Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science
2022, 17(2): 270-287
DOI: 10.29233/sdufeffd.1096559

Atıf için / For Citation: I.A. Demirci, "Bulanık sayılar için üç indisli lacunary dizi uzayları", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 17(2), 270-287, 2022.

Araştırma Makalesi

Bulanık Sayılar için Üç İndisli Lacunary Dizi Uzayları

Işıl AÇIK DEMİRCİ*[1]

[1]*Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Matematik Bölümü, 15100, Burdur, Türkiye*

* *yazışılan yazar e-posta: idemirci@mehmetakif.edu.tr*

(Alınış / Received: 31.03.2022, Kabul / Accepted: 28.06.2022, Yayımlanma / Published: 25.11.2022)

Öz: Nanda [29] 1989 yılında bütün yakınsak bulanık sayı dizilerinin tam metrik uzaylar olduğunu gösterdi. Ayrıca, Nuray [30] bulanık sayılarda lacunary istatistiksel yakınsak ve istatistiksel yakınsak diziler arasındaki ilişkileri verdi. Bununla birlikte, bulanık sayı dizilerinin çeşitli yönleri birçok yazar tarafından tartışılmıştır. Bu çalışmada, üç indisli bir bulanık sayı dizisinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve üç indisli lacunary güçlü p-Cesàro toplanabilmesi kavramları incelenmiştir. Üç indisli lacunary istatistiksel Cauchy dizisi, üç indisli lacunary güçlü p-Cesàro toplanabilme ve lacunary istatistiksel olarak bulanık bir sayıya yakınsak olmayı tanımlıyoruz. Bu çeşitli kavramlar arasında bir ilişki olduğunu düşünüyoruz ve bu nedenle, makalede bu konu ile ilgili bazı temel teoremlere yer veriyoruz.

***Anahtar kelimeler**:* Lacunary istatistiksel yakınsaklık; İstatistiksel yakınsaklık; Bulanık sayı; Üç indisli dizi

Triple Lacunary Sequence Spaces for Fuzzy Numbers

Abstract: It was Nanda [29] in 1989 who demonstrate that all convergent fuzzy number sequences are complete metric spaces. Nuray [30] gave the relations between lacunary statistical convergent and statistical convergent sequences in fuzzy numbers. Various aspects of fuzzy number sequences have been discussed by many different authors. In this work, we peruse the notions of lacunary statistical convergence of a triple sequence of fuzzy numbers and triple lacunary strongly p-Cesàro summability. We define triple lacunary statistically Cauchy sequence, triple lacunary strongly p-Cesàro summable and lacunary statistically convergent to a fuzzy number. We think that there is a relationship between these various concepts. Thus in this article, we include some basic theorems on this subject.

***Key words**:* Lacunary statistical convergence; Statistical convergence; Fuzzy number; Triple sequence

Işıl AÇIK DEMİRCİ, idemirci@mehmetakif.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0439-9544

1. Giriş

Bulanık diziler kavramı, 1986'da Matloka [23] tarafından tanımlanmıştır. Matloka bulanık sayıların sınırlı, yakınsak dizilerini vermiş ve bazı temel teoremlerini ispatlamıştır. Nanda [29] ise bulanık sayı dizileri üzerine çalışmalarını devam ettirmiş ve bulanık reel sayıların her yakınsak dizi kümesinin tam metrik uzayı oluşturduğunu göstermiştir.

1950'li yıllarda, birbirinden bağımsız olarak Fast (1951) [6] ve Schoenberg (1959) [42] reel ve kompleks dizilerde istatistiksel yakınsaklığı tanıtmıştır. 1980'li yıllarda ise, Šalát (1980) [34] ve Fridy (1985) [9] kendi çalışmalarında bu kavramı geliştirmişlerdir. Takip eden yıllarda istatistiksel yakınsak diziler farklı açılardan çeşitli yazarlar tarafından araştırılmıştır [3,11,24-25]. Lacunary istatistiksel yakınsaklık düşüncesi Fridy ve Orhan [10] tarafından tanımlanmış ve toplanabilirlik yöntemini istatistiksel yakınsama ile diğer toplanabilirlik yöntemleriyle karşılaştırmışlardır. Bu kavramın birçok uygulaması [14,26,41,45-46] kaynaklarından bulunabilir.

Daha sonra, Nuray ve Savaş [31] bulanık sayılarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarını tanımlamışlardır. Bu konudaki birçok farklı çalışma [2,13,17,20-21,27-28,30,36,39,44] kaynaklarında bulunabilir. Ayrıca bulanık sayıların lacunary istatistiksel yakınsak dizileri ve istatistiksel yakınsaklık arasındaki kapsama ilişkileri Nuray [30] tarafından kanıtlanmıştır.

Agnew [1] çok indisli dizilerin toplanabilirlik teorisi üzerine araştırmalar yapmıştır. Daha sonraki yıllarda, Şahiner vd. [43] üç indisli dizilerde istatistiksel yakınsaklığı araştırmaya başladı. Savaş [35] bulanık sayıların çift indisli yakınsak dizilerini sundu ve bulanık sayıların her çift indisli yakınsak dizisinin kümesinin tam olduğunu belirtti. Çift indisli ve üç indisli diziler hakkında birçok farklı çalışma araştırmacılar tarafından yapılmıştır [5,7,12,15-16,18-19,37-38,40].

Bu makalede ise, bulanık sayılarda üç indisli dizilerde lacunary istatistiksel yakınsaklık ve üç indisli dizilerin lacunary güçlü p-Cesàro toplamı üzerine çalışılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde bazı temel tanımları ve kavramları açıklayacağız. Verilecek olan kavramlar her aşamada kullanılacaktır. Makalenin okuyucuları daha fazla ayrıntı için [2,4-5,8,10,15,19,22-23,27,30-34,37,40,43] kaynaklarından faydalanabilirler.

Bulanık bir sayı, aşağıdaki koşulları sağlayan, $\Upsilon: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ şeklinde bir fonksiyon olan, gerçel eksende bulanık bir kümedir:

(i) $\Upsilon(x_0) = 1$, Υ fonksiyonu normaldir,

(ii) Υ bulanık konvekstir; yani $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\Upsilon(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{\Upsilon(x_1), \Upsilon(x_2)\}$,

(iii) Bir Υ fonksiyonu üst yarı-süreklidir,

(iv) Υ fonksiyonu $\{x: x \in \mathbb{R}^n, \Upsilon(x) > 0\} \coloneqq \Upsilon^0$ kümesinin kapanışında kompakttır.

