1)} \\ &\times \binom{n-j}{j} \binom{-j+i+1}{w} \binom{j+i-1}{z} \frac{\Gamma(d+\beta(m+1)+1)}{\Gamma(\beta(m+1)+1)} \\ &\times (\beta(m+1)+d) \left(\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right)^{\beta(m+1)+d-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

4.3 Momentler

Momentler dağılım hakkında bilgi elde etmek için kullanılan önemli değerlerdir. Dağılımın momentleri varyansın, çarpıklık ve basıklık katsayılarının hesaplanmasında kullanılmaktadır. K. dereceden merkezsiz olmayan momentler Eşitlik (3) kullanılarak hesaplanmış ve Eşitlik (17) ile verilmiştir.

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{p,q=0}^{\infty} v_{p,q} E(Y_{\beta(1+q)+p}^k) \quad (17)$$

Burada, $Y_{\beta(1+q)+p}^k$ ve $(\beta(1+q)+p) > 0$ güç parametresi ile Üstel-G ailesinden olup $v_{p,q}$ (4) denklemi ile tanımlanmıştır. Buna göre X 'in n. merkezsiz momenti Eşitlik (18) ile verilmiştir:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\mu'_1)^{n-k} E(X^k), \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p,q=0}^{\infty} (-\mu'_1)^{n-k} E\left(Y_{\beta((1+q)+p)}^k\right). \end{aligned} \quad (18)$$

4.4 Kantil Fonksiyonu

Dağılımın kantil fonksiyonu kümülatif yoğunluk fonksiyonunun kapalı bir formudur. Dağılımın çarpıklık, basıklık katsayıları ve medyan değerleri gibi önemli göstergelerinin hesaplanmasında kullanılır. OGYLW-G dağılım ailesinin kantil fonksiyonu Eşitlik (19) ile verilmiştir.

$$G(x; \xi) = \frac{\left[\frac{[\ln(1+u)-\ln(1-u)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]}{1 + \left[\frac{[\ln(1+u)-\ln(1-u)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]}, \quad (19)$$

$$x(u) = G^{-1} \left[\frac{\left[\frac{[\ln(1+u)-\ln(1-u)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]}{1 + \left[\frac{[\ln(1+u)-\ln(1-u)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]} \right]. \quad (20)$$

Buradan OGYLW-R dağılımının kantil fonksiyonu Eşitlik (21) ile aşağıda verilmiştir:

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \sigma \sqrt{-2 \ln \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{[\ln(1+u)-\ln(1-u)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]} \right]}, \quad (21)$$

Dağılımın medyan değeri u=0.5 verilerek aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$Q(0.5) = \sigma \sqrt{-2 \ln \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{[\ln(1+0.5)-\ln(1-0.5)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]} \right]}.$$

Buradan OGYLW-R dağılımının x rastlantı değişkeni ters dönüşüm yöntemi ile Eşitlik (22) gibi elde edilir:

$$X = \sigma \sqrt{-2 \ln \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{[\ln(1+u)-\ln(1-u)]^{1/\beta}}{\alpha} \right]} \right]}. \quad (22)$$

4.5 Çarpıklık ve basıklık katsayıları

Bu bölümde kantil fonksiyonu ile hesaplanan çarpıklık ve basıklık katsayıları verilmiştir. Bowley tarafından geliştirilen çarpıklık katsayısı aşağıda yer alan Eşitlik (23)'de ki gibidir:

$$S_k = \frac{Q(0.75) - 2Q(0.5) + Q(0.25)}{Q(0.75) - Q(0.25)}. \quad (23)$$

Morr tarafından geliştirilen basıklık katsayısı ise aşağıda Eşitlik (24)'de verilmiştir:

$$K_u = \frac{Q(0.875) - Q(0.625) - Q(0.375) + Q(0.125)}{Q(0.75) - Q(0.25)}. \quad (24)$$

