

# Genelleştirilmiş 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Minkowski Uzayının Yarı-Riemann Alt Manifoldları

Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Yazılım Mühendisliği, 34445, İstanbul, TÜRKİYE.

e-posta: bbektas@fsm.edu.tr. ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5611-5478>

Geliş Tarihi: 27.04.2022

Kabul Tarihi: 23.06.2022

## Öz

### Anahtar kelimeler

Genelleştirilmiş 1-Tipinden Gauss Tasviri; Dönel Yüzeyler; Minkowski Uzayı; Regle Alt Manifoldları.

Bu makalede, genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip Minkowski uzayındaki dönel yüzeyler ve regle alt manifoldları üzerine çalışılmıştır. İlk olarak, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasviri ile genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri kavramları arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra, 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit ortalama eğriliğe sahip tümünden jeodezik olmayan herhangi bir yüzeyin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamayacağı ispatlanmıştır. Diğer bölümde,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayındaki bütün dönel yüzeylerin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerle ilgili bir örnek verilmiştir. Son bölümde ise,  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayındaki regle alt manifoldları üzerine çalışılmıştır ve genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip silindirik regle alt manifoldları incelenmiştir.

## Pseudo-Riemannian Submanifolds of Minkowski Space with Generalized 1-Type Gauss Map

### Abstract

### Keywords

Generalized 1-Type Gauss Map; Rotational Surfaces; Minkowski Space; Ruled Submanifolds.

In this article, we study on rotational surfaces and regle submanifolds of the Minkowski space with generalized 1-type Gauss map. First of all, we give a relation between notions of pointwise 1-type Gauss map of the second kind and generalized 1-type Gauss map. Then, we prove that any non-totally geodesic surface in 3-dimensional Minkowski space with constant mean curvature does not have a generalized 1-type Gauss map. In other section, we show that all rotational surfaces in  $\mathbb{E}_1^3$  have generalized 1-type Gauss map. Furthermore, we give an example for the rotational surface having generalized 1-type Gauss map. In last section, we study the ruled submanifolds in the Minkowski space  $\mathbb{E}_1^m$  and we examine the cylindrical ruled submanifolds having generalized 1-type Gauss map.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

### 1. Giriş

Sonlu tipten kavramı, Euclid uzayının alt manifoldları için ilk kez B.-Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır (Chen 1973). Sonlu tipten tanımı aşağıdaki şekilde verilir:

$M$ ,  $\mathbb{E}^m$  Euclid uzayının bir alt manifoldu olmak üzere, alt manifoldun  $x$  yer vektörü  $\Delta$  Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu toplamı şeklinde ifade edilebiliyorsa,  $M$  alt manifolduna Euclid uzayının sonlu tipten alt manifoldu denir. Yani,  $x_0 \in \mathbb{E}^m$  sabit bir tasvir ve  $x_1, x_2, \dots, x_k$ 'lar ise  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  için  $\Delta x_i = \lambda_i x_i$  eşitliğini sağlayan  $\mathbb{E}^m$  uzayında sabit olmayan tasvirler olmak üzere,  $x$  vektörü

$$x = x_0 + x_1 + \dots + x_k \quad (1)$$

şeklinde bir spektral ayrışımaya sahiptir. Bu spektral açılımda  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  özdeğerleri ayrık ise, sonlu tipten  $M$  alt manifoldu  $k$ -tipinden alt manifold olarak adlandırılır. Sonlu tipten alt manifold tanımı, yarı-Euclid uzayının alt manifoldları için de benzer şekilde verilir (Chen 2011). Sonlu tipten alt manifoldların sınıflandırması ve karakterizasyonu ile ilgili literatürde birçok sonuç yer almaktadır. Elde edilen sonuçlardan bazıları için Chen (1996), Chen (2014) ve Chen (2015) kaynaklarına bakılabilir.

Sonlu tipten alt manifold tanımı daha sonra diferansiyellenebilir tasvirlerle genişletilmiş ve sonlu

tipten tasvir tanımı verilmiştir (Chen et al. 1986). Özellikle çalışmalar manifoldlar üzerinde önemli bir diferansiyellenebilir tasvir olan Gauss tasviri üzerine yoğunlaşmıştır (Chen and Piccinni 1987, Baikoussis and Blair 1992, Baikoussis et al. 1993, Baikoussis 1994, Yoon 2001). Euclid veya yarı-Euclid uzayındaki  $M$  alt manifoldunun  $G$  Gauss tasviri  $\lambda \in \mathbb{R}$  ve sabit  $C$  vektörü için,  $\Delta G = \lambda(G + C)$  eşitliğini sağlıyorsa,  $M$  alt manifolduna 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir (Chen vd. 1986, Chen and Piccinni 1987).

Ancak, zaman içinde 3-boyutlu Minkowski uzayında helikoid, Enneper yüzeyi, B-scroll ve dik çembersel koni gibi bazı özel yüzeylerin Gauss tasvirlerinin türevlenebilir  $f$  fonksiyonu ve sabit  $C$  vektörü için  $\Delta G = f(G + C)$  eşitliğini sağladığı görülmüştür (Kim and Yoon 2000, Ki et al. 2009). Bu durumda, Euclid veya yarı Euclid uzayının  $M$  alt manifoldunun  $G$  Gauss tasviri noktasal 1-tipinden olarak isimlendirilmiştir.  $\Delta G = f(G + C)$  denkleminde  $C = 0$  ise  $G$  Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1-tipinden,  $C \neq 0$  ise, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden olarak adlandırılır.

Literatüre bakıldığında, Euclid veya yarı-Euclid uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyleri ve hiperyüzeyleri ile ilgili elde edilmiş birçok sonuç bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları Choi ve Kim (2001), Kim ve Yoon (2004), Chen vd. (2005), Dursun (2007), Arslan vd. (2011), Dursun (2009), Ki vd. (2009), Dursun ve Bektaş (2014), Aksoyak ve Yaylı (2015), Bektaş ve Dursun (2015), Turgay (2015), Arslan ve Milousheva (2016), Milousheva ve Turgay (2016), Jung ve Kim (2018) ve İlim ve Öztürk (2019) ile verilir.

Daha sonra ise, bazı yüzeylerin Gauss tasvirlerinin 1-tipinden veya noktasal 1-tipinden tanımını sağlamadığı görülmüştür. Bu nedenle, Yoon vd. (2018) çalışmasında 1-tipinden ve noktasal 1-tipinden Gauss tasviri kavramının bir genellemesi olan genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri tanımını vermişlerdir. Genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri tanımı aşağıdaki şekildedir:

Euclid veya yarı-Euclid uzayının  $M$  alt manifoldunun Gauss tasviri  $G$ ,  $M$  üzerinde türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $C$  sabit vektörü için,

$$\Delta G = fG + gC \quad (2)$$

denklemini sağlıyorsa,  $M$  alt manifoldu genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Bu tanımda, türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları sıfırdan farklı sabit ise, 1-tipinden Gauss tasviri,  $f$  ve  $g$  fonksiyonları birbirine eşit ve sabit değil ise noktasal 1-tipinden Gauss tasviri kavramları elde edilir. Dolayısıyla, genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri kavramı 1-tipinden ve noktasal 1-tipinden tanımlarının genellemesi olduğu görülür. Ayrıca, eğer  $f$  ve  $g$  türevlenebilir fonksiyonları sıfır ise Gauss tasviri harmoniktir. Bu nedenle, bu çalışmada genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri tanımında  $f$  ve  $g$  sıfırdan farklı türevlenebilir fonksiyonlar olarak alınacaktır.

Genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri kavramı verildikten sonra, Euclid ve yarı-Euclid uzayındaki yüzeyler ve hiperyüzeyler için bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Yoon vd. (2018) 3-boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip farklı yüzey aileleri ile ilgili sınıflandırma teoremleri elde etmişlerdir. Daha sonra, Yoon vd. (2018) 3-boyutlu Euclid uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip konik ve silindirik yüzeylerin karakterizasyonları yapmışlardır ve Euclid uzayında bütün silindirik regle hiperyüzeylerin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, Choi ve Kim (2018) çalışmasında  $\mathbb{E}^3$  ve  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip silindirik ve silindirik olmayan regle yüzeylerin sınıflandırması yapmışlardır.

Daha sonra, Qian vd. (2020) çalışmasında ise, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip null scroll yüzeyleri için sınıflandırma teoremleri elde etmişlerdir. Ayrıca, Qian vd. (2021),  $\mathbb{E}^3$  uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler ve kanal yüzeyleriyle ilgili sonuçlar elde edilmişler ve genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bu yüzeylerle ilgili örnekler vermişlerdir.

