Cilt: 08 Sayı: 03 Kategori: 02 Sayfa: 24-44 ISSN No: 1303-6319 Volume: 08 Number: 03 Category: 02 Page: 24-44

KESİRLİ ÇOK ETKENLİ TASARIMLAR VE KODLAR

Nazan DANACIOĞLU*

ÖZET

Kesirli çok etkenli en az sapma tasarımları, uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada, 2-düzeyli kesirli çok etkenli tasarımların; kelime uzunluğu yapısı, çözüm, en az sapma vb. gibi özellikleri tanıtılmıştır. İki-düzeyli kesirli çok etkenli tasarımların cebirsel yapısı araştırılarak; kod teorisi, özellikle Hamming kodları, ile kesirli çok etkenli tasarımlar arasındaki ilişki incelenmiştir. 2-düzeyli kesirli çok etkenli tasarımlar, kodlardan (Hamming kodları, ikili doğrusal ve döngüsel kodlar) yararlanarak oluşturulmuş ve en az sapma ölçütüne göre sıralanmıştır. Tasarımlar ve kod olarak karşılıkları bir katalogda toplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: En az sapma, Hamming kodları, Kesirli çok etkenli tasarımlar, Kod teorisi.

1. GİRİŞ

Kesirli çok etkenli (KÇE) (fractional factorial) tasarımlar endüstri, mühendislik vb. gibi pek çok bilim alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Box ve Hunter (1961)'ın tasarımlar için bir iyilik ölçütü olarak çözüm (resolution) kavramını önermesinden bu yana, KÇE tasarımlar araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Fries ve Hunter (1980), bir başka iyilik ölçütü olan en az sapma (EAS) (minimum aberration) kavramını geliştirmişlerdir. Franklin (1984) 2^{n-m} optimal moment tasarımlarını oluşturmuş, Wu ve Chen (1992); Sun, Chen ve Wu (1993) deneme sayısı, kelime uzunlukları yapısı (word-length pattern) ve çözümüne göre sınıflandırılmış kataloglar geliştirmişlerdir. Tang and Deng (1999), genelleştirilmiş EAS kavramını (generalized minimum aberration) önermişlerdir. Clark and Dean (2001), Hamming uzaklıklarını (Hamming distance) kullanarak herhangi iki KÇE tasarımın izomorfikliğini incelemişlerdir. Lin and Sitter (2008) ve Xu (2009), izomorfiklik kontrolü için yeni algoritmalar önermişlerdir.

Bu çalışmada, Hamming kodları (Hamming codes) incelenmiş, EAS ve çözüm ölçütlerine göre sıralanmış KÇE tasarımların (Box vd., 1978; Wu ve Chen, 1992) kod olarak karşılıkları bulunmuş ve bir katalogda toplanmıştır (Bkz. Tablo 3).

Bir 2^{n-p} KÇE tasarımı $D(2^{n-p})$ ile gösterilsin. $A_i(D)$, D'nin tanımlayıcı bağıntı yapısındaki i uzunluklu kelime sayısı olmak üzere, $W(D)=(A_1(D),A_2(D),\ldots A_n(D))$, D tasarımının *kelime uzunluğu yapısı* olarak adlandırılır. D_1 ve D_2 iki 2^{n-p} KÇE tasarım; s, $A_s(D_1) \neq A_s(D_2)$'yi sağlayan en küçük tam sayı olmak üzere,

$$\mathbf{A_s(D_1) < A_s(D_2)} \qquad (1)$$

ise, D_1, D_2'den daha az sapmaya sahiptir (Chen, 1998).

*Yrd. Doç. Dr., Sinop Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, e-posta: nazand@sinop.edu.tr

2. YÖNTEM

Çalışma süresince, sonlu cisimler teorisi, doğrusal cebir, polinomlar, vektör uzayları vb. konuların incelenmesi gerekmiştir.

Bilindiği üzere, gerçel sayılar, rasyonel sayılar ve kompleks sayılar cisimlere örnek olarak verilebilir ve her biri sonsuz sayıda elemana sahiptir. Sadece, sonlu sayıda eleman içeren bir cisim, sonlu cisim (finite field) olarak adlandırılır (Wiggert, 1978).

Teorem 1. F, q karakteristiğine sahip ($\sum_{i=1}^{q} 1=0$ sağlayan en küçük tamsayı) sonlu bir cisimse, bu durumda F, n pozitif tamsayısı için, q^n elemanlıdır.

q asalsa, $F_q = <F_q , +_q , ._q >$ sistemi, $F_q = \{0, 1, 2, ..., q-1 \}$ olmak üzere, bir Galois cismi (GF) (Galois field)'dir ve GF(q) ile gösterilir. Gerçekte, F_q , en basit GF'dir (Dey, 1985).

q, bir asal sayının kuvveti ise, q sembollü bir kümeden, $\{0,1,\ldots,q-1\}$, n uzunluklu tüm kelimelerin kümesi, V(n,q) vektör uzayı olarak değerlendirilebilir. Bu yüzden, bu sembolleri kullanan n uzunluğundaki bir kod, V(n,q)'nun alt kümesidir V(n,q) vektör uzayı, q^n vektörlüdür. k boyutlu bir alt uzayı ise q^k vektöre sahiptir (Pless, 1998).

Tanım 1. Bir V(n,q) vektör uzayındaki doğrusal bağımsız vektörler, $x_1, x_2,\ldots,x_m$, temel (basis) vektörler olarak adlandırılır. Vektör uzayındaki her eleman, bu temel vektörlerin doğrusal birleşimi olarak elde edilebilir ve bir vektör uzayı ya da alt uzayının boyutu temelindeki vektör sayısıdır (Matthews, 1991).

Teorem 2. U ve S, V vektör uzayının alt uzayları ise, aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir.
$V=U\oplus S$ (2) $U\cap S=\{0\}$ ve $U+S=V$ (U ve S birbirinin tümleyenidir(complement)).
V'deki her z vektörü, $z=x+y$ ($x\in U$, $y\in S$) biçiminde yazılabilir (Halmos, 1999).

Teorem 3. V, n+m boyutlu herhangi bir vektör uzayı ve U, V'nin n boyutlu alt uzayı ise, V'nin, $V= U\oplus S$ yapacak m boyutlu bir S alt uzayı vardır (Halmos, 1999).

