



# Karbon nanotüp örüntülü polymer silindirik kabukların aksel yük etkisi altında burkulması

## Buckling of carbon nanotube patterned polymer cylindrical shells under the axial load

Mahmure Avey<sup>1\*</sup> , Fethi Kadioğlu<sup>2</sup> , Semra Ahmetolan<sup>3</sup> 

<sup>1</sup>*İstanbul Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı 34469 İstanbul, Türkiye*

<sup>2</sup>*İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34469 İstanbul, Türkiye*

<sup>3</sup>*İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü 34469 İstanbul, Türkiye*

### Öz

Bu makalede, aksel basınç yüküne maruz kalan karbon nanotüp (KNT) örüntülü silindirik kabukların burkulması, kayma deformasyon teorisi (KDT) çerçevesinde sunulmaktadır. Nanokompozitlerin malzeme özellikleri kalınlık koordinatına bağlı olarak lineer fonksiyon şeklinde değişmektedir. KNT örüntülü silindirik kabukların temel denklemleri Donnell tipi kabuk teorisi baz alınarak türetilmekte ve Galerkin yöntemi uygulanarak kritik aksel yük ifadesi KDT çerçevesinde elde edilmektedir. Enine kayma deformasyonlarının fonksiyonel olarak derecelendirilmiş (FD) KNT örüntülü silindirik kabukların kritik aksel yük değerlerine etkileri, KNT örüntüleri, hacim kesir oranı ve kabuk parametreleri değiştirilerek araştırılmaktadır.

**Anahtar kelimeler:** Nanokompozit, Silindirik kabuk, Burkulma, Kritik aksel yük

### 1 Giriş

Polimer kompozit malzemelerin halihazırda uygulama olarak bulunduğu uzay ve havacılık endüstrisinin gelişimi ve olası uygulamalarının genişlemesi, mukavemet özellikleri seviyesi için artan gereksinimler yaratmaktadır [1]. Modern teknolojinin umut verici yönlerinden biri, malzemelerin mekanik özelliklerini iyileştirmek için çeşitli nano ölçekli malzemeler üretebilmesidir. Bu nano ölçekli malzemelerden biri, yüksek viskoziteli malzemelerin mekanik özelliklerini iyileştirme potansiyeline sahip olan karbon nanotüpleridir. KNT'ler füllerden oluşan boru şeklindeki nano-malzemeler olup 1991 yılında Iijima [2] çalışmasında gündeme gelmiştir. Silindirik şekilli bu malzemeler, benzeri görülmemiş mekanik, elektriksel ve termal özelliklerinden dolayı kompozit endüstrilerinde geniş uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle, KNT'lerin kompozitlere takviyesi onların mekanik özelliklerini büyük ölçüde artırabilir [3,4]. Bu geliştirilmiş kompozitlerin uçak ve otomobil ekipmanlarında uygulanması, yakıt verimliliğini artırabilir ve daha büyük çevresel etkiye sahip olan egzoz gazı emisyonunu azaltabilir. KNT desenli kompozitler ile ilgili gerçekleştirilen ilk araştırmalarda malzeme özelliklerinin belirlenmesi ile uğraşmıştır [5,6]. Han ve Elliott [7], KNT'lerle takviye edilmiş polimer kompozitlerin malzeme

### Abstract

In this article, the buckling of carbon nanotube (CNT) patterned cylindrical shells subjected to axial compressive load is presented within the framework of shear deformation theory (SDT). The material properties of nanocomposites change as a linear function depending on the thickness coordinate. The basic equations of cylindrical shells with CNT pattern are derived based on Donnell type shell theory and the critical axial load expression is obtained within the framework of SDT by applying Galerkin method. The effects of transverse shear deformations on the critical axial load of functionally graded CNT patterned cylindrical shells are investigated by changing CNT patterns, volume fraction ratio and shell parameters.

**Keywords:** Nanocomposite, Cylindrical shell, Buckling, Critical axial load

özelliklerini değerlendirmek için moleküler dinamik (MD) simülasyonunu kullanarak KNT takviyeli polimer kompozitlerin mekanik özelliklerinin iyileştirilmesinin, polimer matris çeşitlerine ve KNT'lerin kalitesine ve miktarına bağlı olduğu sonucuna varmışlardır.