Bu çalışmada ise, genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip Minkowski uzayının yarı-Riemann alt manifoldları üzerine sonuçlar elde edilecektir. İlk olarak, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasviri ile genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri kavramları arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Daha sonra, 3-boyutlu Minkowski uzayında tümünden

jeodezik olmayan sabit ortalama eğriliğe sahip herhangi bir yüzeyin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamayacağı gösterilecektir. Diğer bölümde ise, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki 4 tip dönel yüzey üzerine çalışacaktır. Bu dönel yüzeylerin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilecektir ve bu dönel yüzeyler için (2) denklemini sağlayan türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $C$  sabit vektörü belirlenecektir. Elde edilen sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir dönel yüzey örneği ve Wolfram Mathematica 9.0<sup>®</sup> programı kullanılarak oluşturulmuş grafiği verilecektir. Son kısımda,  $\mathbb{E}_1^m$  uzayındaki regle alt manifoldları üzerine çalışılacak ve genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip silindirik regle alt manifoldları incelenecektir.

## 2. Materyal ve Metot

Bu bölümde, bu çalışma boyunca kullanılacak olan temel kavramlardan ve teoremlerden bahsedilecektir. Daha detaylı bilgi için O'Neill (1983) kitabına bakılabilir.

$(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere,  $\mathbb{E}_s^m$  aşağıda verilen metriğe sahip bir uzay olsun.

$$g = -\sum_{i=1}^s dx_i^2 + \sum_{j=s+1}^m dx_j^2. \quad (3)$$

$(\mathbb{E}_s^m, g)$  uzayına  $m - s$  boyutlu,  $s$  -indeksli yarı-Euclid uzayı denir.  $s = 1$  ise,  $(\mathbb{E}_1^m, g)$  uzayına  $m$  -boyutlu Minkowski uzayı denir.

$v \in \mathbb{E}_s^m$  olmak üzere,  $v = 0$  veya  $\langle v, v \rangle > 0$  ise,  $v$  vektörüne uzaysal,  $\langle v, v \rangle < 0$  ise,  $v$  vektörüne zamansal,  $\langle v, v \rangle = 0$  ise  $v$  vektörüne ışıksaldır denir. Bu durumda,  $v \in \mathbb{E}_s^m$  vektörünün normu  $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$  şeklinde tanımlanır.

$M, \mathbb{E}_s^m$  Minkowski uzayının yönlendirilmiş  $n$  -boyutlu  $p$  indeksli bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun.  $\nabla$  ve  $\tilde{\nabla}$  sırasıyla  $M$  ve  $\mathbb{E}_s^m$  uzayının Levi-Civita konneksiyonları göstermek üzere, Gauss ve Weingarten formülleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (4)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + D_X \xi. \quad (5)$$

Burada,  $X, Y$  teğet vektör alanlarını,  $\xi$  normal vektör alanını,  $h$  ikinci esas formu,  $A_\xi, \xi$  vektörü doğrultusundaki şekil operatörünü ve  $D$  normal konneksiyonu göstermektedir.  $h$  ikinci esas formu ve  $A_\xi$  şekil operatörü arasındaki ilişki

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \quad (6)$$

denklemleri ile verilir.

$\mathbb{E}_s^m$  uzayında,  $M$  yarı-Riemann alt manifoldu üzerinde  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektörleri  $M$ 'ye teğet ve  $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_m$  vektörleri  $M$ 'ye normal olmak üzere,  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  şeklinde ortonormal bir çatı alanı seçilebilir. Burada,  $i, j = 1, 2, \dots, m$  olmak üzere,  $\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i = \pm 1$  ve  $i \neq j$  için  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  dır. Bu durumda,  $M$  alt manifoldunun  $\mathbb{E}_s^m$  uzayındaki ortalama eğrilik vektör alanı

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(e_i, e_i) \quad (7)$$

şeklinde tanımlanır.  $\vec{H} = 0$  ise,  $\mathbb{E}_s^m$  uzayındaki  $M$  yarı-Riemann alt manifoldu minimal olarak isimlendirilir.  $h$  sıfıra eşit ise,  $M$  yarı-Riemann alt manifoldu tümten jeodeziktir. Ayrıca,  $M$  üzerindeki türevlenebilir  $f$  fonksiyonun gradiyenti

$$\text{grad}(f) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i(f) e_i \quad (8)$$

ve  $M$  yarı-Riemann alt manifoldu üzerindeki indirgenmiş metrikten elde edilen Laplace operatörü

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\nabla_{e_i} e_i - e_i e_i) \quad (9)$$

şeklinde tanımlanır.

$G(n, m), \mathbb{E}_s^m$  uzayında orjinden geçen yönlendirilmiş tüm  $n$  -düzlemleri içeren Grassmaniye manifoldu olmak üzere,  $M$  yarı-Riemann alt manifoldu üzerinde Gauss tasviri  $G$  aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$G: M \rightarrow G(n, m) \subset \mathbb{E}_t^N$$

$$p \rightarrow (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)(p). \quad (10)$$

Burada,  $N = \binom{m}{n}$  dir. Yani,  $G$  Gauss tasviri,  $M$  üzerindeki bir  $p$  noktasını  $M$ 'nin  $p$  noktasındaki teğet uzayının paralel kaydırılması sonucu elde edilen  $n$ -düzlemine götüren türevlenebilir bir tasvirdir (Chen and Piccinni 1987). Benzer şekilde, Gauss tasviri,  $M$  yarı-Riemann alt manifoldunun normal vektörleri kullanılarak da tanımlanabilir (Kim and Yoon 2004).

$M$  yarı-Riemann alt manifoldunun,  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayının hiperyüzeyi olması durumunda,  $G$  Gauss tasvirinin Laplasiyeni aşağıdaki teorem ile verilmiştir (Dursun 2009).

**Teorem 2.1. (Dursun 2009)**  $M$ ,  $\mathbb{E}_1^{n+1}$  Minkowski uzayının hiperyüzeyi olmak üzere,  $M$  hiperyüzeyinin Gauss tasviri  $G$ 'nin Laplasiyeni

$$\Delta G = \varepsilon_G \|A_G\|^2 G + n \text{grad}(H) \quad (11)$$

şeklindedir. Burada,  $A_G$ ,  $M$  hiperyüzeyinin  $G$  Gauss tasviri boyunca şekil operatörü,  $\|A_G\|^2 = \text{tr}(A_G A_G)$ ,  $H$ ,  $M$ 'nin ortalama eğriliği ve  $\langle G, G \rangle = \varepsilon_G$ 'dir.

$M$ ,  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayının dejenere olmayan bir yüzeyi olsun.  $\{e_1, e_2\}$ ,  $M$  üzerinde teğet ortonormal bir çatı alanı olmak üzere,  $\mathbb{E}_1^3$ 'teki  $C$  vektörü  $\{e_1, e_2, G\}$  bazına göre

$$C = \varepsilon_1 C_1 e_1 + \varepsilon_2 C_2 e_2 + \varepsilon_G C_G G \quad (12)$$

şeklinde yazılır.  $C$  vektörünün sabit olması için sağlaması gereken eşitliklerle ilgili aşağıdaki yardımcı teorem verilmiştir (Dursun and Coşkun 2012).

**Yardımcı Teorem 2.2. (Dursun and Coşkun 2012)**

(12) denklemi ile verilen  $C$  vektörünün sabit olabilmesi için,  $C$ 'nin bileşenlerinin aşağıda verilen denklemleri sağlaması gerekir.

$$e_1(C_1) + \varepsilon_2 \omega_{21}(e_1) C_2 - \varepsilon_G h_{11}^3 C_G = 0, \quad (13)$$

$$e_1(C_2) + \varepsilon_1 \omega_{12}(e_1) C_1 - \varepsilon_G h_{12}^3 C_G = 0, \quad (14)$$

$$e_1(C_G) + \varepsilon_1 h_{11}^3 C_1 + \varepsilon_2 h_{12}^3 C_2 = 0, \quad (15)$$

$$e_2(C_1) + \varepsilon_2 \omega_{21}(e_2) C_2 - \varepsilon_G h_{21}^3 C_G = 0, \quad (16)$$

$$e_2(C_2) + \varepsilon_1 \omega_{12}(e_2) C_1 - \varepsilon_G h_{22}^3 C_G = 0, \quad (17)$$

$$e_2(C_G) + \varepsilon_1 h_{12}^3 C_1 + \varepsilon_2 h_{22}^3 C_2 = 0. \quad (18)$$

Ayrıca,  $M$ ,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayının dejenere olmayan bir yüzeyi olması durumunda Gauss eğriliği  $K$  aşağıdaki şekilde verilir:

$$K = \varepsilon_G \det(A_G). \quad (19)$$

$K = 0$  ise,  $M$  yüzeyi düz olarak isimlendirilir.

### 3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri ile ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasviri arasındaki ilişki kurulacaktır. Daha sonrasında,  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler üzerine çalışılacaktır.

Genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri ile ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasviri arasındaki bağlantı için öncelikle  $\mathbb{E}_1^3$  uzayındaki dik koni örneği verilecektir.