2.1 İkili Kodlar

Kod teorisi, bilgisayarların kullanılmaya başlamasıyla gelişmiştir. R.W. Hamming (1950), Bell Laboratuarları için çalışırken, hatayı bulan makinenin, hatayı düzeltmesinin de gerektiğinden yola çıkarak, bilgiyi şifrelemenin bir yolunu bulmuştur.

Bir *kelime,* sayılardan oluşan bir diziyi gösterdiğinde (burada 0 ve 1'ler), örneğin (01), bir *kod kelimesi* (codeword), sayılardan oluşan daha uzun bir diziyi gösterir. Bir blok kodundaki n uzunluklu her bir kod kelimesi, genel olarak k uzunluklu bir bilgi vektörünün genişletilmesiyle oluşturulur. Genişletme, değerleri bilgi bitlerinden hesaplanan denklik bitlerinin, bilgi vektörüne eklenmesiyle yapılır. Bu nedenle, koddaki kod kelimelerinin sayısı, rastgele seçilmiş olası k bitlerinin sayısıyla, 2^k ile, belirlenir. Bir (n,k) blok kodu, her bir kod kelimesinin n uzunluğunda ve k tane bitin bilgi biti olduğu (denklik biti sayısı bu yüzden n-k'dır) bir koddur (Arazi, 1988).

Tanım 2. *Bir doğrusal kod*, herhangi iki kod kelimesinin toplamının, yine bir kod kelimesi olduğu koddur (Arazi, 1988).

Tanım 3. Bir kod kelimesinin *Hamming ağırlığı*, 1 değerine sahip elemanlarının sayısıdır (Arazi,1988).

Tanım 4. Aynı uzunluktaki İki kod kelimesi arasındaki *Hamming uzaklığı*, bitlerde farklı olan rakamların sayısıdır ve d ile gösterilir (Vanstone ve Oorschot, 1989).

Tanım 5. Bütün kod kelimelerinin kümesi bir V(n,q)'nun alt uzayını oluşturuyorsa ve kod kelimeleri farklıysa, GF(q) üzerindeki böyle bir kod, doğrusal koddur (Purser, 1995).

Doğrusal kodlar, n uzunluğuna, d uzaklığına ve k boyutuna sahiptir. Bu parametrelere sahip bir doğrusal kod, (n,k,d) doğrusal kodu olarak gösterilir (Pretzel, 1992).

Teorem 4. Bir (n,k,d) C kodunun Hamming ağırlığı,

$$\mathbf{w(\ C\ )=min\ \{w(x):\ x\ \in C,\ x\neq 0} \tag{2}$$

ve uzaklığı da d olsun. Bu durumda d,

$$\mathbf{d = \min_{w\in C,\, x\neq 0} w(x)} \tag{3}$$

dir (Hedeyat vd.,1999).

2.1.1 Üreteç matrisleri

Bir (n,k,d) doğrusal kodu, üreteç matrisi (generator matrix) ile tanımlanabilir.

Tanım 6. Bir (n,k) kodu için G üreteç matrisi, satırları C için temel olarak seçilen vektörlerden oluşan k×n boyutlu bir matristir (Pless, 1998).

$$\mathbf{G = [I_k \mid A]} \tag{4}$$

standart biçimde olarak adlandırılır ve rankı k'dır. Burada, I_k, k×k birim matris ve A, k×(n-k) boyutlu bir matristir. (Huffman ve Pless, 2003).

Böylelikle bilgi bitleri, bir kod kelimesinin ilk k elemanında görünecektir. Bir doğrusal kod, pek çok temele (hepsi aynı büyüklükte) ve pek çok üreteç matrisine sahip olabilir. üreteç matrisinin önemli özelliklerinden biri de kodun en az Hamming ağırlığının, G üreteç matrisinin satırlarının ağırlığından bulunabilmesidir (Franklin, 1984; Pless, 1998).

2.1.2 Denklik kontrol matrisleri

Bir doğrusal kod, denklik kontrol matrisi (DKM) (parity-control matrix) ile de tanımlanabilir.

Tanım 7. Bir C kodu için, $v \in C$ olmak üzere, Bir H matrisi, yalnız ve yalnız $\mathbf{v \times H} = \mathbf{0}$ ise, bir DKM'dir (Macwilliams ve Sloane, 1977).

G, C için üreteç matrisi ve H de DKM ise, G'nin satırları kod kelimeleri olduğundan, $G \times H = 0$'dır.

Önerme 1. $\mathbf{G = [I_k \,|\, A]}$ ise, buna karşılık gelen DKM $(n-k) \times n$ boyutlu;

$$\mathbf{H = [-A^T \;|\; I_{n-k}]} \tag{5}$$

dır. H'nin rankı n-k'dır (Huffman ve Pless, 2003).

2.1.3 Bir kodun duali

C, F cismi üzerinde bir (n,k,d) kodu ise, C'nin $C^{\perp}$ (C dual) dik tümleyeni; $C^{\perp} = \{\, x \in V_n(F)\!: x.y = 0$ bütün $y \in C$ için $\}$'dir. Bunun anlamı, $C^{\perp}$'in C'deki her vektöre dik, F üzerindeki n-haneli küme olduğudur (Huffman ve Pless, 2003).

Teorem 5. C, bir (n,k,d) doğrusal kodu olsun. Bu durumda; n uzunluğuna, n-k boyutuna ve bazı $\mathbf{d}^{\perp}$ (C'nin dual uzaklığı) sayıları için $\mathbf{d}^{\perp}$ en kısa uzaklığına sahip $\mathbf{C}^{\perp}$ dual kodu; **a)** Bir (n,n-k, $\mathbf{d}^{\perp}$) kodudur. **b)** C için üreteç matrisi, $\mathbf{C}^{\perp}$ için DKM'dir. C için bir DKM, $\mathbf{C}^{\perp}$ için bir üreteç matrisidir. **c)** $\mathbf{(C^{\perp})^{\perp} = C}$'dir (Hedeyat vd., 1999).

Sonuç 1. G, C için üreteç matrisi ise, H de $C^{\perp}$'in üretecidir (Huffman ve Pless, 2003).

2.1.4 Self-dual kodlar

Bir C kodu, $C^{\perp}$=C ise, self-dual, duali kendisine eşit, bir koddur. **a)** Bir kodun duali kendisiyse, kelime uzunluklarının çift olması gerekir. **b)** Duali kendisine eşit bir kodun bütün kelimeleri çift ağırlıktadır ve bütün ağırlıklar 4 ile bölünebiliyorsa, n, 8'in çarpanıdır. **c)** Duali kendisine eşit kodlar, (n, n/2) doğrusal kodlarıdır (Sloane ve Thompson, 1983).