Nanokompozit silindirik kabuklar genellikle modern mühendislik dallarında, özellikle uzay araçlarında, nükleer reaktörlerde ve roketlerde kullanıldığı için son teknoloji ürünlerle (yeni sınıf çok fonksiyonlu malzemelerle) donatılmaktadır. Karbon nanotüp menşeli yapısal elemanlar, yeni nesil heterojen kompozitler sınıfına ait olup bunların modellenmesi sağlam bir matematiksel altyapı gerektirir. Ayrıca karmaşık mühendislik problemleri olan çeşitli yükler altında nanokompozit silindirlerin titreşim ve burkulma problemlerinin gerçekçi matematiksel modellerinin oluşturulması, onların uygulamalarının güvenilirliği ve emniyeti açısından oldukça önemlidir. FD nanokompozit silindirik kabuklar, kullanım amacı gereği daha fazla aksel basınç yükü etkisine maruz kaldığından onların tasarım sırasındaki burkulma davranışının analiz edilmesi önemlidir. KNT takviyeli silindirik kabukların burkulma problemi ilk olarak Shen [8] çalışmasında gerçekleştirilmiştir. Son yıllarda, nanokompozit menşeli silindirik kabukların termomekanik ve burkulma davranışları üzerine bazı çalışmalar

\* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: mahmureavey@gmail.com (M. Avey)

Geliş / Received: 05.07.2022 Kabul / Accepted: 29.07.2022 Yayınlanma / Published: 14.10.2022

doi: 10.28948/ngmuh.1140950

yapılmıştır. Örneğin; Lei vd. [9] çalışmasında, elemansız kp-Ritz yöntemini kullanarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit plakların burkulma analizini gerçekleştirilmiştir. Chakraborty vd. [10] eserinde, yarı analitik yaklaşım kullanılarak KNT'lerle güçlendirilmiş fonksiyonel olarak derecelendirilmiş lamine kompozit silindirik kabuk panellerin burkulma ve titreşim analizi sunulmuştur. Nam vd. [11] çalışmasında, termal ortamda elastik temel ile çevrili aksel sıkıştırma altında ortogonal karbon nanotüp takviyeli kompozit silindirik kabukların burkulması klasik kabuk teorisi çerçevesinde ele alınmıştır.

Karbon nanotüplerle güçlendirilen kompozitlerin hacim içeriği gradyan olarak dağıldığından, yapının enine kayma modülü, fiber yönündeki etkin elastik modülünden çok daha az olduğundan yapı enine kaymaya daha duyarlı olur ve dikkate alınmalıdır [12-14]. Literatür taraması, KDT çerçevesinde karbon nanotüplerle takviye edilen silindirik kabukların burkulmasının yeterince çalışılmadığını ortaya koymaktadır. Bu çalışmada, söz konusu problemin KDT çerçevesinde incelenmesi hedeflenmektedir.

## 2 Materyal ve metot

### 2.1 Problemin formülasyonu ve mekanik özelliklerin modellenmesi

Şekil 1'de, aksel basınç yükü altındaki KNT örüntülü dairesel ve kapalı silindirik bir kabuk ve karakteristikleri sunulmaktadır. Oxyz koordinat sisteminin orijin silindirik kabuğun orta yüzeyinin sol ucunda yer almakta olup ve x, y ve z eksenleri Şekil 1'deki gibi yönlendirilmektedir.



Şekil 1. Aksel yüklü nanokompozit silindirik kabuk ve koordinat sistemi

Nanokompozit silindirik kabuğun Young modülleri ve Poisson oranı gibi etkin malzeme özellikleri, karışım kuralına göre aşağıdaki gibi ifade edilir [8]:

$$\begin{aligned} Y_{11}(\bar{z}) &= \eta_1 V_{knt}(\bar{z}) Y_{11}^{knt} + V^m Y^m, \\ \frac{\eta_2}{Y_{22}(\bar{z})} &= \frac{V_{knt}(\bar{z})}{Y_{22}^{knt}} + \frac{V^m}{Y^m}, \quad \nu_{12} = V_{knt}^* \nu_{12}^{knt} + V^m \nu^m \\ \frac{\eta_3}{G_{12}(\bar{z})} &= \frac{V_{knt}(\bar{z})}{G_{12}^{knt}} + \frac{V^m}{G^m}, \\ G_{13}(\bar{z}) &= G_{12}(\bar{z}), \quad G_{23}(\bar{z}) = 1.2 G_{12}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (1)$$

Burada verimlilik parametreleri  $\eta_i (i=1,2,3)$  ile polimerin hacim kesir oranı  $V^m$  ile polimerin (veya matrisin) ve

KNT'lerin Young modülleri sırasıyla  $Y^m$  ve  $Y_{kk}^{knt}$  ile ve KNT'lerin kayma modülü  $G_{12}^{knt}$  ile gösterilmektedir.

Hacim kesir oranı  $V_{knt}$  kalınlık koordinatının lineer fonksiyonları olarak aşağıdaki gibi ifade edilir [8, 15]:

$$\begin{aligned} V_{knt} &= V_{knt}^* \text{ ise } \dot{U} \\ V_{knt} &= (1 - 2\bar{z}) V_{knt}^* \text{ ise } V \\ V_{knt} &= (1 + 2\bar{z}) V_{knt}^* \text{ ise } A \\ V_{knt} &= 4|\bar{z}| V_{knt}^* \text{ ise } X \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 Temel bağıntı ve denklemlerin türetilmesi