**Örnek 3.1.** (Kim et al. 2009)  $M$ ,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında aşağıdaki denklemlerle parametrizasyonu verilen bir dik koni yüzeyi olsun.

$$X(u, v) = (au, u \cos v, u \sin v) \quad (20)$$

Burada,  $u > 0$  ve  $a > 1$  dür.  $M$  yüzeyinin Gauss tasviri  $G$  aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$G = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}(1, a \cos u, a \sin u) \quad (21)$$

ve  $G$ 'nin Laplasiyeni

$$\Delta G = \frac{1}{u^2} \left( G + \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}, 0, 0 \right) \right) \quad (22)$$

şeklinde bulunur. Böylece,  $G$  tasvirinin  $f(u) = \frac{1}{u^2}$  fonksiyonu ve  $C = \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}, 0, 0 \right)$  sabit vektörü için,  $\Delta G = f(G + C)$  denklemini sağladığı görülür. Dolayısıyla,  $M$  yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Diğer taraftan, (22) ile verilen denklem

$$\Delta G = \frac{1}{u^2} G + \frac{1}{u^2 \sqrt{a^2 - 1}} (1, 0, 0) \quad (23)$$

olarak da yazılabilir. Bu durumda ise,  $f(u) = \frac{1}{u^2}$  ve  $g(u) = \frac{1}{u^2 \sqrt{a^2 - 1}}$  fonksiyonları ve  $C = (1, 0, 0)$  sabit vektörü için,  $G$  Gauss tasviri (2) denklemini sağlar. Yani,  $f \neq g$  fonksiyonları için,  $M$  yüzeyi genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Burada,  $\frac{f}{g} = \sqrt{a^2 - 1}$ , yani sıfırdan farklı bir sabit olduğu görülür.

Bu örnekten yararlanılarak,  $\mathbb{E}_s^m$  yarı-Euclid uzayının yarı-Riemann alt manifoldu için, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasviri ile genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

**Teorem 3.2.** Yarı-Euclid uzayının yarı-Riemann alt manifoldunun Gauss tasviri için aşağıda verilen ifadeler denktir:

- (i.)  $f$  sıfırdan farklı türevlenebilir fonksiyon ve  $C$  ışksal olmayan sabit vektör olmak üzere, Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1-tipindedir.
- (ii.)  $f, g$  sıfırdan farklı ve birbiriyle orantılı türevlenebilir fonksiyonlar ve  $C$  ışksal olmayan sabit vektörü olmak üzere, Gauss tasviri genelleştirilmiş 1-tipindedir.

**İspat.**  $M, \mathbb{E}_s^m$  yarı-Euclid uzayının yarı-Riemann alt manifoldu ve  $G, M'$ 'nin Gauss tasviri olsun.

(i)  $\rightarrow$  (ii)  $G$  Gauss tasviri, sıfırdan farklı türevlenebilir  $f$  fonksiyonu ve ışksal olmayan  $C$  vektörü için,  $\Delta G = f(G + C)$  denklemini sağlar. Bu durumda,  $C \in \mathbb{E}_s^m$  ışksal olmayan sabit bir vektör olduğundan,  $\tilde{C} = \frac{C}{\|C\|}$  şeklinde  $\mathbb{E}_s^m$ 'de  $\tilde{C}$  sabit vektörü tanımlanabilir. Böylece, sıfırdan farklı türevlenebilir  $f$  ve  $g = \|C\|f$  fonksiyonları ve ışksal olmayan sabit  $\tilde{C}$  vektörü için,  $G$  Gauss tasviri (2) denklemini sağlar. Yani,  $G$  Gauss tasviri genelleştirilmiş 1-tipindedir.

(ii)  $\rightarrow$  (i)  $G$  Gauss tasviri sıfırdan farklı birbiriyle orantılı türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve ışksal olmayan sabit  $C$  vektörü için, (2) denklemini

sağlasın. Bu durumda, sıfırdan farklı  $\alpha$  sabiti için,  $g = \alpha f$  şeklinde yazılır ve  $\Delta G = f(G + \alpha C)$  ifadesi elde edilir. Böylece,  $G$  Gauss tasvirinin türevlenebilir  $f$  fonksiyonu ve  $\alpha C$  sabit vektörü için, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3.**  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında sabit ortalama eğriliğe sahip tüm den jeodezik olmayan bir yüzey genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

**İspat.**  $M, \mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında tüm den jeodezik olmayan ve  $H$  sabit ortalama eğriliğine sahip bir yüzey olsun.  $M$  yüzeyinin Gauss tasviri genelleştirilmiş 1-tipinden ise, (2), (8), (11) ve (12) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\varepsilon_G f + g C_G = \|A_G\|^2, \quad (24)$$

$$g C_1 = 2e_1(H), \quad (25)$$

$$g C_2 = 2e_2(H). \quad (26)$$

$H$  sabit olduğundan, (25) ve (26) denklemlerinden  $g C_1 = g C_2 = 0$  olur. Diğer taraftan,  $G$  Gauss tasviri genelleştirilmiş 1-tipinden ise, türevlenebilir  $g$  fonksiyonu sıfırdan farklı olmalıdır. Dolayısıyla,  $C_1 = C_2 = 0$  olur. Bu durum, (13)-(18) denklemlerinde kullanılırsa,

$$h_{11}^3 C_G = h_{12}^3 C_G = h_{22}^3 C_G = 0, \quad (27)$$

$$e_1(C_G) = e_2(C_G) = 0 \quad (28)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan, (28) denkleminde  $C_G$  bileşeninin sıfırdan farklı bir sabit olduğu görülür. Dolayısıyla, (27) denkleminde  $h_{11}^3 = h_{12}^3 = h_{22}^3 = 0$ , yani,  $M$  yüzeyi tüm den jeodezik olur. Bu nedenle,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında sabit ortalama eğriliğe sahip tüm den jeodezik olmayan  $M$  yüzeyi genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki ispattan,  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında sabit ortalama eğriliğe sahip tüm den jeodezik olmayan bir yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür.

### 3.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Genelleştirilmiş 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Dönel Yüzeyler

Ki vd. (2009) çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında birinci çeşit ve ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler için sonuçlar elde etmişlerdir. Bu bölümde ise, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki dönel yüzeylerden genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar incelenecektir. Bu nedenle, ilk olarak bu dönel yüzeylerin parametrisasyonları ve yüzeylere ait geometrik büyüklükler verilecektir.

$I \subset \mathbb{R}$  açık bir aralık olmak üzere,  $\alpha: I \rightarrow \Pi \subset \mathbb{E}_1^3$  düzlemsel düzgün bir eğri ve  $\ell$ ,  $\Pi$  düzleminde  $\alpha$  eğrisini kesmeyen bir doğru olsun. Bu durumda,  $\ell$  doğrusunu tamamiyle sabit bırakan  $T_1$ ,  $T_2$  ve  $T_3$  dönüşümleri altında değişmez kalan yüzeye  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında  $\ell$  dönme eksenine sahip dönel yüzey denir. Ayrıca, burada  $\alpha$  eğrisine dönel yüzeyin profil eğrisi denir.  $T_1$ ,  $T_2$  ve  $T_3$  dönüşümleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (30)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$t \in \mathbb{R}$ .

Böylece,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında dönel yüzeylerin parametrisasyonları sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir (Ki vd. 2009).

*Durum I:* Dönme eksen  $\ell_1$  uzaysal bir doğru olsun. Yani,  $\ell_1$  üretici  $(0, 0, 1)$  uzaysal vektörü olan bir doğrudur. Genelliği bozmaksızın,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayının 2 –boyutlu alt uzayında uzanan iki farklı düzgün eğri seçilebilir. Bu durumda, bu eğrilerinden birini profil eğrisi olarak kabul eden ve (29) denklemi ile verilen  $T_1$  dönüşümü altında değişmez kalan iki çeşit dönel yüzey tanımlanır.