Üstteki özellikler her $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\Upsilon^{\alpha} = \{\Upsilon(x) \geq \alpha : x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1}$$

α-seviye kümesi olmak üzere boştan farklı kompakt konveks ve Υ^0destek kümesi olduğu için $\Upsilon^{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ dir. Her bulanık sayı kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ olarak tanımlanır.

d_{∞} Hausdorff metriği olmak üzere $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(\Upsilon, Y) = \left[\int_0^1 \delta_{\infty}(\Upsilon^{\alpha}, Y^{\alpha})^q \, d\alpha\right]^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

ve

$$d_{\infty} = sup_{\alpha \in [0,1]} \delta_{\infty}(\Upsilon^{\alpha}, Y^{\alpha}) \tag{3}$$

olsun. Makalede d, d_q $(1 \leq q \leq \infty)$ metriği olarak tanımlanacaktır. d_q tam, ayrılabilir, yerel olarak kompakt bir metrik uzaydır. Eğer $q \leq r$ ise $d_q \leq d_r$ özelliği ile

$$d_{\infty}(\Upsilon, Y) = \lim_{q \to \infty} d_q(\Upsilon, Y) \tag{4}$$

elde edilir [4].

İstatistiksel yakınsama, doğal yoğunluk kavramına bağlıdır. Her pozitif tam sayının kümesi $\mathbb{N}$ olmak üzere $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $\delta(A)$ olarak ifade edilen doğal yoğunluk

$$\delta(A) = \lim_{w \to \infty} w^{-1} |\{i \leq w : i \in A\}| \tag{5}$$

ile tanımlanır. $|A|$ şeklindeki gösterim A kümesinin kardinalitesini gösterecektir.

Tüm $\varepsilon > 0$ için $\{i \leq w : |x_i - X| \geq \varepsilon\}$ kümesinin asimptotik yoğunluğu sıfır yani

$$\lim_{w \to \infty} w^{-1} |\{i \leq w : |x_i - X| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{6}$$

ise $x = \{x_i\}$ dizisi X sayısına istatistiksel olarak yakınsak olarak adlandırılır.

$$\begin{gathered} i_0 = 0 \\ h_r = i_r - i_{r-1} \to \infty \ (r \to \infty) \end{gathered} \tag{7}$$

koşulunu sağlayan artan bir tamsayı dizisi olan $\theta_r = \{i_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir. Burada $I_r = (i_{r-1}, i_r]$ ve $q_r = \frac{i_r}{i_{r-1}}$ şeklinde ele alınsın.

$\theta_r = \{i_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{r\to\infty} {h_r}^{-1}|\{i \le I_r : |x_i - X| \ge \varepsilon\}| = 0$ ise $\{x_i\}$ dizisi X değerine S_{θ_r} -yakınsaktır denir.

Eğer $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{w\to\infty} w^{-1}|\{i \le w : d(\Upsilon_i, \Upsilon_0) \ge \varepsilon\}| = 0 \tag{8}$$

ise bulanık sayıların bir $\{\Upsilon_i\}$ dizisi Υ_0 bulanık sayısına istatistiksel olarak yakınsaktır denir. Yani, hemen hemen tüm i için $d(\Upsilon_i, \Upsilon_0) < \varepsilon$ dir [31].

$\theta_r = \{i_r\}$ dizisi bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{r\to\infty} {h_r}^{-1}|\{i \le I_r : d(\Upsilon_i, \Upsilon_0) \ge \varepsilon\}| := 0$ ise $\Upsilon = \{\Upsilon_i\}$ bulanık sayı dizisi bir Υ_0 bulanık sayısına S_{θ_r}-yakınsaktır denir.

$\theta_r = \{i_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her r için $\widetilde{i_r} \in I_r$ iken $\Upsilon_{\widetilde{i_r}} \to \Upsilon_0$ $(r \to \infty)$ olacak şekilde $\{\Upsilon_{\widetilde{i_r}}\} \in \Upsilon$ bir alt dizisi var ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} {h_r}^{-1}\left|\left\{i \le I_r : d\left(\Upsilon_i, \Upsilon_{\iota(\widetilde{r})}\right) \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{9}$$

ise $\Upsilon = \{\Upsilon_i\}$ bulanık sayı dizisine lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir denir.

$p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer

$$P - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d(\Upsilon_i, \Upsilon_0)^p = 0 \tag{10}$$

sağlanıyorsa $\Upsilon = \{\Upsilon_i\}$ bulanık sayı dizisi Υ_0 bulanık sayısına güçlü p-Cesàro toplanabilen olarak adlandırılır. Yani,

$$\begin{aligned} |\sigma_1|(F) = \{\Upsilon = \{\Upsilon_i\}: \text{ bazı } \Upsilon_0 \text{ bulanık sayılar için} \\ P - \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{i=1}^{m} d(\Upsilon_i, \Upsilon_0)^p = 0\Big\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Bu koşul altında, Υ bulanık sayı dizisi, Υ_0 bulanık sayısına güçlü p-Cesàro toplanabilir adlandırılır.

θ_r bir lacunary dizi olsun. Eğer

$$N_{\theta_r}(F) = \{\Upsilon = \{\Upsilon_i\}: \text{ bazı } \Upsilon_0 \text{ bulanık sayıları için,} \\ P - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in I_r} d(\Upsilon_i, \Upsilon_0)^p = 0\Big\}, \tag{12}$$

olacak şekilde bir Υ_0 bulanık sayısı varsa $\Upsilon = \{\Upsilon_i\}$ bulanık dizisine lacunary güçlü p-Cesàro toplanabilir denir.

$A \subseteq \mathbb{N}^3$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$P - \lim_{m,n,o\to\infty} \frac{|A_{mno}|}{mno} = \delta_3(A) \tag{13}$$

ile tanımlanır. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\delta_3\big(\{(m,n,o) \in \mathbb{N}^3: \left|x_{ijk} - X\right| \geq \varepsilon\}\big) = 0 \tag{14}$$

ise reel üç indisli $\{x_{ijk}\}$ dizisi X e Pringsheim anlamında istatistiksel yakınsaktır veya P-yakınsaktır denir.

Örneğin, $A = \{(i^3, j^3, k^3): i, j, k \in \mathbb{N}\}$ olsun. O halde,

$$\delta_3(A) = P - \lim_{m,n,o\to\infty} \frac{|A_{mno}|}{mno} \leq P - \lim_{m,n,o\to\infty} \frac{\sqrt[3]{mno}}{mno} = 0 \tag{15}$$

dır. Eğer

$$i_0 = 0,\ \ h_r = i_r - i_{r-1} \to \infty\ (r \to \infty),\quad j_0 = 0,\ \ h_s = j_s - j_{s-1} \to \infty\ (s \to \infty) \\ \text{ve} \quad k_0 = 0,\ \ h_t = k_t - k_{t-1} \to \infty\ (t \to \infty) \tag{16}$$

olacak şekilde üç tane artan tamsayı dizisi varsa $\theta_{r,s,t} = \{(i_r, j_s, k_t)\}$ dizisine üç indisli lacunary dizisi denir.

Burada $i_{r,s,t} = i_r j_s k_t,\ h_{r,s,t} = h_r h_s h_t,\ \theta_{r,s,t}$ dizisi $I_{r,s,t} = \{(i,j,k): i_{r-1} < i \leq i_r,$ $j_{s-1} < j \leq j_s,\ k_{t-1} < k \leq k_t\},\ q_r = \frac{i_r}{i_{r-1}},\ q_s = \frac{j_s}{j_{s-1}},\ q_t = \frac{k_t}{k_{t-1}}$ ve $q_{r,s,t} = q_r q_s q_t$ şekli ile belirlenmiş olsun.