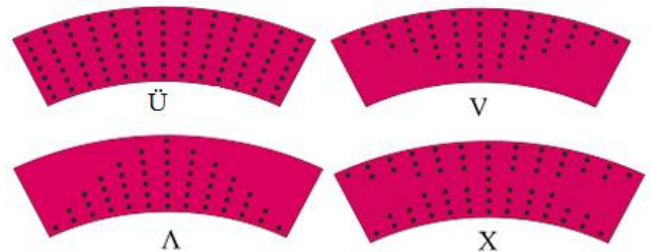
KNT örüntülü silindirik kabukların KDT çerçevesinde bünyesel bağıntıları Denklem (1) dikkate alınarak aşağıdaki gibi oluşturulur [15]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Burada  $\sigma_{ij}$  ve  $\varepsilon_{ii}$ ,  $\gamma_{ij} (i=1,2, j=2,3)$  sırasıyla gerilme ve deformasyon bileşenleri,  $A_{ij} (i,j=1,2,\dots,6)$  fonksiyonel derecelendirilmiş nanokompozitlerin malzeme özelliklerine bağlı katsayılar olup şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} A_{11}(\bar{z}) &= \frac{Y_{11}(\bar{z})}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{12}(\bar{z}) = \frac{\nu_{21} Y_{11}(\bar{z})}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\ A_{21}(\bar{z}) &= \frac{\nu_{12} Y_{22}(\bar{z})}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{22}(\bar{z}) = \frac{Y_{22}(\bar{z})}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ A_{44}(\bar{z}) &= G_{23}(\bar{z}), \quad A_{55}(\bar{z}) = G_{13}(\bar{z}), \\ A_{66}(\bar{z}) &= G_{12}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (4)$$

Şekil 2'deki en kesitlerdeki örüntüler Denklem (2) kullanılarak gerçekleştirilmiştir.



Şekil 2. Silindirik kabuğun KNT örüntülü en kesitleri

Denklem (3) ve KDT'nin varsayımları dikkate alınarak, KNT örüntülü silindirik kabukların keyfi bir noktasındaki deformasyon alanının bileşenleri  $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12})$ , orta yüzeydeki  $(\varepsilon_{011}, \varepsilon_{022}, \gamma_{012})$  deformasyonları ile aşağıdaki gibi ifade edilir [15]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{011} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \varepsilon_{022} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + I_2(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \gamma_{012} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + I_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + I_2(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Burada  $\varphi_i (i=1,2)$  sırasıyla y ve x eksenlerine göre açılırları gösterir,  $I_i(z)$  gerilme fonksiyonları içeren parametre olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_1(z) = \int_0^z \frac{df_1}{dz} \frac{1}{G_{13}(\bar{z})} dz, \quad I_2(z) = \int_0^z \frac{df_2}{dz} \frac{1}{G_{23}(\bar{z})} dz \quad (6)$$

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki integrallerden bulunur [16]:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz, \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3} dz, \\ M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz, \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (7)$$

Düzlem içi kuvvetlerle Airy gerilme fonksiyonu ( $F$ ) arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir [16]:

$$N_{11} = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_{12} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad N_{22} = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (8)$$

KDT çerçevesinde silindirik kabukların aksenal yük altındaki stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri şu şekildedir [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 &= 0, \quad \frac{\partial M_{21}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - Q_2 = 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{N_{22}}{R} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{011}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{022}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{012}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10)$$

Sonraki aşamada, [Denklemler \(3\), \(4\), \(5\), \(6\), \(7\), \(8\)](#) kullanılarak, kuvvet ve moment bileşenleri ve orta yüzeydeki deformasyonlar,  $w$  yer değiştirme,  $F$  gerilme fonksiyonu ve açılırların fonksiyonları cinsinden ifade edilir. Elde edilen bağıntılar [Denklemler \(9\) ve \(10\)](#)'a yerleştirilerek, aksenal basınç yükü altında KNT'lerle takviye edilmiş kayma deformasyonlu silindirik kabukların stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} &h(c_{11} - c_{31}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + hc_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - c_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ &- (c_{14} + c_{32}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{15} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + c_{35} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} \\ &- I_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + c_{18} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + c_{38} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} = 0 \\ &hc_{21} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + h(c_{22} - c_{31}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - (c_{32} + c_{23}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &- c_{24} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + c_{35} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + c_{25} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} \\ &+ c_{38} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + c_{28} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} - I_4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad (11) \\ &hb_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + h(b_{12} + b_{21} + b_{31}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + hb_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \\ &- b_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (b_{24} + b_{13} - b_{32}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - b_{14} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_{25} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + b_{15} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + b_{35} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} \\ &+ b_{28} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + b_{38} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + b_{18} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} = 0 \\ &\frac{h}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + I_4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Burada  $b_{ij}$  ve  $c_{ij} (i=1,2,\dots,4, j=1,2,\dots,8)$  malzeme ve kabuk özelliklerine bağlı katsayılarıdır [15].