*Durum II(a):*  $\alpha$ , yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş

$$\alpha(s) = (0, \phi(s), \psi(s)) \quad (32)$$

şeklinde verilen düzgün bir eğri olsun. Yani,  $\phi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$  olur. Bu durumda,  $x_2x_3$  – düzleminde uzanan  $\alpha$  eğrisini profil eğrisi olarak kabul eden ve  $T_1$  dönüşümü altında değişmez kalan  $M$  dönel yüzeyinin bir parametrisasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$X(s, t) = (\phi(s) \sinh t, \phi(s) \cosh t, \psi(s)) \quad (33)$$

Burada,  $t \in \mathbb{R}$  dir.  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında,  $e_1, e_2$  vektörleri  $M$  yüzeyine teğet,  $G$  vektörü  $M$  yüzeyine normal olmak üzere,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{\phi(s)} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \phi(s) > 0, \quad (34)$$

$$G = (\psi'(s) \sinh t, \psi'(s) \cosh t, -\phi'(s)) \quad (35)$$

şeklinde  $M$  yüzeyi için  $\{e_1, e_2, G\}$  ortonormal bir çatı alanı seçilebilir. Burada,  $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle G, G \rangle = -\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  şeklindedir. Böylece, (33) denklemi ile verilen  $M$  dönel yüzeyinin daima zamansal bir yüzey olduğu görülür. Bu dönel yüzeye ait Levi-Civita konneksiyonları

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -\kappa G, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \frac{\phi'}{\phi} e_2, \quad (36)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{1}{\phi} (\phi' e_1 + \psi' G), \quad (37)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} G = \kappa e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} G = \frac{\psi'}{\phi} e_2 \quad (38)$$

denklemleri ile verilir. Burada,  $\kappa$  profil eğrisi  $\alpha$ 'nın eğriliğidir ve  $\kappa = \phi' \psi'' - \phi'' \psi'$  ifadesi ile verilir. Böylece, (7) ve (19) denklemlerinden  $\mathbb{E}_1^3$  uzayındaki  $M$  yüzeyine ait ortalama eğrilik  $H$  ve Gauss eğriliği  $K$  sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$H = -\frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{\psi'}{\phi} \right), \quad (39)$$

$$K = -\frac{\phi''}{\phi}. \quad (40)$$

(11) denkleminde  $G$  Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta G = \left( \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2} \right) G - \left( \kappa' + \frac{\psi''}{\phi} - \frac{\psi'\phi'}{\phi^2} \right) e_1 \quad (41)$$

olarak hesaplanır.

Şimdi,  $M$  yüzeyinin Gauss tasvirinin genelleştirilmiş 1-tipinden olması durumu incelenecektir.

(35) denklemi ile verilen  $G$  Gauss tasvirinin genelleştirilmiş 1-tipinden olduğu varsayalım. Bu durumda, (2), (12) ve (41) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$f + gC_G = \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2}, \quad (42)$$

$$gC_1 = -\kappa' - \frac{\psi''}{\phi} + \frac{\psi'\phi'}{\phi^2}, \quad (43)$$

$$gC_2 = 0. \quad (44)$$

$g$  sıfırdan farklı olduğundan, (44) denkleminde  $C_2 = 0$  olarak bulunur.  $C_2 = h_{12}^3 = 0$  olduğu, (16) ve (18) denklemlerinde kullanılırsa,  $e_2(C_1) = e_2(C_G) = 0$  olarak bulunur. Dolayısıyla, sabit  $C$  vektörünün,  $C_1$  ve  $C_G$  bileşenleri sadece  $s$ 'ye bağlıdır. Bu durumda, (13), (15) ve (17) denklemlerinden

$$C_1' = -\kappa C_G, \quad (45)$$

$$C_G' = \kappa C_1, \quad (46)$$

$$\phi'(s)C_1 + \psi'(s)C_G = 0 \quad (47)$$

ifadeleri elde edilir. (45) ve (46) denklemlerinden sıfırdan farklı  $d$  sabiti için,  $C_1^2 + C_G^2 = d^2$  olarak bulunur. Dolayısıyla,  $C$  sabit vektörü uzaysal bir vektördür. Profil eğrisinin tanımlandığı  $I$  aralığı üzerinde,  $\phi'(s) \neq 0$  dir. Dolayısıyla,  $C_1^2 + C_G^2 = d^2$  eşitliği (47) denklemiyle birlikte göz önüne alınırsa

$$C_1 = \pm d\psi'(s), \quad C_G = \mp d\phi'(s) \quad (48)$$

olarak bulunur. Bu durumda, (12), (34), (35) ve (48) denklemlerinden sabit  $C \in \mathbb{E}_1^3$  vektörü

$$C = \pm d(0, 0, 1) \quad (49)$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla,  $C$ ,  $\ell_1$  doğrusuna paraleldir. Ayrıca, (42) ve (43) denklemlerinden (2) denklemini sağlayan türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları

$$f(s) = \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2} \quad (50)$$

$$- \frac{\phi'}{\psi'} \left( \kappa' + \frac{\psi''}{\phi} - \frac{\psi'\phi'}{\phi^2} \right),$$

$$g(s) = \pm \frac{1}{d\psi'} \left( \kappa' + \frac{\psi''}{\phi} - \frac{\psi'\phi'}{\phi^2} \right) \quad (51)$$

şeklinde bulunur.

*Durum I(b):*  $\alpha_1$ , yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş

$$\alpha_1(s) = (\phi(s), 0, \psi(s)) \quad (52)$$

şeklinde verilen düzgün bir eğri olsun. Yani,  $\psi'^2(s) - \phi'^2(s) = \varepsilon = \pm 1$  dir.  $x_1x_3$  -düzleminde uzanan  $\alpha_1$  eğrisini profil eğrisi olarak kabul eden ve  $T_1$  dönüşümü altında değişmez kalan  $M_1$  dönel yüzeyinin bir parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$X_1(s, t) = (\phi(s) \cosh t, \phi(s) \sinh t, \psi(s)). \quad (53)$$

Burada,  $t \in \mathbb{R}$  dir.  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında,  $e_1, e_2$  vektörleri  $M_1$  yüzeyine teğet,  $G$  vektörü  $M_1$  yüzeyine normal olmak üzere,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{\phi(s)} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \phi(s) > 0, \quad (54)$$

$$G = (\psi'(s) \cosh t, \psi'(s) \sinh t, \phi'(s)) \quad (55)$$

şeklinde  $M_1$  yüzeyi için  $\{e_1, e_2, G\}$  şeklinde bir ortonormal çatı alanı seçilebilir. Burada,  $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle G, G \rangle = \varepsilon$  ve  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  dir.  $\varepsilon = 1$  ise,  $M_1$  yüzeyi uzaysal;  $\varepsilon = -1$  ise,  $M_1$  yüzeyi zamansal bir yüzey olur. Bu dönel yüzeye ait Levi-Civita konneksiyonları

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -\varepsilon\kappa G, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \frac{\phi'}{\phi} e_2, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= \frac{\varepsilon}{\phi} (-\phi' e_1 \\ &+ \psi' G), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} G = -\varepsilon\kappa e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} G = \frac{\psi'}{\phi} e_2 \quad (58)$$

denklemleri ile verilir. Burada,  $\kappa$  profil eğrisi  $\alpha_1$ 'in eğriliğidir ve  $\kappa = \phi'\psi'' - \phi''\psi'$  eşitliği ile verilir. Böylece, (7) ve (19) denklemlerinden  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında  $M_1$  yüzeyine ait ortalama eğrilik  $H$  ve Gauss eğriliği  $K$  sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$H = \frac{1}{2} \left( \varepsilon\kappa - \frac{\psi'}{\phi} \right), \quad (59)$$

$$K = \varepsilon \frac{\phi''}{\phi}. \quad (60)$$

(11) denklemden  $G$  Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\begin{aligned} \Delta G = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2} \right) G \\ + \left( \kappa' - \varepsilon \frac{\psi''}{\phi} + \varepsilon \frac{\psi'\phi'}{\phi^2} \right) e_1 \end{aligned} \quad (61)$$

olarak elde edilir.

Şimdi,  $M_1$  yüzeyinin Gauss tasvirinin genelleştirilmiş 1-tipinden olması durumu incelenecektir.

(55) denklemi ile verilen  $G$  Gauss tasviri genelleştirilmiş 1-tipinden olduğu varsayalım. Bu durumda, (2), (12) ve (61) denklemlerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$f - \varepsilon g C_G = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2} \right), \quad (62)$$

$$g C_1 = \varepsilon \kappa' - \frac{\psi''}{\phi} + \frac{\psi'\phi'}{\phi^2}, \quad (63)$$

$$g C_2 = 0. \quad (64)$$

$g$  fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan, (64) denklemden  $C_2 = 0$  olarak bulunur.  $C_2 = h_{12}^3 = 0$  olduğu (16) ve (18) denklemlerinde kullanılırsa,

$e_2(C_1) = e_2(C_G) = 0$  olarak bulunur. Dolayısıyla,  $C$  vektörünün,  $C_1$  ve  $C_G$  bileşenleri sadece  $s$ 'ye bağlıdır. Bu durumda, (13), (15) ve (17) denklemlerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$C_1' = -\varepsilon\kappa C_G, \quad (65)$$

$$C_G' = -\varepsilon\kappa C_1, \quad (66)$$

$$\phi'(s)C_1 - \psi'(s)C_G = 0. \quad (67)$$

Buradan, (65) ve (66) denklemleri kullanılarak,  $d$  sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,  $C_1^2 - C_G^2 = d$  elde edilir. Profil eğrisinin tanımlandığı  $I$  aralığı üzerinde,  $\phi'(s) \neq 0$  dir. Bu durumda, (67) denklemden

$$C_1 = \pm\sqrt{\varepsilon d}\psi'(s), \quad C_G = \pm\sqrt{\varepsilon d}\phi'(s) \quad (68)$$

olarak bulunur. Burada,  $\varepsilon d > 0$  olur. Ayrıca,  $\varepsilon = 1$  ise, sabit  $C$  vektörü uzaysal ve  $\varepsilon = -1$  ise, sabit  $C$  vektörü zamansal bir vektördür. (12), (54), (55) ve (68) denklemlerinden sabit  $C$  vektörünün

$$C = \pm\sqrt{\varepsilon d}(0, 0, 1) \quad (69)$$

şeklinde olduğu görülür. Yani,  $C$  vektörü  $\ell_1$  doğrusuna paraleldir. Ayrıca, (62) ve (63) denklemlerinden (2) eşitliğini sağlayan türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları

$$f(s) = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2} \right) \quad (70)$$

$$+ \varepsilon \frac{\phi'}{\psi'} \left( \kappa' - \frac{\psi''}{\phi} + \frac{\psi'\phi'}{\phi^2} \right),$$

$$g(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon d}\psi'} \left( \varepsilon\kappa' - \frac{\psi''}{\phi} + \frac{\psi'\phi'}{\phi^2} \right) \quad (71)$$

olarak bulunur.