Bulanık sayı dizilerinin üç indisli istatistiksel yakınsaması çalışmasına ilk olarak [19] da rastlanmıştır.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $i, j, k > n_0$ için

$$d(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0) < \varepsilon \tag{17}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ varsa $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$ üç indisli bulanık sayı dizisine bir Υ_0 bulanık sayısına Pringsheim anlamında yakınsak veya bir Υ_0 bulanık sayısına P-yakınsak denir. Burada biz bu yakınsaklığı $\Upsilon \to^P \Upsilon_0$ şeklinde göstereceğiz.

Ayrıca, eğer $\Upsilon_{ijk} \to \Upsilon_0$ $(i,j,k \to \infty)$ ise bir $\{\Upsilon_{ijk}\}$ üç indisli dizisinin bir sonlu Υ_0 sayısına yakınsadığını söyleyebiliriz.

Her i,j,k için $d(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0) < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa, bulanık sayıların bir $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}_{(i,j,k)\in I_{r,s,t}}$ üç indisli dizisine sınırlıdır denir. Burada bulanık sayıların her sınırlı üç indisli dizisinin kümesini $l_\infty^3(F)$ ile tanımlarız.

Tanım 2.1. [19] Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{m,n,o\to\infty} \frac{1}{mno} \left|\{(i,j,k): i \le m, j \le n \text{ ve } k \le o; d(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0) \ge \varepsilon\}\right| = 0 \tag{18}$$

ise üç indisli $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$ bulanık sayı dizisi Υ_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda, $st_3 - \Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0$ $(i,j,k \to \infty)$ dır. Bulanık sayıların tüm üç indisli istatistiksel olarak yakınsak dizilerinin kümesini $st^3(F)$ ile belirtebiliriz.

3. Bulgular

Üç indisli lacunary istatistiksel yakınsaklığı göz önüne alarak bu bölümde bulanık sayı dizileri için üç indisli lacunary istatistiksel yakınsamanın aşağıda verilen dikkate değer özellikleri ek olarak $S_{\theta_{r,s,t}}(F)$ ve $N_{\theta_{r,s,t}}(F)$-yakınsaklığı arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ek olarak $S_{\theta_{r,s,t}}(F)$ ve $N_{\theta_{r,s,t}}(F)$-yakınsaklığın sınırlı üç indisli diziler için eşdeğer olduğu belirtilmiştir.

Aksi belirtilmedikçe bu makale boyunca $\theta_{r,s,t} = \{(i_r, j_s, k_t)\}$ üç indisli bir lacunary dizisi olarak kullanılacaktır.

Tanım 3.1. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $r,s,t \to \infty$ için $(\tilde{\imath}_r, \tilde{\jmath}_s, \tilde{k}_t) \in I_{r,s,t}$, $\Upsilon_{\tilde{\imath}_r\tilde{\jmath}_s\tilde{k}_t} \to \Upsilon_0$ ve

$$\lim_{r,s,t\to\infty} h_{r,s,t}{}^{-1} \left|\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_{\tilde{\imath}_r\tilde{\jmath}_s\tilde{k}_t}) \ge \varepsilon\}\right| = 0 \tag{19}$$

olacak şekilde $\{\Upsilon_{\tilde{\imath}_r\tilde{\jmath}_s\tilde{k}_t}\} \in \Upsilon$ alt dizisi varsa $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$ üç indisli bulanık sayı dizisine üç indisli lacunary istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.2. Eğer

$$N_{\theta_{r,s,t}}(F) = \{\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\} : \text{ bazı } \Upsilon_0 \text{ bulanık sayıları için, } \lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(i,j,k)\in I_{r,s,t}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)^p = 0\} \tag{20}$$

olacak şekilde bir Υ_0 bulanık sayısı varsa üç indisli $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$ bulanık sayı dizisine üç indisli lacunary güçlü p-Cesàro toplanabilir denir.

Üç indisli lacunary istatistiksel yakınsamayı göz önüne alıyoruz.

Tanım 3.3. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{21}$$

ise üç indisli Υ bulanık dizisi Υ_0 bulanık sayısına lacunary istatistiksel olarak yakınsaktır denir.

Bu koşul altında, $S_{\theta_{r,s,t}} - \lim \Upsilon = \Upsilon_0 (r,s,t \to \infty)$ veya $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ şeklinde yazabiliriz. Buradan bulanık sayıların tüm üç indisli $S_{\theta_{r,s,t}}$-yakınsak dizilerinin kümesini $S_{\theta_{r,s,t}}(F)$ ile tanımlayabiliriz.

Teorem 3.1. İki tane üç indisli $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$ ve $Y = \{Y_{ijk}\}$ bulanık sayıların dizisi olsun.

(i) Eğer $C \in \mathbb{R}$ ve $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ ise $C\Upsilon_{ijk} \to^P C\Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ olur.

(ii) Eğer $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ ve $Y_{ijk} \to^P Y_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ ise $(\Upsilon_{ijk} + Y_{ijk}) \to^P (\Upsilon_0 + Y_0)(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ dir.

İspat. *(i)* Eğer $C = 0$ ise ispat açıktır. $C \neq 0$ ve $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{22}$$

sağlanır. $C \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
&\lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(C\Upsilon_{ijk}, C\Upsilon_0) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : |C| d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \frac{\varepsilon}{|C|}\right\}\right| \\
&= 0
\end{aligned} \tag{23}$$

elde edilir. Böylece, $C\Upsilon_{ijk} \to^P C\Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})\ (r,s,t \to \infty)$ olur.

(ii)

$$G_1 = \left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \tag{24}$$

$$G_2 = \left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk}, Y_0\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olarak alalım. Her $(i,j,k) \in G_1 \cap G_2$ için $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk} + Y_{ijk}, Y_0 + Y_0\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\ &\leq \lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk}, Y_0\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\ &\quad + \lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk}, Y_0\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\ &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

elde ederiz. Böylece, $\left(Y_{ijk} + Y_{ijk}\right) \to^P (Y_0 + Y_0)\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(r,s,t \to \infty)$ olur.

Teorem 3.2. $\delta_{\theta_{r,s,t}}(A) = 1$ ve $Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}} \to^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(n_0 \to \infty)$ olacak şekilde bir $A = \left\{\left(i_{n_0}, j_{n_0}, k_{n_0}\right), n_0 = 1,2,\ldots\right\} \subseteq \mathbb{N}^3$ alt kümesinin var olması için gerek ve yeter koşul $Y_{ijk} \to^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(r,s,t \to \infty)$ olmasıdır.