Çizelge 1. Çeşitli parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları

α	β	σ	1.Çeyreklik	Medyan	3.Çeyreklik	Çarpıklık	Basıklık
0,1			3,8311	4,6443	5,1686	-0,21596	-0,6717
0,2	2	3	2,9051	3,9155	4,5251	-0,24746	-0,9084
0,01			5,9499	6,5033	6,8875	-0,18045	-0,5148
0,02			5,4002	6,0045	6,4187	-0,18671	-0,5387
0,03	5	10	10,6486	12,001	1.064.863	-0,19152	-0,5579

Çizelge 1’de farklı parametre değerleri için OGYLW-R dağılımının 1. çeyreklik, medyan, 3. çeyreklik, çarpıklık ve basıklık katsayıları hesaplanmıştır. Çarpıklık ve basıklık katsayılarının tüm parametre değerleri için negatif olduğu görülmektedir. Çarpıklık katsayısı negatif olduğu için dağılımın genel olarak sola çarpık bir dağılım olduğu söylenebilir. Basıklık değerleri de farklı parametreler için negatif değer almaktadır. Bu durum da dağılımın normal dağılıma göre daha basık olduğunu göstermektedir.

5. Parametre Tahmini

Bu bölümde OGYLW-R dağılımının parametrelerinin tahmin edilmesinde en çok olabilirlik tahminleri verilmiştir.

$X_i \sim OGYLW - R(\alpha, \beta, \sigma)$ ve $\Delta = (\alpha, \beta, \sigma)^T$ parametre vektörü olmak üzere, n büyüklükte rasgele örnekleme dayalı log olabilirlik $l = l(\Delta)$ fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$l = n \log(2\alpha) + n \log + \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{x}{\sigma^2} \exp \left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} \right) \right] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right] - \alpha \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1 - \exp(\frac{x^2}{2\sigma^2}))^\beta}{\exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})} \right] - \alpha \sum_{i=1}^n - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right] 2 \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})} \right]^\beta \right\} \right).$$

$U = \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}, \frac{\partial l}{\partial \beta}, \frac{\partial l}{\partial \sigma} \right)$ skor vektörünün elementleri;

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right]^\beta + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)^\beta \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})} \right]^\beta \right\}}{\left(1 + \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\exp(\frac{x^2}{2\sigma^2})} \right]^\beta \right\} \right) \left[\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right]^\beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \log \left[\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \alpha \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right]^\beta \log \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right] \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right] \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right]^\beta \right\}}{\left(1 + \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right]^\beta \right\} \right) \left[\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right]^\beta} \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(\frac{x}{\sigma^2} \exp \left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} \right) \right)} \frac{\partial \left(\frac{x}{\sigma^2} \exp \left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} \right) \right)}{\partial \sigma} \\ &\quad + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \frac{\partial \left(1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)}{\partial \sigma} - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \frac{\partial \left(\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)}{\partial \sigma} \\ &\quad - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\beta \left(\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)^\beta \left(1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)^{\beta-1} + \beta \left(1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)' \left(1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)^\beta \left(\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)}{\left(\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \right)^{2\beta}} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1 + \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right]^\beta \right\} \right)} \frac{\partial \left(1 + \exp \left\{ -\alpha \left[\frac{1 - \exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\exp \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)} \right]^\beta \right\} \right)}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

Bu denklemlerin analitik olarak çözümü mümkün olmadığı için RStudio, MATLAB, vb. istatistiksel yazılımlar yardımıyla Newton-Raphson algoritmaları, parçacık sürü optimizasyonu (PSO) gibi iteratif algoritmalar kullanılarak sayısal çözümleri yapılabilmektedir. Newton-Raphson yöntemi, önerilen fonksiyonun köklerini hesaplamak için iteratif bir prosedürdür. Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) ise, kuş ve balık sürülerinin sosyal davranışları gözlemlenerek geliştirilen popülasyon temelli bir optimizasyon algoritmasıdır. Bu çalışmada açık kodlu R yazılımı ile parametre tahmini yapılmıştır. R paket programında parametre tahmini için "nlm, adequacy, optimize" paketleri bulunmaktadır. "Adequacy Model" paketi ve paketin yapısında yer alan PSO algoritması parametre tahmininde kullanılmıştır (Ben-Israel 1966, R Core Team 2016, MArinho et al. 2019) Ayrıca genelleştirilmiş dağılımlar için R yazılımında newdistns paketi de mevcuttur (Nadarajah and Rocha, 2016).