Önerme 2. Herhangi bir (2k, k, d) self-dual kodu için, üreteç matrisi ile oluşturulan ve d ağırlıklı bir satır içeren, denk bir C kodu vardır (Bilous ve Rees, 2003).

2.1.5 Kodlama sınırları

Teorem 6. (Hamming ya da küre-paketi sınırı) Bir q-dizini (n, A, 2t+1) kodu,

$$\mathbf{A\left(\binom{n}{0} + (q-1)\binom{n}{1} + \dots + (q-1)^t \binom{n}{t}\right) \le q^n}$$

eşitsizliğini sağlar. Bir (n,A,2t+1) kodu için;

$$A \le \frac{q^n}{\left\{\binom{n}{0} + \dots \binom{n}{t}(q-1)^t\right\}}$$

ya da başka bir deyişle;

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \le 2^{n-k} \tag{6}$$

dir. Hamming sınırı, verilen bir n uzunluklu, 2t+1 uzaklıklı kodda, kod kelimelerinin sayısı için bir üst sınırdır (Nguyen, 1997; Macwilliams ve Sloane, 1977).

Teorem 7. (Griesmer Sınırı) C, GF(q) üzerinde bir [n,k,d] koduysa,

$$n \ge \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil \tag{7}$$

dır. Griesmer sınırı, verilen bir n,k,d için alt sınırdır. Hamming kodlarının dualleri, Griesmer sınırını sağlayan kodlar ailesindendir (Gulliver ve Bhargava, 2000).

Teorem 8. (Singleton sınırı) n-k ≥ d-1'dir (Macwilliams ve Sloane, 1977).

Teorem 9. (Varshamov-Gilbert Sınırı). Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en kısa d uzaklıklı, en fazla r denklik bitli, n uzunluklu, 2 elemanlı bir cisim üzerinde doğrusal bir kod vardır (MacWilliams ve Sloane, 1977).

$$\sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} \langle 2^r \tag{8}$$

2.1.6 Ağırlık dağılımları ve ağırlık sayıları

Tanım 8. C bir (n,k,d) kodu ve A_i, C'de i ağırlıklı kod kelimelerinin sayısı ise, n+1 haneli $(A_0,A_1,...,A_n)$ vektörü, C'nin ağırlık dağılımı olarak adlandırılır. A_0 her zaman 1'e eşittir. Aynı şekilde, $C^{\perp}$ kodu için ağırlık dağılımı, $\left(A_0^{\perp}, A_1^{\perp}, ..., A_k^{\perp}\right)$'dır (Vanstone ve Oorschot, 1989).

2.1.7 Hamming kodları

İkili bir H_r Hamming kodu, $n=2^r-1$ uzunluğunda (r ≥2); sütunları r uzunluklu sıfır olmayan ikili vektörlerden oluşan H DKM'li doğrusal bir $(n=2^r-1, k=2^r-r-1, d=3)$ kodudur. $(n-k)\times n$ boyutlu H DKM'nin doğrusal bağımsızlık şartını sağlaması için, n – k uzunluğunda n adet sütunundan hiç birinin sıfırdan oluşmaması gerekir. n-k uzunluğunda olabilecek en fazla sütun sayısı 2^{n-k}, sıfırdan farklı olanların sayısı ise $2^{n-k}-1$'dir. Matrisin sütun sayısı için aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür.

$$n \le 2^{n-k} - 1 \tag{9}$$

$n = 2^{n-k} - 1$ eşitliğini sağlayan kodlara Hamming Kodu veya mükemmel kodlar (perfect codes) denilmektedir Hamming kodu için $n = 2^{n-k} - 1$ eşitliği göz önünde tutulursa, (n,k) için (3,1), (7,4), (15,11),(31,26) gibi değerler kullanılabilir (Kuş, 2002).

Bir tane denklik biti eklemek koşuluyla, ($n=2^r-1$, $k=2^r-r-1$, d=3) mükemmel kodu, ($n=2^r$, 2^r-r-1, 4) genişletilmiş mükemmel kodu üretir (Nguyen, 1997).

2.2 Döngüsel Kodlar

GF(q) üzerindeki doğrusal bir koda; (c_0, $c_1,\ldots,c_{n-2},c_{n-1}$) kod kelimesi iken, ($c_1,c_2,\ldots,c_{n-1},c_0$) de kod kelimesiyse, döngüsel kod (cycling codes) denir (Hedeyat vd., 1999).

Bir döngüsel kod, üreteç polinomu ya da denklik kontrol polinomuna göre tanımlanır. Döngüsel bir kod, aynı zamanda doğrusaldır. Döngüsel kodlar sonlu cisimler üzerindeki polinomlara dayanırlar ve basit kodlama işlemleri, halka teorisi yardımıyla yapılabilir (Pretzel, 1992).

Teorem 10. Döngüsel bir (n,k,d) kodu için g(x) üreteç polinomu, her zaman aşağıdaki özelliklere sahip olacak şekilde seçilebilir.

a) g(x)'in derecesi n-k'dir

b) Baştaki g_{n-k}'nın katsayısı 1'dir.

c) g(x), GF(q) üzerinde x^n-1'i böler.

Bütün kelimelerin kümesi a(x)g(x) polinomlarından yararlanılarak gösterilir. Buradaki a(x), katsayıları GF(q)'dan olan bütün polinomlardır ve dereceleri k-1'i geçmez. Bu özelliklere sahip tek bir üreteç polinomu vardır (Hedeyat vd., 1999).

Üreteç vektörünün;

$$\mathbf{g=(1110100)} \tag{10}$$

olduğu varsayılsın. Bu durumda üreteç matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathbf{G}= \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \longrightarrow g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+g_4x^4+g_5x^5+g_6x^6 \\ \longrightarrow g_6x^6+g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+g_4x^4+g_5x^5 \\ \longrightarrow g_5x^5+g_6x^6+g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+g_4x^4 \end{matrix}$$

Teorem 11. C, g(x) üreteç polinomlu bir ikili döngüsel kodsa,

$$\mathbf{g(x)\ h(x)=x^n-1} \tag{11}$$

eşitliğini sağlar. h(x) polinomu, C'nin denklik kontrol polinomu olarak adlandırılır (Pless, 1998).