İspat. $Y_{ijk} \to^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)(r,s,t \to \infty)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk}, Y_0\right) \geq \varepsilon\right\} \\ G_2 &= \left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk}, Y_0\right) < \varepsilon\right\} \end{aligned} \tag{26}$$

ise $\delta_{\theta_{r,s,t}}(G_1) = 0$ ve böylece $\delta_{\theta_{r,s,t}}(G_2) = 1$ olur. Üstelik $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ bulunur. $\delta_{\theta_{r,s,t}}(G_2) = 1$ için G_2 kümesinin sonsuz bir küme olduğu sonucu çıkar. Aksi halde $\delta_{\theta_{r,s,t}}(G_2) = 0$ dır. $A = \left\{\left(i_{n_0}, j_{n_0}, k_{n_0}\right), n_0 = 1,2,\ldots\right\} \subseteq \mathbb{N}^3$ olsun. Şimdi yeterliliğini ispatlayalım. Bunun için, $\left\{Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}\right\} \to^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(n_0 \to \infty)$ dir. $\left\{Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}\right\} \nrightarrow^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(n_0 \to \infty)$ olduğunu kabul edelim. Tanımdan, sonsuz sayıda terim için $d\left(Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}, Y_0\right) \geq \varepsilon_1$ olacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ vardır.

$$G'_2 = \left\{\left(i_{n_0}, j_{n_0}, k_{n_0}\right) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}, Y_0\right) \geq \varepsilon_1\right\} \tag{27}$$

olsun. Açıkça, $G'_2 \subseteq G_2$ $(G'_2 \neq \emptyset)$ olur. Ayrıca, her i,j,k ve ε_1 için

$$\begin{aligned} &\left\{\left(i_{n_0}, j_{n_0}, k_{n_0}\right) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}, Y_0\right) \geq \varepsilon_1\right\} \\ &\quad \subseteq G'_1 = \left\{(i,j,k) \in I_{r,s,t}: d\left(Y_{ijk}, Y_0\right) \geq \varepsilon_1\right\} \end{aligned} \tag{28}$$

dir. Böylece, $\delta_{\theta_{r,s,t}}(G'_2) = 0$ yani $G'_2 \subseteq G'_1$ dir. Dahası, $\varepsilon < \varepsilon_1$ için $G'_1 \subseteq G_1$ elde edilir. $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ iken bu mümkün değildir. O halde, $\left\{Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}\right\} \to^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(n_0 \to \infty)$ dir.

Tersine, $\delta_{\theta_{r,s,t}}(A) = 1$ ve $\left\{Y_{i_{n_0} j_{n_0} k_{n_0}}\right\} \to^P Y_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)$ $(n_0 \to \infty)$ olacak şekilde bir $A = \left\{\left(i_{n_0}, j_{n_0}, k_{n_0}\right), n_0 = 1,2,\ldots\right\} \subseteq \mathbb{N}^3$ alt kümesi var olduğunu kabul edelim. Her $\eta_0 \geq \eta$

için

$$d\left(\Upsilon_{i_{n_0}j_{n_0}k_{n_0}}, \Upsilon_0\right) < \varepsilon \tag{29}$$

olacak şekilde bir $\eta \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. $\tilde{A} = \{(i_{\eta+1}, j_{\eta+1}, k_{\eta+1}), (i_{\eta+2}, j_{\eta+2}, k_{\eta+2}), \dots\}$ olduğundan

$$\mathbb{N}^3 - \tilde{A} \supseteq \{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\} \tag{30}$$

elde edilir. Buradan $\delta_{\theta_{r,s,t}}(\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon_1\}) \leq 1 - 1 = 0$ ve $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})$ $(r,s,t \to \infty)$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2. $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$ üç indisli bulanık sayıların bir dizisi olsun. O halde, aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) $N_{\theta_{r,s,t}}(F) \subset S_{\theta_{r,s,t}}(F)$,
(ii) $l_\infty^3(F) \cap S_{\theta_{r,s,t}}(F) \subseteq N_{\theta_{r,s,t}}(F)$,
(iii) $S_{\theta_{r,s,t}}(F) \cap l_\infty^3(F) = N_{\theta_{r,s,t}}(F) \cap l_\infty^3(F)$.

İspat. *(i)*

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\in I_{r,s,t}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) &\geq \sum_{\substack{(i,j,k)\in I_{r,s,t}\\ d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)\geq\varepsilon}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)\\ &\geq \varepsilon\left|\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned} \tag{31}$$

ve

$$\lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(i,j,k)\in I_{r,s,t}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) = 0 \tag{32}$$

elde ederiz. Bu ise

$$\lim_{r,s,t\to\infty} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0 \tag{33}$$

olduğunu verir. Bu da *(i)* nin ispatını tamamlar.

(ii) $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0(S_{\theta_{r,s,t}})(F)$ $(r,s,t \to \infty)$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca her i,j,k için $d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) < K$ olacak şekilde $K > 0$ olsun. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(i,j,k)\in I_{r,s,t}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) &= \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(i,j,k)\in I_{r,s,t}\\ d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)\geq\varepsilon}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)\\ &\quad+ \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(i,j,k)\in I_{r,s,t}\\ d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)<\varepsilon}} d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0)\\ &\leq \frac{M}{h_{r,s,t}} \left|\{(i,j,k) \in I_{r,s,t} : d(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0) \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon\end{aligned} \tag{34}$$

elde ederiz. Böylece, $\Upsilon \in l_\infty^3(F)$ ve $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0\left(S_{\theta_{r,s,t}}\right)(F)$ $(r,s,t\to\infty)$, $\Upsilon_{ijk} \to^P \Upsilon_0\left(N_{\theta_{r,s,t}}\right)(F)$ $(r,s,t\to\infty)$ olduğunu ima eder. Yani *(ii)* nin ispatı tamamlanır.

(iii) Üstteki *(i)* ve *(ii)* den faydalanılarak $S_{\theta_{r,s,t}}(F) \cap l_\infty^3(F) = N_{\theta_{r,s,t}}(F) \cap l_\infty^3(F)$ bulunur.

Teorem 3.3. $\left[\left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F) \subset N_{\theta_{r,s,t}}(F)\right] \Leftrightarrow$ [$\lim inf_r q_r > 1,\ \lim inf_s q_s > 1, \lim inf_t q_t > 1$] dır.