6. Uygulama

Bu bölümde OGYLW-R dağılımının gerçek veriye uygunluğu incelenmiştir. Çalışmada daha önce kesilmiş Weibull-Rayleigh dağılımında kullanılan 63 uçağın ön camının arıza süreleri veri seti kullanılmıştır (Chipepa vd., 2020). Elde edilen sonuçlar kesilmiş Weibull-Rayleigh dağılımı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapabilmek için Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayesci Bilgi Kriteri (BIC) hesaplanmıştır. Veri setine ilişkin temel istatistikler Çizelge 3'te verilmiştir.

Çizelge 2. İncelenen veri kümesi

0.046, 1.436, 2.592, 0.140, 1.492, 2.600, 0.150, 1.580, 2.670, 0.248, 2.878, 1.719, 2.717, 1.794, 2.819, 0.313, 1.915, 2.820, 0.389, 0.280, 1.920, 0.487, 1.963, 2.950, 0.622, 1.978, 3.003, 0.900, 2.053, 3.102, 0.952, 2.065, 4.015, 3.304, 0.996, 2.117, 3.483, 1.003, 2.137, 3.500, 1.010, 2.141, 3.622, 1.085, 2.163, 3.665, 1.092, 2.183, 3.695, 1.152, 2.240, 1.183, 2.341, 4.628, 1.244, 2.435, 4.806, 1.249, 2.464, 4.881, 1.262, 2.543, 5.14
--

Çizelge 3. Temel istatistikler

1.Çeyreklik	Medyan	3.Çeyreklik
1,122	2,065	2,82
Çarpıklık	Basıklık	Ortalama
0,4395	2,7326	2,085
St. Sapma	Varyans	Tepe Değeri
1,2452	1,5505	2

OGYLW-R dağılımı ve kesilmiş Weibull Rayleigh (TW-R) dağılımlarının uyum iyiliği istatistikleri ve Kolmogorov-Smirnov testi Çizelge 4'te verilmiştir. AIC değerlerinin OGYLW-R dağılımında daha düşük olduğu görülmektedir. Buna göre OGYLW-R dağılımın veri setine daha uygun olduğunu söyleyebiliriz. Aynı zamanda, önerilen bu dağılımın diğer dağılımlara göre farklı veri tipleri için bir alternatif olduğu söylenebilmektedir.

Çizelge 4. Seçim kriteri istatistikleri

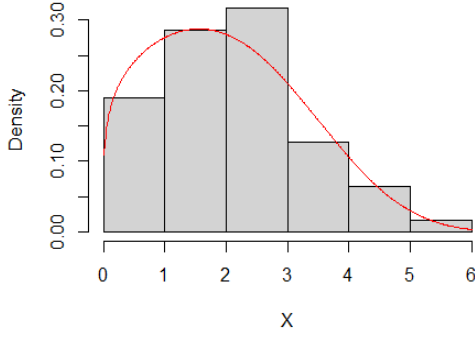
Dağılım	AIC	BIC	KS	P-değeri
OGYLW-R	202,60	209,03	0,0771	0,8189
TW-R	291,55	290,95	0,1084	-
Weibull	204,636	208,92	0,10	0,41
Rayleigh	208,9837	208,78		

OGYLW-R dağılımın parametrelerin en çok olabilirlik tahmin değerleri Çizelge 5'te sunulmuştur.

Çizelge 5. Parametrelerin en çok olabilirlik tahmin değerleri

Dağılım	α	β	σ
OGYLW-R	2,8308461	0,6070282	3,1579166

Önerilen dağılımın uyum iyiliği ayrıca Şekil 5'te verilen histogram grafiği ile gösterilmiştir.