Bir kod döngüselse, duali de döngüseldir.

Teorem 12. C, GF(q) üzerinde n uzunluklu döngüsel bir kodsa ve üreteç polinomu da g(x) ise; $\mathbf{C}^{\perp}$ de döngüseldir ve eşitlik 12'deki üreteç polinomuna sahiptir.

$$\mathbf{x}^{\mathbf{n-1}} / \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \tag{12}$$

Burada,

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{deg(g)}} \, \mathbf{g}(\mathbf{x}^{-1}) \tag{13}$$

g(x)'e karşılık gelen (reciprocal) polinomdur (Hedeyat vd., 1999).

Eşitlik 10'da verilen g üreteç vektörü $g(x)=1+x+x^2+x^4$ polinomuyla gösterilebilir ve karşılık gelen polinomu; eşitlik 13'ten; $1+x^2+x^3+x^4$ olarak bulunur. Bu durumda dual kodun üreteç polinomu da eşitlik 12'den,

$$\frac{\mathbf{x}^7 - \mathbf{1}}{\mathbf{1} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^4} = \mathbf{1} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3$$

dir.

3. BULGULAR

Hamming kodları oluşturulurken kullanılan (Bkz. Bölüm 2.1), n-k tane denklik bitinin, KÇE tasarımları oluştururken kullanılan ek etkenler ve k tane bilgi biti de temel etkenler olarak düşünülebilir. Önerme 1'den DKM'nin boyutunun $(n-k)\times n$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda, kodu oluşturan n-k eşitliğin katsayılarını veren bu matris; KÇE tasarımlar söz konusu olduğunda, tasarımın tanımlayıcı bağıntılarını gösteren matris olarak düşünülebilir (Danacıoğlu, 2005).

Rao (1946), N denemeli, k etkenli, q sembollü ve (t+m+1) güçlü bir dikey dizimin (orthogonal array), m etkileşime kadar tüm etkileşimlerin dik olarak tahmin edilebildiği (daha fazla etkenli etkileşimlerin sıfır olduğu varsayımı altında) bir KÇE tasarıma eşit olduğunu kanıtlamıştır. Bu nedenle, 2 güçlü bir dikey dizim simetrik çok etkenliler için dik ana-etki tasarımlarına; 3 güçlü bir dikey dizim Ç-IV tasarımlarına eşittir. Dikey dizimin gücüyle, bir (n,k,d) kodunun dualinin en kısa uzaklığı, $d^{\perp}$, arasında ilişki olduğu bilinmektedir ve Teorem 13'te verilmiştir.

Teorem 13. C, GF(q) üzerinde $\mathbf{d}^{\perp}$ dual uzaklıklı bir (n,k,d) doğrusal kodu ise, C'nin kod kelimeleri, elemanları GF(q)'dan olan bir OA(N=q^k,n,q,$\mathbf{d}^{\perp}-\mathbf{1}$) dikey diziminin satırlarını oluşturur. Sonuç olarak, GF(q) üzerindeki doğrusal bir OA(N=q^k,n,q,t)'nin satırları, $\mathbf{d}^{\perp} \geq \mathbf{t}+\mathbf{1}$ dual uzaklıklı bir (n,k,$\mathbf{d}^{\perp}$) kodu oluşturur. Dikey dizimin gücü t ise, $\mathbf{d}^{\perp} = \mathbf{t}+\mathbf{1}$'dir (Brouwer vd., 2003; Hedeyat vd., 1999).

Teorem 5 (b)'den, C için DKM'nin, $\mathbf{C}^{\perp}$ için üreteç matrisi olduğu bilinmektedir. DKM, KÇE tasarım için tanımlayıcı bağıntıları gösteriyorsa, bu matrisin satırları temel olarak alındığında; elde edilen kod kelimelerinin, tasarım için tanımlayıcı bağıntı yapısını vermesi gerekir (Danacıoğlu, 2005).

EAS ölçütüne göre tasarımları karşılaştırırken kullanılan kelime uzunluğu yapıları, kodlar söz konusu olduğunda Tanım 8'de verilen ağırlık dağılımıdır. Kod kelimelerinin bulunması ve en kısa uzaklıkların hesaplanmasında, MATLAB 6.5'da var olan fonksiyon ve komutlardan yararlanılmıştır.

Hangi tasarımların inceleneceği konusunda, Box, Hunter ve Hunter (1978) tarafından oluşturulan ve en yüksek çözüme sahip tasarımları gösteren Tablo temel olarak alınmış ve sadece, bazı tasarımlar için ayrıntıya girilmiştir. Diğer tasarımlar için Danacıoğlu (2005)'e bakılabilir.

3.1 2_{III}^{3-1} Tasarımı

Tanımlayıcı bağıntısı I=ABC olan 2_{III}^{3-1} KÇE tasarımı Tablo 1'de gösterilmektedir.

Tablo 1. 2_{III}^{3-1} **Tasarımı (I=ABC)**

a	b	c=a+b	Denemeler
0	0	0	000
0	1	1	011
1	0	1	101
1	1	0	110

Tablo 1'deki denemeleri kod kelimeleri olarak düşünürsek; örneğin, 011 kod kelimesi iken, 101 de kod kelimesi olduğundan, denemelere karşılık gelen kodun, döngüsel olduğu görülmektedir (Bkz. Bölüm 2.2).

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \text{döngüsel}$$

Kod kelimeleri arasındaki en kısa Hamming uzaklığı d=2'dir (Bkz. Eş. 3). Döngüsel bir koda karşılık geldiklerine göre, kod kelimelerinin üreteç polinomundan oluşturulması ve eşitlik 11'den, üreteç polinomu ile denklik kontrol polinomunun çarpımının x^n-1'e eşit olması gerekmektedir.