### 3 Bulgular ve tartışma

#### 3.1 Temel denklemlerin çözümü

Serbest mesnetli sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki gibi aranır [15]:

$$\begin{aligned} w &= A_1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad F = A_2 \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \\ \varphi_1 &= A_3 \cos(\lambda x) \sin(\mu y), \quad \varphi_2 = A_4 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \end{aligned} \quad (12)$$

Burada  $A_i (i=1,2,\dots,4)$  bilinmeyen genliklerdir,  $(\lambda, \mu) = \left( \frac{m\pi}{L}, \frac{n}{R} \right)$  olup dalga parametreleri,  $(m, n)$  ise burkulma modlarıdır.

[Denklemler \(12\)](#)'deki fonksiyonlar [Denklemler sistemi \(11\)](#)'de yerine yazılıp, Galerkin yöntemi uygulandığında, aşağıdaki cebirsel matris denklemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & -k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & -k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & N\lambda^2 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Matris içindeki katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= [(c_{11} - c_{31})\lambda^2\mu^2 + c_{12}\lambda^4]h, \\
 k_{12} &= (c_{14} + c_{32})\lambda^2\mu^2 + c_{13}\lambda^4, \\
 k_{13} &= c_{15}\lambda^3 + c_{35}\lambda\mu^2 + I_5\lambda, \quad k_{14} = (c_{18} + c_{38})\mu\lambda^2, \\
 k_{21} &= [c_{21}\mu^4 + (c_{22} - c_{31})\lambda^2\mu^2]h, \\
 k_{22} &= (c_{32} + c_{23})\lambda^2\mu^2 + c_{24}\mu^4, \quad k_{23} = (c_{25} + c_{35})\lambda\mu^2, \\
 k_{24} &= c_{28}\mu^3 + c_{38}\lambda^2\mu + I_6\mu, \\
 k_{31} &= h[b_{22}\lambda^4 + (b_{12} + b_{21} + b_{31})\lambda^2\mu^2 + b_{11}\mu^4], \\
 k_{32} &= b_{23}\lambda^4 + (b_{24} + b_{13} + b_{32})\lambda^2\mu^2 + b_{14}\mu^4 + \frac{\lambda^2}{R}, \\
 k_{33} &= b_{25}\lambda^3 + (b_{15} + b_{35})\lambda\mu^2, \\
 k_{34} &= (b_{28} + b_{38})\lambda^2\mu + b_{18}\mu^3, \quad k_{41} = \frac{\lambda^2 h}{R}, \\
 k_{43} &= I_5\lambda, \quad Q_{44} = I_6\mu
 \end{aligned} \tag{14}$$

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş nanokompozit silindirik kabukların kritik eksenel basınç yükünü bulmak için, cebirsel Denklem (13)'ün katsayılarından oluşan determinanı sıfıra eşitleyip determinant kofaktörler cinsinden yazıldığında, şu cebirsel denklem elde edilir:

$$k_{41}D_{41} - ND_{42}\lambda^2 + k_{43}D_{43} + k_{44}D_{44} = 0 \tag{15}$$

Burada  $D_{ij}$  ( $i = 4, j = 1, 2, 3, 4$ ) kare matrisin determinantıdır ve şu tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}
 D_{41} &= - \begin{vmatrix} k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{vmatrix}, \quad D_{42} = - \begin{vmatrix} k_{11} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{33} & k_{34} \end{vmatrix} \\
 D_{43} &= - \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{34} \end{vmatrix}, \quad D_{44} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Denklem (15)'den KDT çerçevesinde KNT takviyeli nanokompozit silindirik kabukların kritik eksenel yükü için aşağıdaki ifade bulunur:

$$N_{kdt}^{kr} = \frac{k_{41}D_{41} + k_{43}D_{43} + k_{44}D_{44}}{\lambda^2 D_{42}} \tag{17}$$

KDT çerçevesinde, KNT takviyeli nanokompozit silindirik kabukların boyutsuz kritik eksenel yükü aşağıdaki ifadeden bulunur:

$$N_{1kdt}^{kr} = \frac{N_{kdt}^{kr}}{Y^m h} \tag{18}$$

Temel bağıntılarda enine kayma deformasyonları göz ardı edilerek, KKT'ye dayalı KNT örüntülü silindirik kabukların kritik eksenel yükü için ifade elde edilir. Bu

durum için boyutlu ve boyutsuz kritik eksenel yükler sırasıyla  $N_{kk}^{kr}$  ve  $N_{1kk}^{kr}$  sembolleri ile gösterilmektedir. Kritik eksenel yükün minimum değerini bulmak için **Denklemler (17) ve (18)** burkulma modu  $(m, n)$ 'ye göre minimize edilir.

### 3.2 Karşılaştırma

Karşılaştırmada, matris için PMMA adı verilen poli (metil metakrilat) ve takviye elemanı olarak (10, 10) KNT'ler kullanılmaktadır. KNT ve PMMA'nın mekanik özellikleri  $T = 300K$  (oda sıcaklığı) için sırasıyla aşağıdaki gibidir [8]:

$$\begin{aligned}
 Y_{11}^{knt} &= 5.6466 \text{TPa}, \quad Y_{22}^{knt} = 7.080 \text{TPa}, \quad Y_{12}^{knt} = 1.9445 \text{TPa}, \\
 \nu_{12}^{CN} &= 0.175, \quad \rho^{knt} = 1400 \text{kg/m}^3 \quad \text{ve} \quad Y^m = 2.5 \times 10^9 \text{Pa}, \\
 \nu^m &= 0.34, \quad \rho^m = 1.15 \times 10^3 \text{kg/m}^3.
 \end{aligned}$$

Ayrıca, KNT'nin verimlilik parametreleri **Tablo 1**'de sunulmaktadır.