*Durum II:* Dönme eksenini  $\ell_2$  zamansal bir doğru olsun. Yani,  $\ell_2$  üretici  $(1, 0, 0)$  zamansal vektörü olan doğrudur.  $\alpha_2$ , yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş

$$\alpha_2(s) = (\phi(s), \psi(s), 0) \quad (72)$$

şeklinde verilen düzgün bir eğri olsun. Yani,  $\psi'^2(s) - \phi'^2(s) = \varepsilon = \pm 1$  dir.  $x_1x_2$ -düzleminde uzanan  $\alpha_2$  eğrisini profil eğrisi olarak kabul eden ve



(30) denklemi ile verilen  $T_2$  dönüşümü altında değişmez kalan  $M_2$  dönel yüzeyinin bir parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$X_2(s, t) = (\phi(s), \psi(s) \cos t, \psi(s) \sin t). \quad (73)$$

Burada,  $0 \leq t < 2\pi$  dir.  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında,  $e_1, e_2$  vektörleri  $M_2$  yüzeyine teğet,  $G$  vektörü  $M_2$  yüzeyine normal olmak üzere,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{\psi(s)} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \psi(s) > 0, \quad (74)$$

$$G = -(\psi'(s), \phi'(s) \cos t, \phi'(s) \sin t) \quad (75)$$

şeklinde  $M_2$  yüzeyi üzerinde  $\{e_1, e_2, G\}$  ortonormal bir çatı alanı seçilebilir. Burada,  $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle G, G \rangle = \varepsilon$  ve  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  dir.  $\varepsilon = 1$  ise,  $M_2$  yüzeyi uzaysal;  $\varepsilon = -1$  ise,  $M_2$  yüzeyi zamansal bir yüzey olur. Bu yüzeye ait Levi-Civita konneksiyonları

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \varepsilon \kappa G, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \frac{\psi'}{\psi} e_2, \quad (76)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = -\frac{\varepsilon}{\psi} (\psi' e_1 + \phi' G), \quad (77)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} G = \varepsilon \kappa e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} G = -\frac{\phi'}{\psi} e_2 \quad (78)$$

denklemleri ile verilir. Burada,  $\kappa, \alpha_2$  profil eğrisinin eğriliğidir ve  $\kappa = \phi' \psi'' - \psi' \phi''$  ifadesi ile verilir. Böylece, (7) ve (19) denklemlerinden  $\mathbb{E}_1^3$  uzayındaki  $M_2$  yüzeyine ait ortalama eğrilik  $H$  ve Gauss eğriliği  $K$  sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$H = -\frac{1}{2} \left( \varepsilon \kappa - \frac{\phi'}{\psi} \right), \quad (79)$$

$$K = -\varepsilon \frac{\psi''}{\psi}. \quad (80)$$

(11) denkleminde  $M_2$  dönel yüzeyine ait  $G$  Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta G = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{\phi'^2}{\psi^2} \right) G \quad (81)$$

$$-\left( \kappa' - \varepsilon \frac{\phi''}{\psi} + \varepsilon \frac{\psi' \phi'}{\psi^2} \right) e_1$$

olarak elde edilir.

Şimdi,  $M_2$  yüzeyinin Gauss tasvirinin genelleştirilmiş 1-tipinden olması durumu incelenecektir.

(75) denklemi ile verilen  $G$  Gauss tasvirinin genelleştirilmiş 1-tipinden olduğu varsayalım. Bu durumda, (2), (12) ve (81) denklemlerinden

$$f - \varepsilon g C_G = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{\phi'^2}{\psi^2} \right), \quad (82)$$

$$g C_1 = -\varepsilon \kappa' + \frac{\phi''}{\psi} - \frac{\psi' \phi'}{\psi^2}, \quad (83)$$

$$g C_2 = 0 \quad (84)$$

eşitlikleri elde edilir.  $g \neq 0$  olduğundan, (84) denkleminde  $C_2 = 0$  bulunur.  $C_2 = h_{12}^3 = 0$  olduğu, (16) ve (18) denklemlerinde kullanılırsa,  $e_2(C_1) = e_2(C_G) = 0$  olarak bulunur. Dolayısıyla,  $C$  vektörünün,  $C_1$  ve  $C_G$  bileşenleri sadece  $s$ 'ye bağlıdır. Bu durumda, (13), (15) ve (17) denklemlerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$C_1' = \varepsilon \kappa C_G, \quad (85)$$

$$C_G' = \varepsilon \kappa C_1, \quad (86)$$

$$\psi'(s) C_1 + \phi'(s) C_G = 0 \quad (87)$$

denklemleri bulunur. (85) ve (86) eşitliklerinden, sıfırdan farklı  $d$  sabiti için,  $C_1^2 - C_G^2 = d$  elde edilir. Profil eğrisinin tanımlandığı  $I$  aralığı üzerinde,  $\psi'(s) \neq 0$  dir. (87) denklemi bu eşitlikle göz önüne alınırsa,

$$C_1 = \pm \sqrt{-\varepsilon d} \phi'(s) \quad C_G = \mp \sqrt{-\varepsilon d} \psi'(s) \quad (88)$$

olarak bulunur. Burada,  $\varepsilon d < 0$  dür. Ayrıca,  $\varepsilon = 1$  ise, sabit  $C$  vektörü zamansal ve  $\varepsilon = -1$  ise, sabit  $C$  vektörü uzaysal bir vektördür. (12), (74), (75) ve (88) denklemlerinden

$$C = \pm \sqrt{-\varepsilon d} (1, 0, 0) \quad (89)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, sabit  $C$  vektörü  $\ell_2$  doğrusuna paraleldir. Ayrıca, (82) ve (83) denklemlerinden (2) eşitliğini sağlayacak türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları

$$f(s) = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{\psi'^2}{\phi^2} \right) + \frac{\psi'}{\phi'} \left( \kappa' - \varepsilon \frac{\phi''}{\psi} + \varepsilon \frac{\psi' \phi'}{\psi^2} \right), \quad (90)$$

$$g(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon d\phi'}} \left( \varepsilon \kappa' - \frac{\phi''}{\psi} + \frac{\psi' \phi'}{\psi^2} \right) \quad (91)$$

olarak bulunur.

*Durum III:* Dönme eksenini  $\ell_3$  ışık sal bir doğru olsun. Yani,  $\ell_3$  üretici  $(1, 1, 0)$  ışık sal vektörü olan bir doğrudur.  $\alpha_3$ , yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş

$$\alpha_3(s) = (\phi(s), \psi(s), 0) \quad (92)$$

şeklinde verilen düzgün bir eğri olsun. Yani,  $\psi'^2(s) - \phi'^2(s) = \varepsilon = \pm 1$  dir.  $x_1 x_2$  -düzleminde uzanan  $\alpha_3$  eğrisini profil eğrisi olarak kabul eden ve (31) denklemi ile verilen  $T_3$  dönüşümü altında değişmez kalan  $M_3$  dönel yüzeyinin bir parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$X_3(s, t) = \left( \phi + \frac{t^2}{2} h, \psi + \frac{t^2}{2} h, th \right). \quad (93)$$

Burada,  $h(s) = \phi(s) - \psi(s) \neq 0$  şeklindedir.  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında,  $e_1, e_2$  vektörleri  $M_3$  yüzeyine teğet,  $G$  vektörü  $M_3$  yüzeyine normal olmak üzere,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial t}; \quad h(s) > 0, \quad (94)$$

$$G = \left( \frac{t^2}{2} h' - \psi', \frac{t^2}{2} h' - \phi', th' \right) \quad (95)$$

şeklinde  $M_3$  yüzeyi üzerinde  $\{e_1, e_2, G\}$  ortonormal bir çatı alanı seçilebilir. Burada,  $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle G, G \rangle = \varepsilon$  ve  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  dir.  $\varepsilon = 1$  ise,  $M_3$  yüzeyi uzaysal;  $\varepsilon = -1$  ise,  $M_3$  yüzeyi zamansal bir yüzey olur. Bu yüzeye ait Levi-Civita konneksiyonları

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \varepsilon \kappa G, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \frac{h'}{h} e_2, \quad (96)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = -\varepsilon \frac{h'}{h} (e_1 - G), \quad (97)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} G = \varepsilon \kappa e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} G = \frac{h'}{h} e_2 \quad (98)$$

ifadeleri ile verilir. Burada,  $\kappa = \phi' \psi'' - \psi' \phi''$  ile verilen  $\alpha_3$  profil eğrisinin eğriliğidir. Böylece, (7) ve (19) denklemlerinden  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında  $M_3$  dönel yüzeyine ait ortalama eğrilik  $H$  ve Gauss eğriliği  $K$  sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$H = -\frac{1}{2} \left( \varepsilon \kappa + \frac{h'}{h} \right), \quad (99)$$

$$K = -\frac{h''}{h}. \quad (100)$$

(11) denkleminde  $M_3$  dönel yüzeyine ait  $G$  Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta G = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{h'^2}{h^2} \right) G - \varepsilon \left( \varepsilon \kappa' + \frac{h''}{h} - \frac{h'^2}{h^2} \right) e_1 \quad (101)$$

olarak bulunur.