2_{III}^{3-1} tasarımı söz konusu olduğunda;

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\mathbf{1\times 3}} \qquad \rightarrow \ \mathbf{1+x+x^2} \tag{14}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\mathbf{2\times 3}} \rightarrow \ \mathbf{1+x} \tag{15}$$

dir. Görüldüğü gibi, H DKM, I=ABC tanımlayıcı bağıntısının polinom olarak gösterimidir. Eşitlik 11'den;

$$\mathbf{x^3 - 1 = (1 + x)(1 + x + x^2)}$$

dir. Tanım 6'dan, G üreteç matrisinin satırları, C'nin temelleridir. Bu temeli X ile gösterirsek;

$$X=\{(101),(011)\}$$

olarak yazabiliriz. Bu temellerden elde edilen kod kelimeleri; aynı zamanda, tasarımın denemeleridir:

$$0(101)+0(011)=000$$
$$0(101)+1(011)=011$$
$$1(101)+0(011)=101$$
$$1(101)+1(011)=110$$

G üreteç matrisi, k×n, 2×3 boyutlu olduğundan ve kodun döngüsel olduğu bilindiğinden, denemelerin karşılık geldiği kod; döngüsel (3,2) kodudur.

(3,2) döngüsel kodunun duali, Teorem 5 (a)'dan (3,1,3) döngüsel kodudur. Eşitlik 13'ten;

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}.\mathbf{g}(\mathbf{x}^{-1})=\mathbf{x}\left(1+\frac{1}{\mathbf{x}}\right)=\mathbf{x}+1$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{n}-1}/\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{3}-1/\mathbf{x}+1=1+\mathbf{x}+\mathbf{x}^{2}$$

dir. Teorem 5 (b)'den, C için DKM, $\mathbf{C}^{\perp}$ için üreteç matrisi olduğundan; dual kodun, (3,1) döngüsel kodunun üreteç matrisi, eşitlik 14'teki H DKM'dir.

$$\mathbf{G}_{\mathbf{dual}}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}_{\mathbf{1\times3}}$$

Dual kodun üreteç matrisinden elde edilen kod kelimeleri, 0.111=000 ve 1.111=111 olduğundan; $(2^2-1,2^2-2-1,3)$ ya da Hamming (3,1) kodudur (Bkz. Bölüm 2.1.7).

$$\mathbf{C}^{\perp}=\{\mathbf{(000), (111)}\}\rightarrow\mathbf{H(3,1)} \tag{16}$$

En kısa Hamming uzaklığı, $d^{\perp}=3$ olduğundan, 2^{3-1} tasarımının çözümü III'tür (Bkz. Teorem 13). Dual kodun 0'lardan oluşan kod kelimesi dışındaki kelimesi 111'dir ve I=ABC tanımlayıcı bağıntı yapısına karşılık gelir. Bir tasarım, çözümü ile ifade edildiğinden, 2_{III}^{3-1} tasarımının kod olarak karşılığı, $(3,2,d^{\perp}=3)$'tür. Dual kodun ağırlık dağılımı, Tanım 8'den,

$$\mathbf{w(C^{\perp})=\{1,0,0,1\}^{\perp}} \tag{17}$$

dir. Dual kodun tanımı gereği (Bkz. Bölüm 2.1.3), dualin kod kelimelerinin, (3,2) döngüsel kodunun kod kelimelerine dik olması gerekmektedir. Dualdeki kod kelimelerini, koddaki kelimelerle tek tek çarpmak yerine, matris gösterimi tercih edilirse; dualin kod kelimelerini gösteren matrisin, denemelerin devriği ile çarpımı, diklik koşulunun sağlanıp sağlanmadığını gösterecektir ve diklik koşulu sağlanmaktadır.

Tasarımların eşdeş yapısı da bulunmak istenirse; bu durumda, tahmin edilecek etkilerin vektörlerle ifade edilmesi, örneğin A etkisi için (100), ve eşitlik 14'teki DKM ile mod 2'de toplanması gerekmektedir.

Tanım 1 ve teorem 2'den (3,2) kodunun üreteç matrisi (Bkz. Eş.15) ile duali H(3,1) kodunun üreteç matrisinin (Bkz. Eş.14) temellerinin birleşimi;

$$\mathbf{G_{birleşim}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

dir ve bu matrisin temellerinden oluşan denemeler 2^3 tamamlanmış çok etkenli tasarımının denemeleridir.

Bir vektör uzayının ya da alt uzayının boyutu, temelindeki vektör sayısı olduğundan, C'nin temelindeki vektör sayısı 2 ve $C^{\perp}$'in temelindeki vektör sayısı 1 olduğuna göre, V uzayının üreteç matrisi $G_{birleşim}$'de 3 temel olmalıdır. Görüldüğü gibi koşul sağlanmaktadır. Ayrıca, $C \cap C^{\perp} = \{0\}$ olduğundan teorem 2 de sağlanmaktadır.

3.2 2_{IV}^{6-2} Tasarımı

2_{IV}^{6-2} tasarımının I=ABCE=BCDF tanımlayıcı bağıntıları H DKM'nin satırlarına karşılık geldiğine göre;

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\mathbf{2\times6}} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\mathbf{4\times6}} \quad (18)$$

dir. Üreteç matrisinin satırlarından elde edilen kod kelimeleri;

0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

d=2 olan (6,4) doğrusal koduna karşılık gelmektedir.

$$\mathbf{G_{dual}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\mathbf{2\times6}} \quad (19)$$

Üreteç matrisinden elde edilen dual kodun kod kelimeleri:

$$\begin{array}{llllll} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \rightarrow \text{I=BCDF} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \rightarrow \text{ =ABCE} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \rightarrow \text{ =ADEF} \end{array} \quad (20)$$

$d^{\perp}$=4 ve ağırlık dağılımı;

$$w(C^{\perp}) = \{1,0,0,0,3,0,0\}^{\perp} \qquad (21)$$

olan (6,2,4) koduna; tasarım $(6,4,d^{\perp}=4)$'e karşılık gelir ve diklik koşulu sağlanmaktadır.

3.3 2^{6-2}_{III} Tasarımları

EAS ölçütüne göre en iyiden en kötüye doğru sıralanmış 3 tane 2^{6-2}_{III} tasarımı vardır. Buradaki amaç kodlardan yararlanarak en iyi tasarıma karar verebilmektir. Tablo 2'de bütün tasarımların (6,4) koduna karşılık geldiği ve parametrelerin; $n,k,d,d^{\perp}$, eşit olduğu görülmektedir (Danacıoğlu, 2005).