İspat. $\lim inf_r q_r > 1,\ \lim inf_s q_s > 1$ ve $\lim inf_t q_t > 1$ olduğunu farz edelim. O halde yeteri kadar büyük r,s,t için $q_r \geq \delta_1 + 1, q_s \geq \delta_2 + 1$ ve $q_t \geq \delta_3 + 1$ olacak şekilde $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ve $\delta_3 > 0$ vardır. Bu da $\frac{h_r}{i_r} > \frac{\delta_1}{\delta_1+1}$, $\frac{h_s}{j_s} > \frac{\delta_2}{\delta_2+1}$ ve $\frac{h_t}{k_t} > \frac{\delta_3}{\delta_3+1}$ olduğunu gösterir. Eğer $\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\} \in \left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F)$ ise o zaman,

$$\begin{aligned} U_{r,s,t} &= \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{i\in I_r}\sum_{j\in I_s}\sum_{k\in I_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P \\ &= \frac{1}{h_{r,s,t}}\left[\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P \right. \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i_{r-1}}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P - \sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_{s-1}}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P + \sum_{i=1}^{i_{r-1}}\sum_{j=1}^{j_{s-1}}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P \right] \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} U_{r,s,t} &= \frac{i_r j_s k_t}{h_{r,s,t}}\left(\frac{1}{i_r j_s k_t}\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P\right) \\ &\quad - \frac{i_{r-1} j_s k_t}{h_{r,s,t}}\left(\frac{1}{i_{r-1} j_s k_t}\sum_{i=1}^{i_{r-1}}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P\right) \\ &\quad - \frac{i_r j_{s-1} k_t}{h_{r,s,t}}\left(\frac{1}{i_r j_{s-1} k_t}\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_{s-1}}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P\right) \\ &\quad - \frac{i_r j_s k_{t-1}}{h_{r,s,t}}\left(\frac{1}{i_r j_s k_{t-1}}\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P\right) \\ &\quad + \frac{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}}{h_{r,s,t}}\left(\frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}}\sum_{i=1}^{i_{r-1}}\sum_{j=1}^{j_{s-1}}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P\right) \end{aligned} \tag{36}$$

elde edilir. $\Upsilon \in \left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F)$ olduğunda yukarıdaki üç indisli toplamların her biri sıfıra yakınsar.

$$\frac{1}{i_r j_s k_t}\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P, \qquad \frac{1}{i_{r-1} j_s k_t}\sum_{i=1}^{i_{r-1}}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P,$$

$$\frac{1}{i_r j_{s-1} k_t}\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_{s-1}}\sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P, \quad \frac{1}{i_r j_s k_{t-1}}\sum_{i=1}^{i_r}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P, \tag{37}$$

$$\text{ve } \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}}\sum_{i=1}^{i_{r-1}}\sum_{j=1}^{j_{s-1}}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P$$

ifadelerinin tümü Pringsheim sıfır dizileridir. Böylece, $U_{r,s,t}$ bir Pringsheim sıfır dizisidir. Buradan $\Upsilon \in N_{\theta_{r,s,t}}(F)$ dir.

Tersine, $\lim inf_r q_r = 1$, $\lim inf_s q_s = 1$ ve $\lim inf_t q_t = 1$ olduğunu kabul edelim. $r_a \geq r_{a-1} + 2, s_b \geq s_{b-1} + 2$ ve $t_c \geq t_{c-1} + 2$ olmak üzere

$$\frac{i_{r_a-1}}{i_{r-1}} > a, \quad \frac{i_{r_a}}{i_{r_a-1}} < 1 + \frac{1}{a}, \quad \frac{i_{s_b-1}}{j_{s-1}} > b, \quad \frac{j_{s_b}}{j_{s_b-1}} < 1 + \frac{1}{b}$$
$$\text{ve } \frac{k_{t_c-1}}{k_{t-1}} > c, \quad \frac{k_{t_c}}{k_{t_c-1}} < 1 + \frac{1}{c} \tag{38}$$

koşulunu sağlayan $\{i_{r_a}, j_{s_b}, k_{t_c}\}$ dizileri seçilebilir. χ ve φ iki farklı bulanık sayı belirtsin.

$$\Upsilon = \{\Upsilon_{ijk}\}$$
$$= \begin{cases} \chi, & \text{bazı } a = b = c;\ a,b,c = 1,2,\dots \text{ için } (i,j,k) \in \left(I_{r_a}, I_{s_b}, I_{t_c}\right) \\ \varphi, & \text{aksi durumda} \end{cases} \tag{39}$$

Bu sebeple her bulanık *F* sayıları ve $r \neq r_a$, $s \neq s_b$, $t \neq t_c$ için,

$$\frac{1}{h_{r_a,s_b,t_c}}\sum_{i\in I_{r_a}}\sum_{j\in I_{s_b}}\sum_{k\in I_{t_c}} d\left(\Upsilon_{ijk},F\right) = d(\chi,F) \tag{40}$$

ve

$$\frac{1}{h_{r,s,t}}\sum_{i\in I_r}\sum_{j\in I_s}\sum_{k\in I_t} d\left(\Upsilon_{ijk},F\right) = d(\varphi,F), \tag{41}$$

yani $\Upsilon \notin N_{\theta_{r,s,t}}$ dir. Her $m,\ n,\ o$ sayıları yeterince büyük tam sayılar ise,

$$i_{r_a-1} < m \leq i_{r_a}\ ,\ j_{s_b-1} < n \leq j_{s_b}\ ,\ k_{t_c-1} < o \leq k_{t_c} \tag{42}$$

için ve $m,n,o \to \infty$ olmak üzere

$$\frac{1}{mno}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} d\left(\varphi,\Upsilon_{ijk}\right) \leq \frac{i_{r_a-1} j_{s_b-1} k_{t_c-1} + h_{r_a,s_b,t_c}}{i_{r_a-1} j_{s_b-1} k_{t_c-1}} \tag{43}$$

$$< \left(\frac{3}{abc}\right)$$

tek $a,\ b,\ c$ bulabiliriz ve ayrıca $i,j,k \to \infty$ olduğunda da bulabiliriz. Böylece, $\Upsilon \in \left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F)$ olur. Bu da bir çelişki olup teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4. $N_{\theta_{r,s,t}}(F) \subset \left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim sup_r q_r < \infty$, $\lim sup_s q_s < \infty, \lim sup_t q_t < \infty$ olmasıdır.

İspat. $\lim sup_r q_r < \infty$, $\lim sup_s q_s < \infty, \lim sup_t q_t < \infty$ olsun. Tüm $r,\ s,\ t$ için her biri K sayısından küçük q_r, q_s ve q_t olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. $\Upsilon \in N_{\theta_{r,s,t}}(F)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Ayrıca, tüm $a > r_0, b > s_0, c > t_0$ için

$$U_{r,s,t} = \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{i \in I_r} \sum_{j \in I_s} \sum_{k \in I_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P < \varepsilon \tag{44}$$