Şimdi,  $M_3$  yüzeyinin Gauss tasvirinin genelleştirilmiş 1-tipinden olması durumu incelenecektir.

(95) denklemi ile verilen  $G$  Gauss tasviri genelleştirilmiş 1-tipinden olsun. Bu durumda, (2), (12) ve (101) denklemlerinden

$$f - \varepsilon g C_G = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{h'^2}{h^2} \right), \quad (102)$$

$$g C_1 = -\varepsilon \kappa' - \frac{h''}{h} + \frac{h'^2}{h^2}, \quad (103)$$

$$g C_2 = 0 \quad (104)$$

elde edilir. (104) denkleminde  $g \neq 0$  olduğundan  $C_2 = 0$  bulunur. Benzer şekilde, (15) ve (17) denklemlerinden  $C_1$  ve  $C_G$  bileşenleri sadece  $s$  parametresine bağlı olduğu görülür. Ayrıca, aşağıda verilen ifadeler elde edilir:

$$C_1' = \varepsilon \kappa C_G, \quad (105)$$

$$C_G' = \varepsilon \kappa C_1, \quad (106)$$

$$h'(C_1 - C_G) = 0. \quad (107)$$

$h'(s) \neq 0$  olduğundan,  $C_1 = C_G$  elde edilir. Diğer taraftan, (105) ve (106) denklemlerinden,  $d$  sabiti için  $C_1^2 - C_G^2 = d$  olarak bulunur. Bu durumda, sabit  $C$  vektörü ışıksal bir vektördür. (12), (94) ve (95) denklemleri kullanılarak  $C$  vektörünün

$$C = \varepsilon C_1(\phi' + \psi')(1,1,0) \quad (108)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, (105) denklemi ve  $\kappa$ 'nın tanımı kullanılarak,  $C_1(\phi' + \psi')$  ifadesinin sabit olduğu görülür. Dolayısıyla,  $C$  vektörü ışıksal  $\ell_3$  doğrusuna paraleldir. Ayrıca, (102) ve (103) denklemlerinden (2) denklemini sağlayan türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları

$$f(s) = -\varepsilon \left( \kappa^2 + \frac{h'^2}{h^2} \right) \quad (109)$$

$$+ \left( \kappa' + \varepsilon \frac{h''}{h} - \varepsilon \frac{h'^2}{h^2} \right),$$

$$g(s) = -\frac{1}{C_1} \left( \varepsilon \kappa' + \frac{h''}{h} - \frac{h'^2}{h^2} \right) \quad (110)$$

şeklinde bulunur.

Yukarıda elde edilen ifadeler kullanılarak,  $\mathbb{E}_1^3$  uzayındaki genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler için sırasıyla aşağıdaki teoremler ifade edilir.

**Teorem 3.1.1.**  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında (33) denklemi ile verilen ve yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş profil eğrisine sahip  $M$  dönel yüzeyi genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Yani,  $M$  dönel yüzeyinin  $G$  Gauss tasviri  $\Delta G = fG + gC$

ifadesini (50) ve (51) denklemleri ile verilen sıfırdan farklı türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $C = \pm d(0,0,1)$  sabit vektörü için sağlar. Burada,  $d$  sıfırdan farklı bir sabittir.

**Teorem 3.1.2.**  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında (53) denklemi ile verilen ve yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş profil eğrisine sahip  $M_1$  dönel

yüzeyi genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Yani,  $M_1$  dönel yüzeyinin  $G$  Gauss tasviri  $\Delta G = fG + gC$

ifadesini (70) ve (71) denklemleri ile verilen sıfırdan farklı türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $C = \pm \sqrt{\varepsilon d}(0, 0, 1)$  sabit vektörü için sağlar. Burada,  $\varepsilon = \pm 1$  ve  $d$  sıfırdan farklı bir sabittir.

**Teorem 3.1.3.**  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında (73) denklemi ile verilen ve yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş profil eğrisine sahip  $M_2$  dönel yüzeyi genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Yani,  $M_2$  dönel yüzeyinin  $G$  Gauss tasviri  $\Delta G = fG + gC$

ifadesini (90) ve (91) denklemleri ile verilen sıfırdan farklı türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $C = \pm \sqrt{-\varepsilon d}(1, 0, 0)$  sabit vektörü için sağlar. Burada,  $\varepsilon = \pm 1$  ve  $d$  sıfırdan farklı bir sabittir.

**Teorem 3.1.4.**  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında (93) denklemi ile verilen ve yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş profil eğrisine sahip  $M_3$  dönel yüzeyi genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Yani,  $M_3$  dönel yüzeyinin  $G$  Gauss tasviri  $\Delta G = fG + gC$

ifadesini (109) ve (110) denklemleri ile verilen sıfırdan farklı türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $C = d_1(1, 0, 1)$  sabit vektörü için sağlar. Burada,  $d_1$  sıfırdan farklı bir sabittir.

Şimdi,  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir dönel yüzey örneği verilecektir ve bu dönel yüzeyin grafiği Wolfram Mathematica 9.0<sup>®</sup> programı kullanılarak çizilecektir.

**Örnek 3.1.4** Yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş 
$$\gamma(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{s^2}{2} + \ln s, -\frac{s^2}{2} + \ln s, 0 \right)$$

şeklinde verilen düzgün  $\gamma(s)$  eğrisini göz önüne alınsın. Burada,  $s > 0$  dür.  $\gamma(s)$  eğrisi zamansal bir eğridir.  $\gamma(s)$  eğrisini profil eğrisi olarak kabul eden

$T_2$  dönüşümü altında değişmez kalan  $M$  döneel yüzeyinin parametrizasyonu

$$X(s, t) = \frac{1}{2} \left( \ln s + \frac{s^2}{2}, \left( \ln s - \frac{s^2}{2} \right) \cos t, \left( \ln s - \frac{s^2}{2} \right) \sin t \right)$$

şeklindedir. Grafiği Şekil 1’de gösterilmiştir. Bu döneel yüzey zamansal bir yüzeydir. Yüzeğe ait  $G$  Gauss tasviri

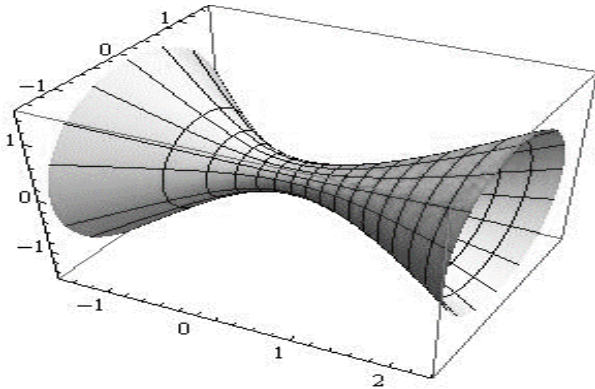
$$G = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - s, \left( \frac{1}{s} + s \right) \cos t, \left( \frac{1}{s} + s \right) \sin t \right)$$

şeklinde verilir. Bu durumda,  $G$  Gauss tasviri (2) denklemini aşağıda verilen türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için sağlar.

$$f(s) = \frac{2}{s^2} \left( \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{(s^2 - 1)^2}{(s^2 + 1)(2 \ln s - s^2)} + \frac{4(1 + s^4)}{(2 \ln s - s^2)^2} \right)$$

$$g(s) = \frac{2}{\sqrt{d}s(s^2 + 1)} \left( 1 - \frac{2(s^2 - 1)}{2 \ln s - s^2} + \frac{4(1 - s^4)}{(2 \ln s - s^2)^2} \right)$$

Ayrıca, sabit  $C = \sqrt{d}(1, 0, 0)$  ile verilir. Burada,  $d$  sıfırdan farklı bir sabittir.