Tablo 2. 2^{6-2}_{III} **Tasarımlarının karşılaştırılması**

	I. En İyi Tasarım	II. En İyi Tasarım	III. En İyi Tasarım
T.B. yapısı	I=ABE=BCDF =ACDEF	I=ABE=CDF =ABCDEF	I=ABE=ABDF =DEF
Kelime uzunluğu yapısı	{3,4,5}	{3,3,6}	{3,3,4}
(n,k) kodu	(6,4)	(6,4)	(6,4)
Rank G	4	4	4
D	2	2	2
Rank $G^{\perp}$	2	2	1
$d^{\perp}$	3	3	3
Ağırlık dağılımı	{1,0,4,6,3,2,0}	{1,0,6,0,9,0,0}	{1,1,2,6,5,1,0}
$A^{\perp}_i$ dağılımı-i=Çmax,...,6	{1,1,1,0}	{2,0,0,1}	{2,1,0,0}

Tasarımların ağırlık dağılımları söz konusu olduğunda, üç tasarımın da kendilerinin ve duallerinin dağılımları farklı olduğundan; en iyi tasarıma karar vermek için bu sayılar kullanılabilir.

Dual kodun en kısa uzaklığı tasarımın çözümünü verdiğine göre, Tablo 2'de dual kodun ağırlık dağılımında, ağırlık değerleri $\geq Ç_{max}$ olmalıdır (2^{6-2} için 3). Aynı mantıkla, dual kod, EAS tasarımına karar verirken de belirleyici olmalıdır. Tasarımlar ve karşılık geldikleri dual kodlar aşağıda gösterilmektedir.

I. En iyi tasarım	**II. En iyi tasarım**	**III. En iyi tasarım**
$A^{\perp}_3=1,\ A^{\perp}_4=1,$	$A^{\perp}_3=2,\ A^{\perp}_4=0,$	$A^{\perp}_3=2,\ A^{\perp}_4=1,$
$A^{\perp}_5=1,\ A^{\perp}_6=0$	$A^{\perp}_5=0,\ A^{\perp}_6=1$	$A^{\perp}_5=0,\ A^{\perp}_6=0$

Buna göre,

$A^{I}_3=1<A^{II}_3=2$ olduğundan; I, II'den daha iyi bir tasarımdır.
$A^{I}_3=1<A^{III}_3=2$ olduğundan; I, III'ten daha iyi bir tasarımdır.
$A^{II}_4=0>A^{III}_4=1$ olduğundan, II, III'ten daha iyi bir tasarımdır.

3.4 Uygulama

KÇE tasarımlar ve kod karşılıklarının bulunması, Bölüm 3'te sadece 2 tasarım için gösterilmiştir. KÇE tasarımlarla yapılan, Ç-III tasarımından Ç-IV tasarımına ya da Ç-IV tasarımından, daha az etkenli Ç-III tasarımlarına geçmek kodlarla da mümkündür (Bkz., Danacıoğlu, 2005).

Tasarımlar kodlarla ifade edilirken $(n,k,d^{\perp}_{min})$ gösterimi kullanılırsa, Bölüm 3.3'te EAS ölçütüyle sıralanmış 2_{III}^{6-2} tasarımlarının (6,4,3) kodu olması, aynı n, k hatta aynı $d^{\perp}$ değerlerine sahip olmalarına karşın, kodların farklı olduğunu ve farklı tasarımlara ulaşıldığını göstermektedir.

Bu farklılığı yaratan dual koddur ve burada, örneğin (8,4,3) kodu, söz konusu olduğunda, dual ağırlık dağılımları farklı kaç kod; dolayısıyla EAS ölçütüne göre sıralanmış kaç tasarım elde edilebileceği sorusu akla gelmektedir.

KÇE tasarımlarla kodlar ve EAS ölçütüyle dual ağırlık dağılımları arasındaki ilişki belirlendikten sonra; ağırlık dağılımlarının hesaplanması; en iyi tasarıma karar verilebilmesi; tasarımların EAS ölçütüne göre sıralanabilmesi için, MATLAB programında, bazı fonksiyonlar yaratılmış ve iki farklı program (1. program, en iyi tasarım; 2. program belli bir tasarım/kod içindir) çalıştırılarak; tasarımlar karşılık geldikleri kod parametreleriyle birlikte elde edilmiştir.

Program girdileri; 1. program için n ve k değerleri; 2. program içinse, A matrisidir (Bkz. Eş.4). Başlangıçta DKM ya da üreteç matrisi kullanılması düşünülmüş; ancak, programın çalışma hızını etkileyebileceği endişesiyle A'nın kullanılmasına karar verilmiştir. A matrisleri, en düşük çözüm 3 olacak ve birbirinin aynı olan matrisler elenecek şekilde belirlenmiştir. Program çıktıları, özellikle etken sayısı arttığında çok uzun olduğundan; etken sayısı az olan örnekler verilmiş ve gerektiğinde çıktılarda kısaltmaya gidilmiştir.

2_{III}^{3-1} tasarımı (I=ABC) (Bkz. Tablo 1) için, n=3,p=1 ve k=2'dir. n=3, k=2 için en iyi tasarımı bulmaya yönelik 1. programın verdiği çıktı (Danacıoğlu, 2005):

```
As = (Bkz. Eş.15)
     1
     1
Rs =    3 (tasarımın çözümü)
ADs =    1    0    0    1 (Bkz. Eş.17)
```

dır. 2_{III}^{3-1} tasarımı için Eş. 15'te verilen G üreteç matrisi, A'yı da içermektedir. Program çıktı olarak birden fazla A vermediğinden; (3,2,3) kodu tek bir tasarıma karşılık gelmektedir. Buradan elde edilen A matrisi girdi olarak kullanılırsa, tasarımın kod olarak özellikleri, 2. program yoluyla bulunabilir. Program çıktısı aşağıdaki gibidir.

```
Uretec matrisi (Bkz. Eş. 15) =    1    0    1
                                  0    1    1

Denklik kontrol matrisi (Bkz. Eş. 14) =    1    1    1

Denemeler/kod kelimeleri (Bkz. Tablo 1) =    0    0    0
                                             0    1    1
                                             1    0    1
                                             1    1    0

Agirlik dagilimi ={1, 0, 3, 0} (Bkz. Tanım 8)

Kod kelimeleri arasi en kisa uzaklik d=2 (Bkz. Eş.3)

Tanimlayici baginti yapisi (Bkz. Eş.16) = 0    0    0
                                          1    1    1

Dual kodun agirlik dagilimi (Bkz. Eş.17)={1, 0, 0, 1}
```

Dual kod kelimeleri arasi en kisa uzaklik d=R=3 (Bkz. Teorem 13)

d cift sayi oldugundan Hamming siniri tanimli degil (Bkz. Teorem 6)

Kod Griesmer sinirini esitlikle sagliyor: 3 = 3 (Bkz. Teorem 7)

Kod Varshamov-Gilbert sinirini sagliyor: 1 < 2 (Bkz. Teorem 9)

Dual Kod Hamming sinirini sagliyor: 3 < 4

Dual Kod Griesmer sinirini esitlikle sagliyor: 3 = 3

Dual Kod Varshamov-Gilbert sinirini sagliyor: 3 < 4

2^{6-2} tasarımları için, 1. program n=6, k=4 parametreleriyle çalıştırılsın. Programın, bu parametrelerden oluşturulabilecek tasarımları, Tablo 2'deki gibi, 1. en iyi, 2. en iyi vb. olarak sıralaması beklenecektir. Çözüm değerleri ve bunlara karşılık gelen dual kodun ağırlık dağılımları, EAS ölçütüne göre sıralı olarak aşağıdaki gibidir (Danacıoğlu, 2005).