olacak şekilde $r_0 > 0, s_0 > 0, t_0 > 0$ vardır. $i_{r-1} < m \leq i_r$, $j_{s-1} < n \leq j_s$, $k_{t-1} < o \leq k_t$ olacak şekilde $B = maks\left\{U_{r,s,t}: 1 \leq r \leq r_0, 1 \leq s \leq s_0, 1 \leq t \leq t_0\right\}$ ve $m,\ n,\ o$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mno} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{o} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P &\leq \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \sum_{i=1}^{i_r} \sum_{j=1}^{j_s} \sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P \\
&\leq \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \sum_{f,v,z=1,1,1}^{r,s,t} \left(\sum_{(i,j,k) \in \left(I_f, I_v, I_z\right)} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P \right) \\
&= \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \sum_{f,v,z=1,1,1}^{r_0,s_0,t_0} h_{f,v,z} U_{f,v,z} \\
&\quad + \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \sum_{(r_0 < f \leq r) \cup (s_0 < v \leq s) \cup\, (t_0 < z \leq t)} h_{f,v,z} U_{f,v,z} \\
&\leq \frac{B}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \sum_{f,v,z=1,1,1}^{r_0,s_0,t_0} h_{f,v,z} \\
&\quad + \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \sum_{(r_0 < f \leq r) \cup (s_0 < v \leq s) \cup\, (t_0 < z \leq t)} h_{f,v,z} U_{f,v,z} \\
&\leq B \frac{i_{r_0} j_{s_0} k_{t_0} r_0 s_0 t_0}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \\
&\quad + \left(sup_{(r_0 \leq f) \cup (s_0 \leq v) \cup\, (t_0 \leq z)} U_{f,v,z}\right) \frac{1}{i_{r-1} j_{s-1} k_{t-1}} \\
&\quad \times \sum_{(r_0 < f \leq r) \cup (s_0 < v \leq s) \cup\, (t_0 < z \leq t)} h_{f,v,z} U_{f,v,z}
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\leq B\frac{i_{r_0}j_{s_0}k_{t_0}r_0s_0t_0}{i_{r-1}j_{s-1}k_{t-1}}$$
$$+\varepsilon\frac{1}{i_{r-1}j_{s-1}k_{t-1}}\sum_{(r_0<f\leq r)\cup(s_0<v\leq s)\cup\,(t_0<z\leq t)} h_{f,v,z}$$
$$\leq B\frac{i_{r_0}j_{s_0}k_{t_0}r_0s_0t_0}{i_{r-1}j_{s-1}k_{t-1}}+\varepsilon A^3$$

elde ederiz. Burada $m,n,o\to\infty$ iken $i_r,j_s,k_t\to\infty$ dur. O halde,

$$\frac{1}{mno}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} d\big(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\big)\to 0 \tag{46}$$

dır. Böylece $\Upsilon\in\left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F)$ dir.

Şimdi varsayımın tersini kabul edelim: $\lim sup_r q_r=\infty$, $\lim sup_s q_s=\infty$, $\lim sup_t q_t=\infty$ olsun. $\left|\sigma_{1,1,1}\right|_P(F)$ olmayan bir sınırlı $N_{\theta_{r,s,t}}(F)$-yakınsak dizisinin varlığını ispatlayacağız. $q_{r_a}>a$, $q_{s_b}>b$ ve $q_{t_c}>c$ koşullarını sağlayan $\theta_{r,s,t}$ dizisinin q_{r_a}, q_{s_b}, q_{t_c} alt dizilerini oluşturabiliriz. Farklı iki bulanık sayı χ ve φ olsun. $\Upsilon=\big(\Upsilon_{ijk}\big)$ dizisi

$$\begin{array}{ll} \Upsilon_{ijk}=\chi\,, & i_{r_a-1}<i\leq 2i_{r_a-1}\,, j_{s_b-1}<j\leq 2j_{s_b-1}\,, k_{t_c-1}<k\leq 2k_{t_c-1} \text{ ise} \\ \Upsilon_{ijk}=\varphi\,, & \text{aksi durumda} \end{array} \tag{47}$$

ile tanımlansın.

$$U_{r_a,s_b,t_c}=\frac{1}{h_{r_a,s_b,t_c}}\sum_{i\in I_{r_a}}\sum_{j\in I_{s_b}}\sum_{k\in I_{t_c}} d\big(\Upsilon_{ijk},\varphi\big)<\left(\frac{1}{a-1}\right)\left(\frac{1}{b-1}\right)\left(\frac{1}{c-1}\right) \tag{48}$$

şeklinde yazalım. Buradan $r\neq r_a$, $s\neq s_b, t\neq t_c$ ise

$$\lim_{a,b,c} U_{r_a,s_b,t_c}=0 \tag{49}$$

elde edilir. Böylece, $\Upsilon\in N_{\theta_{r,s,t}}(F)$ dir. Şimdi, yukarıdaki üç indisli $\{\Upsilon_{ijk}\}$ dizisi ve bir F bulanık sayısı için,

$$\frac{1}{i_{r_a}j_{s_b}k_{t_c}}\sum_{i=1}^{i_{r_a}}\sum_{j=1}^{j_{s_b}}\sum_{k=1}^{k_{t_c}} d\big(\Upsilon_{ijk},F\big)\geq\frac{1}{i_{r_a}j_{s_b}k_{t_c}}\left(\sum_{i=i_{r_a-1}}^{2i_{r_a-1}}\sum_{j=j_{s_b-1}}^{2j_{s_b-1}}\sum_{k=2k_{t_c-1}}^{2k_{t_c-1}} d(\chi,F)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=2i_{r_a-1}+1}^{i_{r_a}}\sum_{j=2j_{s_b-1}+1}^{j_{s_b}}\sum_{k=2k_{t_c-1}+1}^{k_{t_c}} d(\varphi,F)\right) \tag{50}$$
$$=d(\chi,F)\left(\frac{i_{r_a-1}}{i_{r_a}}\right)\left(\frac{j_{s_b-1}}{j_{s_b}}\right)\left(\frac{k_{t_c-1}}{k_{t_c}}\right)$$

$$+d(\varphi,F)\left(\frac{i_{r_a}-2i_{r_a-1}}{i_{r_a}}\right)\left(\frac{j_{s_b}-2j_{s_b-1}}{j_{s_b}}\right)\left(\frac{k_{t_c}-2k_{t_c-1}}{k_{t_c}}\right)$$

$$=d(\chi,F)\left(\frac{i_{r_a-1}}{i_{r_a}}\right)\left(\frac{j_{s_b-1}}{j_{s_b}}\right)\left(\frac{k_{t_c-1}}{k_{t_c}}\right)$$

$$+d(\varphi,F)\left(1-\frac{2}{q_{r_a}}\right)\left(1-\frac{2}{q_{s_b}}\right)\left(1-\frac{2}{q_{t_c}}\right)$$

elde edilir. $\frac{1}{q_{r_a}}<\frac{1}{a}$, $\frac{1}{q_{s_b}}<\frac{1}{b}$, $\frac{1}{q_{t_c}}<\frac{1}{c}$ olduğunda

$$\frac{1}{i_{r_a}j_{s_b}k_{t_c}}\sum_{i=1}^{i_{r_a}}\sum_{j=1}^{j_{s_b}}\sum_{k=1}^{k_{t_c}}d(\Upsilon_{ijk},F)\geq d(\chi,F)\left(\frac{i_{r_a-1}}{i_{r_a}}\right)\left(\frac{j_{s_b-1}}{j_{s_b}}\right)\left(\frac{k_{t_c-1}}{k_{t_c}}\right)$$
$$+d(\varphi,F)\left(1-\frac{2}{a}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\left(1-\frac{2}{c}\right)\to d(\varphi,F) \tag{51}$$

buluruz. O halde

$$P-\lim_{a,b,c\to\infty}\frac{1}{i_{r_a}j_{s_b}k_{t_c}}\sum_{i=1}^{i_{r_a}}\sum_{j=1}^{j_{s_b}}\sum_{k=1}^{k_{t_c}}d(\Upsilon_{ijk},F)\geq d(\varphi,F) \tag{52}$$