Şekil 1. Genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine zamansal  $M$  döneel yüzeyi

### 3.2. $\mathbb{E}_1^m$ Minkowski Uzayında Genelleştirilmiş 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Regle Alt Manifoldları

Bu bölümde,  $\mathbb{E}_1^m$  uzayındaki silindirik regle alt manifoldlarından Gauss tasvirleri genelleştirilmiş 1-tipinden olanlar üzerine çalışılacaktır.

$m$  –boyutlu Minkowski uzayındaki regle alt manifoldlarının tanımı Thas (1978) ve Kim ve Kim (2012) çalışmalarında aşağıdaki şekilde verilmiştir.  $E(s, r)$ ,  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayının  $r$  –boyutlu tünden jeodezik bir alt manifoldu olsun.  $M$  yarı-Riemann alt manifoldu,  $I$  açık aralığından  $M$  üzerinde tanımlı  $\alpha(s)$  düzgün eğrisi boyunca  $E(s, r)$  alt manifoldu tarafından üretiliyorsa, dejenere olmayan  $(r + 1)$  –boyutlu  $M$  yarı-Riemann alt manifolduna  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayının regle alt manifoldu denir ve parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$x(s, t_1, \dots, t_r) = \alpha(s) + \sum_{i=1}^r t_i e_i(s). \quad (111)$$

Burada,  $s \in I$  ve  $i = 1, 2, \dots, r$  için  $I_i$  açık aralıklar olmak üzere  $t_i \in I_i$  dir. Bu tanımda,  $E(s, r)$  alt manifolduna doğrultman ve  $\alpha(s)$  eğrisine ise,  $M$  regle alt manifoldunun taban eğrisi denir. Özel olarak, (111) denklemindeki  $e_i(s)$  vektörleri sabitse,  $M$  regle alt manifoldu silindirik olarak isimlendirilir. Aksi halde,  $M$  alt manifoldu silindirik olmayan regle alt manifoldu olarak adlandırılır.

$\mathbb{E}_1^m$  uzayında bir  $M$  regle alt manifoldu yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş  $\alpha(s)$  taban eğrisine sahip olsun. Yani,  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \varepsilon = \pm 1$  dir.  $\alpha$  eğrisi boyunca,  $i, j = 1, 2, \dots, r$  için,  $\langle \alpha'(s), e_i(s) \rangle = 0$ ,  $\langle e_i'(s), e_j(s) \rangle = 0$  ve  $\langle e_i(s), e_j(s) \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$  koşullarını sağlayan  $\{e_1(s), e_2(s), \dots, e_r(s)\}$  ortonormal vektörleri seçilebilir (Kim and Kim, 2012).  $M$  regle alt manifoldunun  $G$  Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{\|x_s\|} x_s \wedge x_{t_1} \wedge \dots \wedge x_{t_r} \quad (112)$$

şeklinde verilir.  $q = \langle x_s, x_s \rangle$ ,  $\Phi = \alpha' \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_r$  ve  $\Psi_i = e_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_r$  olarak tanımlansın. Bu durumda, (112) denklemini ile verilen  $G$  tasviri

$$G = \frac{1}{|q|^{\frac{1}{2}}} (\Phi + \sum_{i=1}^r t_i \Psi_i) \quad (113)$$

olarak ifade edilir.  $M$ 'nin silindirik olması durumunda,  $e'_i = 0$  olduğundan,  $\Psi_i = 0$  olur. Böylece,  $G$  Gauss tasviri  $G = \Phi$  olur. (9) denkleminde  $G$ 'nin Laplasiyenini  $\Delta G = -\varepsilon\Phi''$  olarak hesaplanır.

$M$  silindirik regle alt manifoldunun  $G$  tasviri genelleştirilmiş 1-tipinden olsun. Bu durumda, (2) denkleminde

$$\Phi''(s) = -\varepsilon(f\Phi + gC) \quad (114)$$

ifadesi elde edilir. Buradan,  $C = -\frac{\varepsilon\Phi'' + f\Phi}{g}$  olarak bulunur.  $C$  vektörü sabit olduğundan, bu denklem bir defa  $s$ 'ye göre türetilirse

$$\Phi''' - \frac{g'}{g}\Phi'' + \varepsilon f\Phi' + \varepsilon\left(f' - \frac{g'}{g}f\right)\Phi = 0 \quad (115)$$

elde edilir.  $\Phi = \alpha' \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_r$  olduğundan (115) denklemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$\alpha^{(4)} - \frac{g'}{g}\alpha''' + \varepsilon f\alpha'' + \varepsilon\left(f' - \frac{g'}{g}f\right)\alpha' = 0 \quad (116)$$

Diğer taraftan,  $g$  sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyondur. Bu nedenle, (116) denklemi  $g$  fonksiyonuna bölünür. Bu durumda, (116) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\left(\frac{1}{g}\alpha''' + \varepsilon\frac{f}{g}\alpha'\right)' = 0. \quad (117)$$

Dolayısıyla, (117) denkleminde  $D$  sabit vektör olmak üzere,

$$\alpha''' + \varepsilon f\alpha' = Dg \quad (118)$$

ifadesi bulunur. Böylece, aşağıdaki yardımcı teorem verilir.

**Yardımcı Teorem 3.2.1.**  $M, \mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayında (111) denklemi ile verilen birim hızlı  $\alpha(s)$  taban eğrisine sahip silindirik regle yarı-Riemann alt manifoldu olsun.  $M$  yarı-Riemann alt manifoldunun genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları ve  $D \in \mathbb{E}_1^m$  sabit vektörü için  $\alpha(s)$  eğrisinin

$$\alpha'''(s) + \varepsilon f(s)\alpha'(s) = Dg(s) \quad (119)$$

ifadesini sağlamasıdır.

Jung vd. (2018) çalışmasında  $\mathbb{E}_1^m$  uzayındaki regle yarı-Riemann alt manifoldlarının taban eğrileri için aşağıdaki Yardımcı Teoremi vermişlerdir.

**Yardımcı Teorem 3.2.2. (Jung et al. 2018)**  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayında  $I$  açık aralığında tanımlanan birim hızlı  $\alpha(s)$  eğrisi  $f$  fonksiyonu ve  $C \in \mathbb{E}_1^m$  sabit bir vektörü için

$$\alpha'''(s) = f(s)(\alpha'(s) + C) \quad (120)$$

denklemini sağlıyorsa,  $\alpha(s)$  eğrisi  $\mathbb{E}_1^m$ 'in 3 – boyutlu uzayında kalır. Özel olarak, sabit  $C$  vektörü sıfır ise,  $\alpha(s)$  düzlemsel bir eğri olur.

Yardımcı Teorem 3.2.2'nin ispatına benzer şekilde aşağıdaki yardımcı teorem ispatlanır.

**Yardımcı Teorem 3.2.3.**  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayında  $I$  açık aralığında tanımlanan yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş  $\alpha(s)$  eğrisi sıfırdan farklı türevlenebilir  $f, g$  fonksiyonları ve  $D \in \mathbb{E}_1^m$  sabit bir vektörü için

$$\alpha'''(s) = \varepsilon f(s)\alpha'(s) + Dg(s) \quad (121)$$

denklemini sağlıyorsa,  $\alpha(s)$  eğrisi  $\mathbb{E}_1^m$ 'in 3 – boyutlu bir uzayında kalır. Özel olarak,  $D$  vektörü sıfır ise,  $\alpha(s)$  düzlemsel bir eğri olur.

**İspat.**  $s_0 \in I$  için,  $\alpha'(s_0), \alpha''(s_0), D$  vektörleri tarafından lineer olarak gerilen bir  $V$  uzayı olsun. Bu durumda,  $V, \mathbb{E}_1^m$  uzayının en fazla 3-boyutlu bir alt uzayıdır.  $V$  uzayının  $V^\perp$  ortogonal tümleyeninden seçilen herhangi bir  $a$  vektörü için, aşağıda verilen  $h_a(s)$  fonksiyonu tanımlanabilir.

$$h_a(s) = \langle a, \alpha'(s) \rangle. \quad (122)$$

(122) denklemi iki kere  $s$  değişkenine göre türetilip,  $\alpha'''(s) = \varepsilon f(s)\alpha'(s) + Dg(s)$  ve  $\langle a, D \rangle = 0$  eşitlikleri kullanılırsa,

$$h_a''(s) = \langle a, \alpha'''(s) \rangle = \varepsilon f(s)h_a(s) \quad (123)$$

şeklinde 2. mertebe lineer bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem  $h_a(s_0) = h_a'(s_0) = 0$  başlangıç koşullarına sahiptir. Bu

nedenle,  $h_\alpha(s)$  fonksiyonu  $I$  aralığı üzerinde özdeş olarak sıfıra eşit olur. Bu durumda,  $s \in I$  için  $\alpha'(s) \in V$  olur. Dolayısıyla,  $\alpha(s)$  eğrisi  $V$  uzayından paralel kaydırma ile elde edilen  $\alpha(s_0) + V$  uzayında kalır. Yani,  $\alpha(s)$  eğrisi 3-boyutlu uzayın içinde kalır. Böylece ispat tamamlanır.