**Tablo 1.** KNT'lerin hacim oranı için KNT/matris verimlilik parametreleri

$V_{knt}^*$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
0.12	0.137	1.022	0.715
0.17	0.142	1.626	1.138
0.28	0.141	1.585	1.109

Ü ve X tipi KNT'lerle modellenen kayma deformasyonlu silindirik kabukların kritik eksenel basınç yükü değerleri Shen [8] sonuçlarıyla karşılaştırmak için **Tablo 2**'de listelenmiştir. Shen [8] çalışmasında kritik eksenel basınç yükü  $N_{shen}^{kr} = 2\pi R N_{kdt}^{kr}$  olarak kullanıldığı için bizim çalışmada elde edilen  $N_{kdt}^{kr}$  ifadesi  $2\pi R$  ile çarpılmaktadır. KNT'nin geometrik özellikleri:  $L_{knt} = 9.26 \text{nm}$ ,  $R_{knt} = 0.68 \text{nm}$ ,  $h_{knt} = 0.067 \text{nm}$  ve  $\nu_{12}^{knt} = 0.175$  olup silindirik kabuğun geometrik karakteristikleri şu şekildedir:  $R/h = 30$ ,  $h = 0.002 \text{m}$ ,  $\bar{Z} = L^2/Rh = 100, 300, 500$ . KNT'nin hacim kesir oranı  $V_{knt}^* = 0.17$  olarak ele alınmıştır. Bu veriler Shen [8] çalışmasından alınmıştır. Kayma gerilme fonksiyonlar şu şekildedir:  $f_i(z) = z - 4z^3/3$ , ( $i = 1, 2$ ). **Tablo 2**'den görülebileceği gibi, bizim çalışmamızda elde edilen Ü ve X tipi KNT takviyeli kayma deformasyonlu silindirik kabuğun kritik eksenel basınç yükünün minimum değerleri Shen [8] çalışmasında elde edilen sonuçlarla iyi bir uyum içindedir. Parantez içindeki  $(m, n)$  sayıları eksenel burkulma yükünün minimum değerlerine karşı gelen dalga sayılarıdır.

**Tablo 2.** Değişik tip KNT örüntüsüne sahip silindirik kabukların KDT çerçevesinde kritik yük değerlerinin  $\bar{Z}$  parametresine bağlı olarak karşılaştırılması

$\bar{Z}$	$N_{shen}^{kr} = 2\pi R N_{kdt}^{kr} (m, n)$			
	Ü	X	Ü	X
	Ref. [8]		Bu çalışma	
100	121.08	142.81	121.278 (1,4)	138.953(1,4)
300	122.25	148.06	122.440 (2,4)	148.966 (1,3)
500	122.98	142.58	123.1203(2,4)	139.314 (2,4)

### 3.3 Nanokompozit silindirik kabukların burkulma analizi

Bu alt bölümde, KNT örüntülü silindirik kabukların kritik aksenal yükü için sayısal sonuçlar sunulmaktadır. Özgün analizler için, malzeme özellikleri önceki karşılaştırmada sunulan matris olarak PMMA ve takviye olarak (10, 10) KNT'ler seçilmiştir. Kayma gerilme fonksiyonları da benzer şekilde parabolik fonksiyon olarak seçilmiştir. Sayısal hesaplarda Formüller (17) ve (18) ve Maple programı kullanılmaktadır.

Farklı KNT örüntüleri için kompozit silindirik kabukların kritik aksenal yükleri ( $10N_{1kdt}^{kr}$  ve  $10N_{1kkt}^{kr}$ ) ve karşılık gelen ( $m, n$ ) burkulma modlarının hacim kesir oranlarına göre dağılımı Tablo 3' de sunulmaktadır. Burada, silindirik kabuk karakteristikleri şu şekilde kullanılmıştır:  $L/R=1$ ,  $R/h=20$ ,  $h=0.002m$ . Tablo 3' den görüldüğü gibi kritik aksenal yükün en büyük değeri X örüntülü silindirlerde meydana gelirken en küçük kritik aksenal yük değeri  $\Lambda$  örüntülü silindirlerde ortaya çıkar. Kritik aksenal yükün değerine kayma deformasyonlarının etkisi belirgin olmakla beraber  $V_{knt}^*$ 'nin değişimi ile farklılıklar göstermektedir. Örneğin;  $V_{knt}^*=0.12$ 'den  $0.17$ 'ye ve sonra  $0.28$ 'e geçiş yaptığında kullanılan tüm örüntülerinde kritik aksenal yük değerine enine kayma deformasyonlarının etkisi azalıp sonra artmaktadır. Örneğin,  $\ddot{U}$ ,  $V$ ,  $\Lambda$  ve  $X$  örüntülere sahip silindirlerde enine kayma deformasyonunun etkisi sırasıyla,  $V_{knt}^*=0.12$  için %18.90, %13.02, %12.55 ve %26.98;  $V_{knt}^*=0.17$  için %16.37, %11.06, %10.68 ve %24.24 ve  $V_{knt}^*=0.28$  için %23.09, %15.38, %15.09 ve %33.34 olduğu görülmektedir. Burada kayma deformasyonunun etki oranı aşağıdaki ifadeden bulunur:

$$\%100 \times \left( N_{1kkt}^{kr} - N_{1kdt}^{kr} \right) / N_{1kdt}^{kr}$$

Tablo 3' den görüldüğü gibi üniform örüntüye sahip silindirik kabukların kritik aksenal yüküne kıyasla FD örüntülerin etkilerinin önemli derecede farklı olduğu görülmektedir.  $V$  ve  $\Lambda$  örüntülü kabukların kritik aksenal yük değerleri üniform silindirik kabuktakinden küçük olduğu halde,  $X$  örüntülü kabuklarda bu değerler daha büyüktür.  $V_{knt}^*$  değiştiğinde kritik aksenal yüke lineer değişen örüntü etkisi belirgin olup farklılıklar göstermektedir. Örneğin, örüntülerin kritik aksenal yüke etkileri KKT ve KDT çerçevesinde sırasıyla,

$V_{knt}^*=0.12$  için  $V$  örüntüsünde (-19.93%) ve (-14.12%),  $\Lambda$  örüntüsünde (-%25.05) ve (-%19.17) ve  $X$  örüntüsünde %36.31 ve %22.73;

$V_{knt}^*=0.17$  için  $V$  örüntüsünde (-%19.07) ve (-%13.93),  $\Lambda$  örüntüsünde (-%24.22) ve (-%19.06) ve  $X$  örüntüsünde %35.81 ve %23.02;

$V_{knt}^*=0.28$  için  $V$  örüntüsünde (-%22.22) ve (-%14.42),  $\Lambda$  örüntüsünde (-%25.14) ve (-%17.34) ve  $X$  örüntüsünde %41.14 ve %22.33 olduğu görülmektedir.

Görüldüğü gibi KDT çerçevesinde örüntülerin kritik aksenal yüke etkileri klasik kabuk teorisine kıyasla daha

düşük olmaktadır. Burada örüntü etkilerinin oranı bu ifade ile hesaplanmıştır:  $\%100 \times \left( N_{1kdt}^{FD} - N_{1kdt}^{\ddot{U}} \right) / N_{1kdt}^{\ddot{U}}$ .

$\ddot{U}$ ,  $V$ ,  $\Lambda$  ve  $X$  şeklinde KNT örüntüleri için polimer silindirik kabukların boyutsuz kritik aksenal yüklerinin ( $N_{1kdt}^{kr} \times 10$  ve  $N_{1kkt}^{kr} \times 10$ )  $L/R$  oranına bağlı olarak dağılımı Şekil 3' de sunulmaktadır. Sayısal hesaplarda silindirik kabuk karakteristikleri şu şekilde seçilmiştir:  $R/h=20$ ,  $h=0.002m$  ve  $V_{knt}^*=0.17$ . Şekil 3' den görüldüğü gibi  $L/R$  oranı arttığında kritik aksenal yükün değerleri sürekli olarak azalmaktadır.

Enine kayma deformasyonlarının kritik aksenal yüke etkisi  $L/R$  oranının artmasına bağlı olarak güçlü bir şekilde belirginliğini kaybetmektedir. Bu azalma özellikle  $\Lambda$  ve  $V$  desenli silindirlerde gözlenmiştir.  $X$  desenli silindirlerde ise  $L/R$  oranı 0.75'den 1.75'e arttığında enine kayma deformasyonlarının kritik aksenal yüke etkisinin azalmasına rağmen belirginliğini koruduğu görülmüştür. Örneğin,  $L/R$  oranı 0.75'ten 1.75'e arttığında  $\ddot{U}$ ,  $V$ ,  $\Lambda$  ve  $X$ -örüntüleri için kayma deformasyonlarının kritik aksenal yüke etkileri sırasıyla, %28.24'ten %5.86'ya, %20.03'den %3.37'ye, %19.83'den %3.48'e, %38.55'ten %9.2'ye kadar azalmaktadır. Görüldüğü gibi oranının sonraki artışlarında kayma deformasyonların kritik aksenal yüke etkileri azalarak yok olur ve bu durumda klasik kabuk teorisi çerçevesinde elde edilen ifadelerin kullanılması mümkün olabilir.