olur. Diğer yandan, $i=1,\dots,2i_{r_a-1}$, $j=1,\dots,2j_{s_b-1}$, $k=1,\dots,2k_{t_c-1}$ için

$$\frac{1}{2i_{r_a-1}2j_{s_b-1}2k_{t_c-1}}\sum_{i=1}^{2i_{r_a-1}}\sum_{j=1}^{2j_{s_b-1}}\sum_{k=1}^{2k_{t_c-1}}d(\Upsilon_{ijk},F)$$
$$\geq\frac{1}{2i_{r_a-1}2j_{s_b-1}2k_{t_c-1}}\sum_{i=i_{r_a-1}+1}^{2i_{r_a-1}}\sum_{j=j_{s_b-1}+1}^{2j_{s_b-1}}\sum_{k=k_{t_c-1}+1}^{2k_{t_c-1}}d(\Upsilon_{ijk},F) \tag{53}$$
$$\geq\frac{d(\varphi,F)}{6}$$

bulunur. Bu da $\Upsilon\notin\left|\sigma_{1,1,1}\right|_p(F)$ dir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.5. $\left|\sigma_{1,1,1}\right|_p(F)=N_{\theta_{r,s,t}}(F)$ olması için gerek ve yeter koşul $1<\lim inf_r q_r\leq\lim sup_r q_r<\infty,\ 1<\lim inf_s q_s\leq\lim sup_s q_s<\infty$ ve $1<\lim inf_t q_t\leq\lim sup_t q_t<\infty$ olmasıdır.

İspat. Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 deki ispat yöntemleri kullanılarak bu teoremin ispatı yapılır.

Bulanık sayıların hem $\left|\sigma_{1,1,1}\right|_p(F)$ hem de $N_{\theta_{r,s,t}}(F)$-limitlerinin aynı olup olmadığı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.6. Eğer $p\leq 1$ ve $\Upsilon\in\left|\sigma_{1,1,1}\right|_p(F)\cap N_{\theta_{r,s,t}}(F)$ ise $N_{\theta_{r,s,t}}(F)-\lim\Upsilon_{ijk}=\left|\sigma_{1,1,1}\right|_p(F)-\lim\Upsilon_{ijk}$ dir.

İspat. $\Upsilon_0 \neq \Upsilon'_0$ varsayımıyla

$$N_{\theta_{r,s,t}}(F) - \lim \Upsilon_{ijk} = \Upsilon_0 \quad \text{ve} \quad |\sigma_{1,1,1}|_p(F) - \lim \Upsilon_{ijk} = \Upsilon'_0 \tag{54}$$

verilsin. O zaman $p \leq 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} U_{r,s,t} + U'_{r,s,t} &= \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{i \in I_r} \sum_{j \in I_s} \sum_{k \in I_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P + \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{i \in I_r} \sum_{j \in I_s} \sum_{k \in I_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon'_0\right)^P \\ &\geq \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{i \in I_r} \sum_{j \in I_s} \sum_{k \in I_t} d(\Upsilon_0, \Upsilon'_0)^P \\ &\geq d(\Upsilon_0, \Upsilon'_0)^P \end{aligned} \tag{55}$$

yazabiliriz. $\Upsilon \in N_{\theta_{r,s,t}}$ iken $P - \lim_{r,s,t \to \infty} U'_{r,s,t} = 0$ dır. Böylece $\min(r,s,t) > N$ için,

$$U_{r,s,t} > \frac{1}{2} d(\Upsilon_0, \Upsilon'_0)^P \tag{56}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i_r j_s k_t} \sum_{i=1}^{i_r} \sum_{j=1}^{j_s} \sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P &= \frac{1}{i_r j_s k_t} \sum_{(\mu,\nu,\xi)=1,1,1}^{r,s,t} \sum_{i \in I_\mu} \sum_{j \in I_\nu} \sum_{k \in I_\xi} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P \\ &\geq \frac{1}{i_r j_s k_t} \sum_{i \in I_r} \sum_{j \in I_s} \sum_{k \in I_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)\left(1 - \frac{1}{q_s}\right)\left(1 - \frac{1}{q_t}\right) U_{r,s,t} \\ &> \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q_r}\right)\left(1 - \frac{1}{q_s}\right)\left(1 - \frac{1}{q_t}\right) d(\Upsilon_0, \Upsilon'_0)^P \end{aligned} \tag{57}$$

olur. Buradan $\Upsilon \in |\sigma_{1,1,1}|_p(F)$ ve $r, s, t \to \infty$ iken,

$$\frac{1}{i_r j_s k_t} \sum_{i=1}^{i_r} \sum_{j=1}^{j_s} \sum_{k=1}^{k_t} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P \to 0 \tag{58}$$

olduğu görülür. Böylece, $q_r, q_s, q_t \to 1$ elde etmeliyiz. Bu durumların Teorem 3.3'ün ispatında bulunduğu görülür. $|\sigma_{1,1,1}|_p(F) \supset N_{\theta_{r,s,t}}(F)$ dir. O halde, $N_{\theta_{r,s,t}}(F) - \lim \Upsilon_{ijk} = \Upsilon'_0$ olduğunda $|\sigma_{1,1,1}|_p(F) - \lim \Upsilon_{ijk} = \Upsilon'_0$ dır. Öyleyse,

$$P - \lim_{m,n,o \to \infty} \frac{1}{mno} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{o} d\left(\Upsilon_{ijk}, \Upsilon_0\right)^P = 0 \tag{59}$$

dır. Ancak,

$$\frac{1}{mno}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P + \frac{1}{mno}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon'_0\right)^P \geq d(\Upsilon_0,\Upsilon'_0)^P \geq 0 \tag{60}$$

olur. Bu ise $\frac{1}{mno}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon_0\right)^P$ ve $\frac{1}{mno}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} d\left(\Upsilon_{ijk},\Upsilon'_0\right)^P$ toplamlarının sıfıra yakınsaması nedeniyle bir çelişki verir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4. Sonuç ve Yorum

Bu makalede bulanık sayılar için, üç indisli lacunary istatistiksel yakınsamanın dikkat çekici özellikleri, üç indisli lacunary güçlü p-Cesàro toplamı ile üç indisli istatistiksel olarak yakınsaklık arasındaki ilişkiler belirtilmiştir. Ek olarak, bu makaledeki sonuçlar toplanabilirlik teorisi üzerine yapılmış olan çalışmaların devamı niteliğindedir.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Işıl Açık Demirci: Araştırma, Kavramsallaştırma, Doğrulama, Orijinal Taslak Yazımı.

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak, çalışmanın okunabilirliğinin iyileştirilmesine katkıda bulunan hakemlere teşekkür ederim.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir çatışma beyanımın bulunmadığını bildiririm.

Etik Kurul Onayı ve/veya Aydınlatılmış Onam Bilgileri

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir etik kurul onayı ve/veya aydınlatılmış onam bilgileri beyanımın bulunmadığını bildiririm.