Rs =	4	3	3	3 (tasarımların çözümleri)			
ADs =	1	0	0	0	3	0	0 (Bkz. Eş.21)
	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	2	0	0	1
	1	0	0	2	1	0	0

Görüldüğü gibi, 1. dual ağırlık dağılımı için $d^{\perp}=4$; son 3 dual ağırlık dağılımı içinse $d^{\perp}=3$'tür. Son 3 ağırlık dağılımı, 2^{6-2}_{III} tasarımlarının EAS ölçütüne göre sıralanmış halidir. Bu tasarımların özellikleri tek tek 2. programın çalıştırılmasıyla elde edilebilir. Örneğin, 1. sırada yer alan 2^{6-2}_{IV} tasarımı için sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Uretec matrisi (Bkz. Eş.18)=

1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1

Denklik kontrol matrisi (Bkz. Eş.18)=

1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1

Denemeler/kod kelimeleri (Bkz. Bölüm 3.2)=

0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1						
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0						

Agirlik dagilimi ={1, 0, 3, 8, 3, 0, 1}(Bkz. Tanım 8)

Kod kelimeleri arasi en kisa uzaklik d=2 (Bkz. Eş.3)

Tanimlayici baginti yapisi =

0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1

Dual kodun agirlik dagilimi ={1, 0, 0, 0, 3, 0, 0} (Bkz. Eş. 21)

Dual kod kelimeleri arasi en kisa uzaklık d=R=4 (Bkz. Teorem 13)

d cift sayi oldugundan Hamming siniri tanimli degil (Bkz. Teorem 6)

Kod Griesmer sinirini sagliyor: 5 < 6 (Bkz. Teorem 7)

Kod Varshamov-Gilbert sinirini sagliyor: 1 < 4 (Bkz. Teorem 9)

dDual cift sayi oldugundan Hamming siniri tanimli degil

Dual Kod Griesmer sinirini esitlikle sagliyor: 6 = 6

Dual Kod Varshamov-Gilbert sinirini saglamiyor: 16 >= 16

4. SONUÇ

Bilindiği gibi, bir 2^{n-p} KÇE tasarımında; n etken sayısı; p, tanımlayıcı bağıntı sayısı; 2^p-p-1, tanımlayıcı bağıntılar arasındaki genelleştirilmiş etkileşim sayısı ve 2^p-1, tanımlayıcı bağıntı yapısındaki kelime sayısıdır. Çalışma süresince elde edilen bilgiler ışığında; bir (n,k) kodu, n-k=p olmak üzere, k temel etken yardımıyla oluşturulan n etkenli bir 2^{n-p} kesirli çok etkenli tasarım olarak düşünülebilir. Tasarımın çözümü, dual kodun en kısa uzaklığından ($d^{\perp}$) ve tanımlayıcı bağıntı yapısı da dual kodun kod kelimelerinden bulunabilir.

Başlangıçta amaç, sadece kodlar ve tasarımlar arasındaki ilişkiyi göstermek ve her tasarıma bir kod atamak ya da tam tersini yapmakken; EAS ölçütünün kodlarla nasıl uygulanacağının araştırılması sırasında karşılaşılan sorular; kod parametreleri aynıyken farklı tasarımlara ulaşılması; farklılığı yaratanın dual kod olması vb. sonuçlar; ilgilenilen konu kodlar ve tasarımlar olunca, hali hazırda yararlanılacak bir programın olmaması güçlüğü; istenileni verebilecek bir programın yazımını zorunlu kılmıştır.

4. Bölümde, programlarla ilgili verilen örnekler; verilebilen en kısa çıktı örnekleridir ve bu durum, bu kadar verinin nasıl özetleneceği gibi bir sorunu da beraberinde getirmektedir. Bu bağlamda, Tablo 3'te listelenen tasarımlar ve kod karşılıkları, bazı yönlerden eksiktir. Örneğin, 2_{III}^{9-5} için, dual ağırlık dağılımları farklı 5 tasarım bulunmuş ve hepsi Tabloya dahil edilmişken; diğer tasarımlar için sıralanacak farklı tasarım sayısı 3 ile sınırlandırılmıştır. 2_{V}^{10-3} tasarımı için, sadece Ç-V olan 2 tasarım gösterilmiş, Ç-IV olan 22 tasarım ve Ç-III olan 40 tasarım göz ardı edilmiştir.

Tablo 3'te tasarımlar; karşılık geldikleri kodlar, bu kodlara ait dual ağırlık dağılımları ve DKM'leri ile ifade edilmişlerdir. Doğrusal kod için B, döngüsel kod için C ve Hamming kodları için H gösterimi kullanılmıştır. Kodların sağladıkları sınırlara da bakılmış; ancak, Varshamov-Gilbert ve Griesmer sınırlarını hepsi; Hamming sınırını ise en kısa uzaklığı tek olanlar sağladığı için, tabloda bu bilgilere yer verilmemiştir.

Tasarımlar kodlarla ifade edilirken, özellikle tanımlayıcı bağıntı yapısının anlaşılması ve yorumlanmasının kodlarla daha kolay olduğu görülmüştür. Bu şekilde, bir tasarımı sadece bir matrisle tanımlayabilmek mümkündür.

Kod parametreleri ile EAS ölçütüne göre yapılan sıralamalar, literatürde yer alan, Örneğin; 2_{III}^{6-2} ve 2_{III}^{7-3} için Wu ve Chen (1992)'in yaptığı, tasarımlarla tutarlıdır.