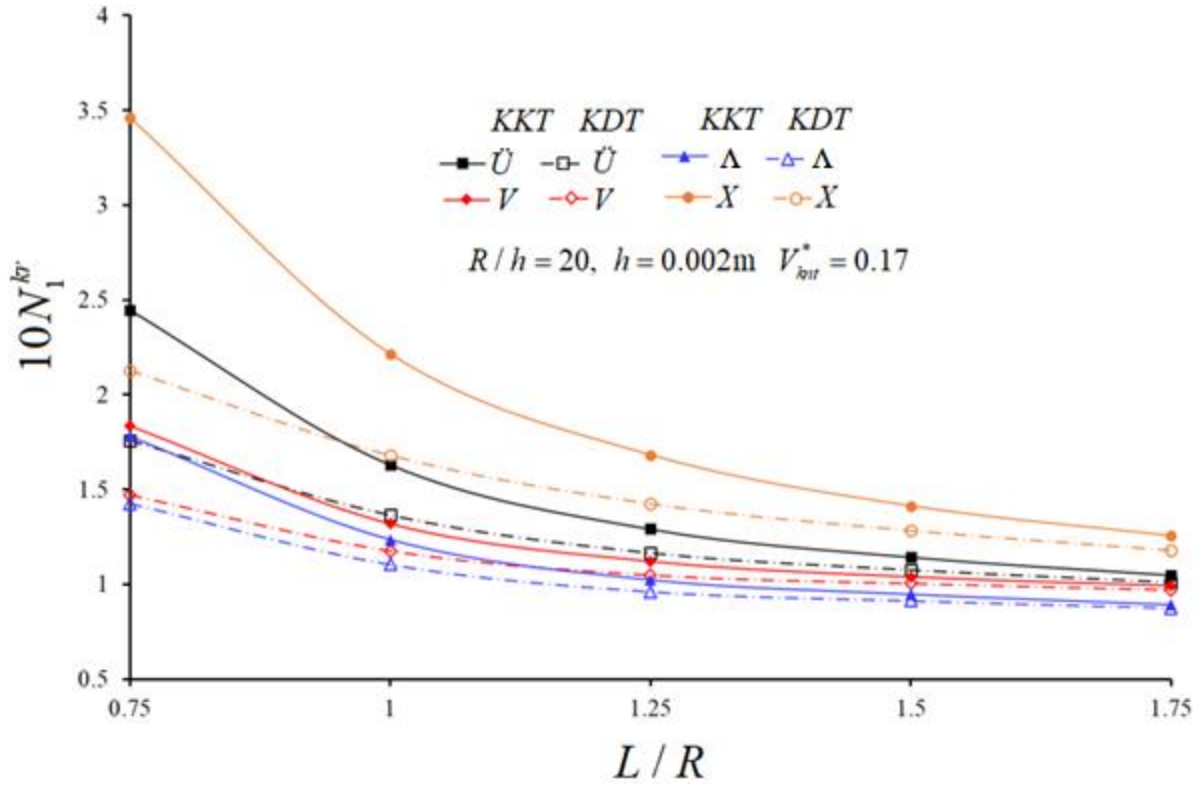
KNT'lerin polimer içindeki dağılımlarının kritik aksenal yüke etkisi  $L/R$  oranının artmasına bağlı olarak sürekli olarak azaldığı tespit edilmiştir. Bu azalmanın özellikle  $V$  örüntülü silindirde daha belirgin olduğu gözlenmiştir.  $\Lambda$  ve  $X$  örüntülü silindirlerde ise  $L/R$  oranı arttığında örüntülerin kritik aksenal yüke etkisinin azalmasına rağmen belirginliğini ciddi bir şekilde korumaktadır. Kayma deformasyon teorisi KKT'ye kıyasla örüntü etkilerini kayda değer olarak azaltmaktadır.

Örneğin,  $L/R$  oranı 0.75'ten 1.75'e arttığında fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabukların kritik aksenal yük değerleri ile üniform dağılımlı silindirlerin kritik aksenal yük değerleri kıyaslandığında, KDT çerçevesinde  $V$ ,  $\Lambda$  ve  $X$ -örüntülerinin kritik aksenal yüke etkileri sırasıyla, (-%16.34)'ten (-%4.06)'ya, (-%18.74)'ten (-%13.35)'e ve %21.07'den %16.62'ye kadar azalmakta iken, KKT çerçevesinde  $V$ ,  $\Lambda$  ve  $X$ -örüntülerinin kritik aksenal yüke etkileri sırasıyla, (-%24.93)'den (-%5.34)'e, (-%27.26)'dan (-%14.89)'a ve %41.4'ten %19.75'e kadar azalmaktadır.

Görüldüğü gibi  $L/R$  oranının sonraki artışlarında kayma deformasyonların kritik aksenal yüke etkileri azalarak yok olur ve bu durumda klasik kabuk teorisi çerçevesinde elde edilen ifadelerin kullanılması mümkün olabilir.