Bu durumda,  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayında silindirik regle alt manifoldunun  $\mathbb{E}_1^m$  uzayının 3-boyutlu bir uzayında kaldığı elde edilmiş olur. Yoon vd. (2018) ve Choi ve Kim (2018) çalışmalarında ise,  $\mathbb{E}_1^3$  Minkowski uzayındaki genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip silindirik regle yüzeylerle ilgili sınıflandırma teoremleri elde edilmişlerdir. Böylece,  $\mathbb{E}_1^m$  Minkowski uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip silindirik regle alt manifoldların karakterizasyonu tamamlanmış olur.

#### 4. Sonuç

Euclid uzayında sonlu tipten alt manifold tanımı 1970'li yılların sonlarına doğru B.-Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra bu kavram diferansiyellenebilir tasvirler için benzer şekilde verilmiştir. Tanımlandığından bu zamana kadar bu konu ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, bazı yüzeylerin Gauss tasvirlerinin bu tanımı bir sabit için değil türevlenebilir bir fonksiyon için sağladığı gözlenmiştir ve noktasal 1-tipinden Gauss tasviri kavramı verilmiştir. Daha sonra noktasal 1-tipinden kavramı daha da genelleştirilerek genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri tanımı verilmiştir.

Bu çalışmada ise, Minkowski uzayında yarı-Riemann alt manifoldlarından genelleştirilmiş 1-tiipinden Gauss tasvirine sahip olanlar üzerine çalışılmıştır. Öncelikle, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasviri ile genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri kavramları arasındaki ilişki verilmiştir. Sonrasında, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki bütün dönelebilir yüzeylerin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir ve (2) denklemini sağlayan türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları ve sabit  $C$  vektörü belirlenmiştir. Buradaki,  $f$  ve  $g$  fonksiyonları sabit olmadığından, elde edilen sonuçlar Minkowski uzayındaki 1-

tipinden Gauss tasvirine sahip yüzey sınıflandırmasından farklı olacaktır.

Ayrıca, bu çalışmada  $m$ -boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip silindirik regle alt manifoldları üzerine de çalışılmıştır.

Genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri kavramı, 1-tipinden Gauss tasviri ve noktasal 1-tipinden Gauss tasviri kavramlarının genelleştirilmesidir. Bu nedenle, bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürde var olan 1-tipinden Gauss tasviri ve noktasal 1-tipinden Gauss tasviri ile ilgili sonuçları da kapsamaktadır.

#### 5. Kaynaklar

- Arslan, K., Bayram, B.K., Bulca, B., Kim, Y.-H., Murathan, C. and Öztürk, G., 2011. Rotational embeddings in  $\mathbb{E}^4$  with pointwise 1-type Gauss map. *Turkish Journal of Mathematics*, **35(3)**, 493-499.
- Aksoyak, F.K. and Yaylı, Y., 2015. General rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map in pseudo-Euclidean space  $\mathbb{E}_2^4$ . *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **46(1)**, 107-118.
- Arslan, K. and Milousheva, V., 2016. Meridian surfaces of elliptic or hyperbolic with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 4-space. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **20(2)**, 311-332.
- Baikoussis, C. and Blair, D.E., 1992. On the Gauss map of ruled surfaces. *Glasgow Mathematical Journal*, **34(3)**, 355-359.
- Baikoussis, C., Chen, B.-Y. and Verstraelen, L., 1993. Ruled surfaces and tubes with finite type Gauss map. *Tokyo Journal of Mathematics*, **16(2)**, 341-349.
- Baikoussis, C., 1994. Ruled submanifolds with finite type Gauss map. *Journal of Geometry*, **49(1)**, 42-45.
- Bektaş, B. and Dursun, U., 2015. Timelike rotational surfaces of elliptic, hyperbolic and parabolic types in Minkowski space  $\mathbb{E}_1^4$  with pointwise 1-type Gauss map. *Filomat*, **29(3)**, 381-392.
- Chen, B.-Y., 1973, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, Inc.
- Chen, B.-Y., Morvan, J. M. and Nore, T., 1986. Energy, tension and finite type maps. *Kodai Mathematical Journal*, **9(3)**, 406-418.

- Chen, B.-Y. and Piccinni, P., 1987. Submanifolds with finite type Gauss map. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **35(2)**, 161-186.
- Chen, B.-Y., 1996. A report on submanifolds of finite type. *Soochow Journal of Mathematics*, **22(2)**, 117-337.
- Chen, B.-Y, Choi, M. and Kim, Y.-H., 2005. Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **42(3)**, 447-455.
- Chen, B.-Y., 2011, Pseudo-Riemannian Geometry,  $\delta$ -Invariants and Applications, World Scientific Publishing Company.
- Chen, B.-Y, 2014. Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type: recent development. *Tamkang Journal of Mathematics*, **45(1)**, 87-108.
- Chen, B.-Y., 2014, Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, 27, World Scientific.
- Choi, M.-K. and Kim, Y.-H., 2001. Characterization of the helicoid as ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **38(4)**, 753-761.
- Choi, M.-K. and Kim, Y.-H., 2018. Extension of eigenvalue problems on Gauss map of ruled surfaces. *Symmetry*, **10(10)**, 514.
- Choi, M.-K. and Kim, Y.-H., 2018. Classification theorems of ruled surfaces in Minkowski three-space. *Mathematics*, **6(12)**, 318.
- Dursun, U., 2007. Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss Map. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11(5)**, 1407-1416.
- Dursun, U., 2009. Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map in Lorentz-Minkowski space. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, **58(3)**, 146-161.
- Dursun, U. and Coşkun, E., 2012. Flat surfaces in  $\mathbb{E}_1^3$  with pointwise 1-type Gauss map. *Turkish Journal of Mathematics*, **36(4)**, 613-629.
- Dursun, U. and Bektaş, B., 2014. Spacelike rotational surfaces of elliptic, hyperbolic and parabolic types in Minkowski space  $\mathbb{E}_1^4$  with pointwise 1-type Gauss map. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **17(1)**, 247-263.
- İlim, K. and Öztürk, G., 2019. Tubular surface having pointwise 1-type Gauss map in Euclidean 4-space. *International Electronic Journal of Geometry*, **12(2)**, 202-209.
- Jung, S. M. and Kim, Y.-H., 2018. Gauss map and its applications on ruled submanifolds in Minkowski space. *Symmetry*, **10(6)**, 218.
- Jung, S. M., Kim, D. S., and Kim, Y.-H., 2018. Minimal ruled submanifolds associated with Gauss map. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **22(3)**, 567-605.
- Kim, Y.-H. and Yoon, D.W., 2000. Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Journal of Geometry and Physics*, **34(3-4)**, 191-205.
- Kim, Y.-H. and Yoon, D.W., 2004. Classification of rotation surfaces in pseudo-Euclidean space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **41(2)**, 379-396.
- Ki, U.H, Kim, D.S., Kim, Y.-H. and Roh, Y.-H., 2009. Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 3-space. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **13(1)**, 317-338.
- Kim, D.-S. and Kim, Y.-H., 2012. Some classification results on finite-type ruled submanifolds in a Lorentz-Minkowski space. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **16(4)**, 1475-1488.
- Milousheva, V. and Turgay, N.C., 2016. Quasi minimal Lorentz surfaces with pointwise 1-type Gauss map in Pseudo-Euclidean 4-space. *Journal of Geometry and Physics*, **106**, 171-183.
- O'Neill, B., 1983, Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press.
- Qian, J., Fu, X. and Jung, S. D., 2020. Dual associate null scrolls with generalized 1-type Gauss map. *Mathematics*, **8(7)**, 1111. Qian, J. H., Su, M. F. and Kim, Y.-H., 2021. Canal surfaces with generalized 1-type Gauss map. *Revista De La Union Matematica Argentina*, **62**, 199-211.
- Thas, C., 1978. Minimal monosystems. *Yokohama Mathematical Journal*, **26**, 157-167.
- Turgay, N. C, 2015. Some classifications of Lorentzian surfaces with finite type Gauss map in Minkowski 4-space. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **99(3)**, 415-427.
- Yoon, D.W., 2001. Rotation surfaces with finite type Gauss map in  $\mathbb{E}^4$ . *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics*, **32(12)**, 1803-1808.
- Yoon, D. W., Kim, D. S., Kim, Y.-H. and Lee, J. W., 2018. Classifications of flat surfaces with generalized 1-type Gauss map in  $\mathbb{L}^3$ . *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15(3)**, 1-16.

Yoon, D. W., Kim, D. S., Kim, Y.-H. and Lee, J. W., 2018.  
Hypersurfaces with generalized 1-type Gauss maps.  
*Mathematics*,**6(8)**,130.