Şekil 5. OGHLW-R dağılımının gerçek veriye uyum grafiği

Şekil 5'e göre OGHLW-R dağılımının veriye genel olarak uyum sağladığı söylenebilir.

7. Sonuç

Bu çalışmada OGYLW-G dağılım ailesi kullanılarak OGYLW-R dağılımı elde edilmiştir. Bu yeni dağılımın dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, yaşam ve hazard fonksiyonları hesaplanmış ve grafikleri verilmiştir. Kantil fonksiyonu hesaplanarak basıklık ve çarpıklık katsayıları farklı parametre değerleri için bulunmuştur. OGYLW-R dağılımının parametre tahmini en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile yapılmıştır. Ayrıca OGYLW-R dağılımının veri setine uyumu, veri setine daha önce uygulanmış olan kesilmiş Weibull Rayleigh dağılımının uyumu ile karşılaştırılmıştır ve OGHLW-R dağılımının veriye daha uyumlu olduğu görülmüştür. Çarpıklık katsayısına göre dağılımın sola çarpık, basıklık katsayısına göre ise normal dağılıma göre daha basık olduğu görülmüştür.

8. Kaynaklar

- Ben-Israel, A., 1966. A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **15(2)**, 243-252.
- Afify, A.Z., Altun, E., Alizadeh, M., Ozel, G. and Hamedani, G.G., 2017. The Odd Exponentiated Half-Logistic-G Family: properties, characterizations and applications. *Chilean Journal of Statistics*, **8(2)**, 65-91.
- Al-Noor, N.H. and Assi, N.K., 2020. Rayleigh-Rayleigh distribution: properties and applications. *Journal of Physics: Conference Series* 1591, doi:10.1088/1742-6596/1591/1/012038.

- Balakrishnan, N., 1985. Order statistics from the half logistic distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **20(4)**, 287-309.
- Bourguignon, M., Silva, R. B. And Cordeiro, G. M., 2014. The Weibull-G family of probability distributions. *Journal of Data Science*, **12(1)**, 53-68.
- Chipepa, F., Oluyede, B. and Makubate, B., 2020. The odd generalized half-logistic Weibull-G family of distributions: properties and applications. *Journal of Statistical Modelling: Theory and Applications*, **1(1)**, 65-89.
- Cordeiro, G. M., Alizadeh, M. and Diniz Marinho, P. R. 2016. The type I half-logistic family of distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86(4)**, 707-728.
- Khalifa, E.H., Ramadan, A.D. and El-Desouky, B.S., 2021. Statistical inference of truncated weibull-rayleigh distribution: its properties and applications. *Open Journal of Modelling and Simulation*, **9**, 281-298.
- Korkmaz, M.Ç., Alizadeh, M. and Yousof, H.M., 2018. The generalized odd weibull generated family of distributions: statistical properties and applications. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **3**, 541-556.
- Luguterah, A., 2016. Odd generalized exponential rayleigh distribution, advances and applications in statistics. *Advances and Applications in Statistics*, **48(1)**, 33-48.
- Mansoor, M., Tahir, M.H., Gauss M. Cordeiro, G.M., Alzaatreh, A. and Zubair, M., 2017. A new family of distributions to analyze lifetime data. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **16(4)**, 490-507.
- Marinho P.R.D, Silva R.B., Bourguignon M., Cordeiro G.M. and Nadarajah S. 2019. AdequacyModel: An R package for probability distributions and general purpose optimization. *PLoS ONE* **14(8)**: e0221487. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0221487>.
- Nadarajah, S., and Rocha, R. 2016. Newdistns: An R package for new families of distributions. *Journal of Statistical Software*, **69(10)**, 1-32, doi:10.18637/jss.v069.i10.
- Ozel, G. And Çakmakyapan, S., 2015. A new distribution and application on the lifetime data. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **9(7)**, 420-423.
- Tekin, S. and Özel, G., 2020. Alfa Güç Burr-XII Dağılımı ve Bir Uygulama. *Nicel Bilimler Dergisi*, **2(1)**, 33-46.

İnternet kaynakları

1-<https://www.R-project.org/>. (04.02.2022)