**Tablo 3.** Farklı örüntüler için KNT takviyeli silindirik kabukların boyutsuz kritik eksenel yük değerleri ve  $(m, n)$  burkulma modlarının hacim kesir oranına göre dağılımı

$V_{knt}^*$	$N_1^{kr} \times 10, (m, n)$							
	Ü		V		Λ		X	
	KKT	KDT	KKT	KDT	KKT	KDT	KKT	KDT
0.12	1.074(1,4)	0.871(1,4)	0.860(1,4)	0.748(1,4)	0.805(1,4)	0.704(1,4)	1.464(1,4)	1.069(1,4)
0.17	1.631(1,4)	1.364(1,4)	1.320(1,4)	1.174(1,4)	1.236(1,4)	1.104(1,4)	2.215(1,4)	1.678(1,4)
0.28	2.399(1,4)	1.845(1,4)	1.866(1,4)	1.579(1,4)	1.796(1,4)	1.525(1,4)	3.386(1,4)	2.257(1,4)



**Şekil 3.** Farklı KNT örüntüleri için silindirik kabukların kritik eksenel yükünün  $L/R$  oranına bağlı olarak dağılımı

#### 4 Sonuçlar

Eksenel basınç yüküne maruz KNT örüntülü silindirik kabukların burkulma analizi kayma deformasyon teorisi çerçevesinde sunulmaktadır. KNT örüntülü kompozit silindirik kabukların malzeme özelliklerinin konuma bağlı olduğu varsayılmaktadır. Nanokompozit silindirik kabukların temel denklemleri Donnell tipi kabuk teorisi kullanılarak türetilmiş ve Galerkin yöntemi uygulanarak çözülmüştür. KNT örüntülü silindirik kabuklar için kritik eksenel yük ifadesi KDT çerçevesinde bulunmuştur. KNT örüntüleri ve hacim kesir oranları, kabuk karakteristikleri değiştirilerek enine kayma deformasyonlarının FD nanokompozit silindirik kabukların kritik eksenel basınç yükü üzerindeki etkileri detaylı olarak araştırılmıştır.

#### Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

**Benzerlik oranı (iThenticate):** % 19

#### Kaynaklar

- [1] W. Khan, R. Sharma and P. Saini, Carbon nanotube-based polymer composites: Synthesis, properties and applications. In Carbon Nanotubes Current Progress of their Polymer Composites; Intech Open: London, UK, 2016.
- [2] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon. Nature, 354, 56–58, 1991. <https://doi.org/10.1038/354056a0>
- [3] E.T. Thostenson, Z. Ren and T.W. Chou, Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review. Composites Science and Technology, 61, 1899-1912, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(01\)00094-X](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(01)00094-X)
- [4] A.M.K. Eswai and M.M. Farag, Carbon nanotube reinforced composites: potential and current

- challenges. *Materials & Design*, 28, 2394-2401, 2007. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(01\)00094-X](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(01)00094-X)
- [5] P.M. Ajayan, L.S. Schadler, C. Giannaris and A. Rubio, Single-walled nanotube-polymer composites: strength and weaknesses. *Advanced Materials*, 12(10), 750-753, 2000. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4095\(200005\)12:10<750::AID-ADMA750>3.0.CO;2-6](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4095(200005)12:10<750::AID-ADMA750>3.0.CO;2-6)
- [6] Y.J. Liu and X.L. Chen, Evaluation of effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mechanics of Materials*, 35, 69-81, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00200-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00200-4)
- [7] Y. Han and J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites. *Computational Materials Science*, 39, 315-323, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2006.06.011>
- [8] H. S. Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells. *Composite Structures*, 93, 2096-2108, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.02.011>
- [9] Z.X. Lei, K.M. Liew and J.L. Yu, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method. *Composite Structures*, 98, 160-168, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.006>
- [10] S. Chakraborty, T. Dey and R. Kumar, Stability and vibration analysis of CNT-Reinforced functionally graded laminated composite cylindrical shell panels using semi-analytical approach. *Composites Part B-Engineering*, 168(209), 1-14, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.051>
- [11] V.H. Nam, N.T. Phuong and V.M. Duc, Nonlinear buckling of orthogonal carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells under axial compression surrounded by elastic foundation in thermal environment. *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, 8(4), Article Number: 1950016, 2019. <https://doi:10.1142/S204768411950016>
- [12] P.T. Hieu and H.V. Tung, Buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments under mechanical loads in thermal environments. *Zamm-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 100 (11), Article Number: 201900243, 2020. <https://doi:10.1002/zamm.201900243>
- [13] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*, Boca Raton, CRC Press, 2004.
- [14] E. Viola, F. Tornabene and N Fantuzzi, General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. *Composite Structures*, 95, 639-666, 2013. <https://doi:10.1016/j.compstruct.2012.08.005>
- [15] Avey M., Fantuzi N., Sofiyev AH. Mathematical modeling and analytical solution of thermoelastic stability problem of functionally graded nanocomposite cylinders within different theories. *Mathematics*, 10, 1081, 2022. <https://doi.org/10.3390/math10071081>
- [16] A.S. Volmir, *Stability of Elastic Systems*. Moscow, Nauka. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Systems Command. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD 628508, 1967.