Kaynakça

[1] R.P. Agnew, "On summability of multiple sequences," *Amer. J. Math.*, 1 (4), 62–68, 1934.
[2] Y. Altın, M. Et and R. Çolak, "Lacunary statistical and lacunary strongly convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers," *Comput. Math*., 52, 1011–1020, 2006.
[3] J. S. Connor, "The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences," *Analysis*, 8, 46–63, 1988.
[4] P. Diamond and P. Kloeden, "Metric of fuzzy space sets," *Fuzzy Sets Syst*., 35, 241–249, 1990.
[5] A. Esi and E. Savaş, "On lacunary statistically convergent triple sequences in probabilistic normed space," *Appl. Math. Inf. Sci*., 9 (5), 2529–2534, 2015.
[6] H. Fast, "Sur la convergence statistique," *Colloq. Math.*, 2, 241–244, 1951.
[7] X. Feng, "Ideal statistically pre-Cauchy triple sequences of fuzzy number and Orlicz functions," *Appl. Math.*, 12 (9), 767–774, 2021.
[8] A. R. Freedman and J. J. Sember, "Densities and summability," *Pac. J. Math.*, 95 (2), 293–305, 1981.
[9] J. A. Fridy, "On statistical convergence," *Analysis*, 5 (4), 301–313, 1985.
[10] J. A. Fridy and C. Orhan, "Lacunary statistical convergence," *Pac. J. Math.*, 160 (1), 43–51, 1993.

[11] M. Gürdal, “Some types of convergence,” Diss. Doctoral Dissertation, Isparta, 2004.
[12] J. D. Hill, “On perfect summability of double sequences,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 46, 327–331, 1940.
[13] B. Hazarika, “Lacunary difference ideal convergent sequence spaces of fuzzy numbers,” *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 25, 157–166, 2013.
[14] Ö. Kişi, “Lacunary ideal convergence in measure for sequences of fuzzy valued functions,” *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 40 (3), 5517-5526, 2021.
[15] Ö. Kişi, “Lacunary statistical convergence in measure for double sequences of fuzzy valued functions,” *Hindawi, J. Math.*, 12 pages, 2021.
[16] Ö. Kişi, V. Gürdal and M. B. Huban, “Ideal statistically limit points and ideal statistically cluster points of triple sequences of fuzzy numbers,” *J. Classical Anal.*, 19 (2), 127–137, 2022.
[17] Ö. Kişi, M. B. Huban and M. Gürdal, “New results on I_2-statistically limit points and I_2-statistically cluster points of sequences of fuzzy numbers,” *Hindawi, J. Funct. Spaces*, 6 pages, 2021.
[18] I. G. Kull, “Multiplication of summable double series,” *Uch. zap. Tartusskogo un-ta*, 62, 3–59, 1958, (in Russian).
[19] P. Kumar, V. Kumar and S. S. Bhatia, “Multiple sequences of fuzzy numbers and their statistical convergence,” *Math. Sci.*, 6 (2), 1–6, 2012.
[20] J. S. Kwon and H. T. Shim, “Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers,” *Fuzzy Sets Syst.*, 123, 85–88, 2001.
[21] J. S. Kwon and S. H. Sung, “On lacunary statistical and p-Cesàro summability of fuzzy numbers,” *J. Fuzzy Math.*, 9 (3), 603–610, 2001.
[22] B. V. Limaye and M. Zeltser. “On the Pringsheim convergence of double series,” *Proc. Est. Acad. Sci.*, 58 (2), 108–121, 2009.
[23] M. Matloka, “Sequences of fuzzy numbers,” *Busefal*, 28, 28–37, 1986.
[24] F. Móricz, “Some remarks on the notion of regular convergence of multiple series,” *Acta Math. Hungarica*, 41 (1–2), 161–168, 1983.
[25] F. Móricz, “Statistical convergence of multiple sequences,” *Arch. Math.*, 81, 82–89, 2003.
[26] S. A. Mohiuddine and M. Aiyub, “Lacunary statistical convergence in random 2-normed spaces,” *Appl. Math. Inf. Sci.*, 6 (3), 581–585, 2012.
[27] M. Mursaleen and M. Başarır, “On some new sequence spaces of fuzzy numbers, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34 (9), 1351–1357, 2003.
[28] M. Mursaleen, H. M. Srivastava and S. K. Sharma, “Generalized statistically convergent sequences of fuzzy numbers,” *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 30, 1511–1518, 2016.
[29] S. Nanda, “On sequence of fuzzy numbers,” *Fuzzy Sets Syst.*, 33, 123–126, 1989.
[30] F. Nuray, “Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers *Fuzzy Sets Syst.*, 99 (3), 353–355, 1998.
[31] F. Nuray and E. Savaş, “Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers,” *Math. Slovaca*, 45 (3), 269–273, 1995.
[32] A. Pringsheim, “Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen,” *Math. Ann.*, 53, 289–321, 1900.
[33] R. T. Rockafellar and R. T.-B. Wets, *Variational Analysis*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 317, Springer-Verlag, 1997, 733 pages, third printing New York, 2009.
[34] T. Šalát, “On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca*, 30, 139–150, 1980.
[35] E. Savaş, “A note on double sequence of fuzzy numbers,” *Turk. J. Math.*, 20, 175–178, 1996.
[36] E. Savaş, “On statistically convergent sequences of fuzzy numbers,” *Inf. Sci.*, 137, 272–282, 2001.
[37] E. Savaş, “On lacunary statistically convergent double sequences of fuzzy numbers,” *Appl. Math. Lett.*, 21, 134–141, 2008.
[38] E. Savaş, “A note on double lacunary statistical sigma-convergence of fuzzy numbers,” *Soft Comput.*, 16 (4), 591–595, 2012.
[39] E. Savaş and M. Gürdal, “Generalized statistically convergent sequences of functions in fuzzy 2-normed spaces,” *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 27 (4), 2067-2075, 2014.
[40] E. Savaş and M. Mursaleen, “On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers,” *Inf. Sci.*, 162 (3–4), 183-192, 2004.
[41] E. Savaş and R. F. Patterson, “Lacunary statistical convergence of multiple sequences,” *Appl. Math. Lett.*, 19 (6), 527–534, 2006.
[42] I. J. Schoenberg, “The integrability of certain functions and related summability methods,” *Am. Math. Mon.*, 66, 361–375, 1959.
[43] A. Şahiner, M. Gürdal and F. K. Düden, “Triple sequences and their statistical convergence,” *Selcuk J. Appl. Math.*, 8 (2), 49–55, 2007.
[44] B. C. Tripathy and A. Baruah, “Lacunary statistically convergent and lacunary strongly convergent generalized difference sequences of fuzzy real numbers,” *Kyungpook Math. J.*, 50, 565–574, 2010.

[45] U. Ulusu and F. Nuray, “On strongly lacunary summability of sequences of sets,” *J. Appl. Math. Bioinform*., 3 (3), 75–88, 2013.

[46] U. Yamancı and M. Gürdal, “On lacunary ideal convergence in random normed space,” *J. Math*., 8 pages, 2013.