Tablo 3'te yer almamasına karşın, EAS ölçütüne göre sıralanmış diğer tasarımlara da ulaşmak mümkündür. Örneğin, 2^{9-3}_{IV} için 3 tasarım verilmiş; ancak, Ç-IV uzunluğunda 9 tasarım bulunmuş ve dual ağırlık dağılımları aşağıdaki gibi sıralanmıştır.

1. $(1,0,0,0,1,4,2,0,0,0)^{\perp}$
2. $(1,0,0,0,2,3,1,1,0,0)^{\perp}$
3. $(1,0,0,0,2,4,0,0,1,0)^{\perp}$
4. $(1,0,0,0,3,0,4,0,0,0)^{\perp}$
5. $(1,0,0,0,3,2,0,2,0,0)^{\perp}$
6. $(1,0,0,0,3,4,0,0,0,0)^{\perp}$
7. $(1,0,0,0,4,0,2,0,1,0)^{\perp}$
8. $(1,0,0,0,5,0,2,0,0,0)^{\perp}$
9. $(1,0,0,0,7,0,0,0,0,0)^{\perp}$

Tasarımlar hali hazırda sıralanmış olduğundan; kodlar hakkında bilgi sahibi olmak gerekmeksizin; uygun tasarımın seçimi, dual ağırlık dağılımlarına bakılarak da yapılabilir. Örneğin, 2^{8-4}_{III} tasarımı söz konusu olduğunda (Bkz. Tablo 3), 2. tasarımda, 2'li etkileşimlerle karışacak ana etki sayısının, 1. tasarıma göre daha çok olduğu görülmektedir (Danacıoğlu, 2005).

Tablo 3. Tasarımlar ve kod karşılıkları

Deneme	Tasarım	Kod karşılığı (n,k, $d^{\perp}_{min}$)	Ağırlık dağ.$^{\perp}$ i=$Ç_{max}$,...,n	DKM/Tanımlayıcı bağıntılar
4	2^{3-1}_{III}	C(3,2,3)	{1}	1 1 1
8	2^{4-1}_{IV}	C(4,3,4)	{1}	1 1 1 1
	2^{4-1}_{III}	B(4,3,3)	{1,0}	0 1 1 1
	2^{5-2}_{III}	B(5,3,3)	{2,1,0}	1 1 0 1 0 1 0 1 0 1
	2^{6-3}_{III}	B(6,3,3)	{4,3,0,0}	1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1
	2^{7-4}_{III}	B(7,3,3)	{7,7,0,0,1}	1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1
16	2^{5-1}_{V}	C(5,4,5)	{1}	1 1 1 1 1
	2^{6-2}_{IV}	B(6,4,4)	{3,0,0}	1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1
	1. 2^{6-2}_{III}	B(6,4,3)	{1,1,1,0}	1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1
	2. 2^{6-2}_{III}	B(6,4,3)	{2,0,0,1}	1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1
	3. 2^{6-2}_{III}	B(6,4,3)	{2,1,0,0}	1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1
	2^{7-3}_{IV}	H(7,4,4)	{7,0,0,0}	1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1
	1. 2^{7-3}_{III}	B(7,4,3)	{2,3,2,0,0}	1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1

Tablo 3. Tasarımlar ve kod karşılıkları (Devam)

Deneme	Tasarım	Kod karşılığı (n,k, $d^{\perp}_{min}$)	Ağırlık dağ.$^{\perp}$ $i=Ç_{max},\dots,n$	DKM/Tanımlayıcı bağıntılar
16	2. 2^{7-3}_{III}	B(7,4,3)	{3,2,1,1,0}	1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1
	3. 2^{7-3}_{III}	B(7,4,3)	{3,3,0,0,1}	1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1
	2^{8-4}_{IV}	B(8,4,4} (self dual)	{14,0,0,0,1}	0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1
	1. 2^{8-4}_{III}	B(8,4,3}	{3,7,4,0,1,0}	0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
	2. 2^{8-4}_{III}	B(8,4,3}	{4,5,4,2,0,0}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1
	3. 2^{8-4}_{III}	B(8,4,3}	{4,6,4,0,0,1}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1
	1. 2^{9-5}_{III}	B(9,4,3)	{4,14,8,0,4,1,0}	1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1
	2. 2^{9-5}_{III}	B(9,4,3)	{6,9,9,6,0,0,1}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1
	3. 2^{9-5}_{III}	B(9,4,3)	{6,10,8,4,2,1,0}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1
	4. 2^{9-5}_{III}	B(9,4,3)	{7,9,6,6,3,0,0}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1
	5. 2^{9-5}_{III}	B(9,4,3)	{8,10,4,4,4,1,0}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1
	1. 2^{10-6}_{III}	B(10,4,3)	{8,18,16,8,8,5,0,0}	1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1

Tablo 3. Tasarımlar ve kod karşılıkları (Devam)

Deneme	Tasarım	Kod karşılığı $(n,k,d^{\perp}_{min})$	Ağırlık dağ.$^{\perp}$ $i=Ç_{max},\ldots,n$	DKM/Tanımlayıcı bağıntılar
16	2. 2^{10-6}_{III}	B(10,4,3)	{9,16,15,12,7,3,1,0}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1
	3. 2^{10-6}_{III}	B(10,4,3)	{10,15,12,15,10,0,0,1}	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1
	2^{11-7}_{III}	B(11,4,3)	{12, 26, 28, 24, 20, 13, 4, 0, 0}	1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1
32	2^{6-1}_{VI}	C(6,5,6)	{1}	1 1 1 1 1 1
	1. 2^{7-2}_{IV}	B(7,5,4)	{1,2,0,0}	1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1
	2. 2^{7-2}_{IV}	B(7,5,4)	{2,0,1,0}	0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1
	3. 2^{7-2}_{IV}	B(7,5,4)	{3,0,0,0}	0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1
	1. 2^{8-3}_{IV}	B(8,5,4)	{3,4,0,0,0}	1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1
	2. 2^{8-3}_{IV}	B(8,5,4)	{5,0,2,0,0}	0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1
	3. 2^{8-3}_{IV}	B(8,5,4)	{6,0,0,0,1}	0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1
	1. 2^{9-4}_{IV}	B(9,5,4)	{6, 8, 0, 0, 1, 0}	0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1
	2. 2^{9-4}_{IV}	B(9,5,4)	{7, 7, 0, 0, 0, 1}	0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1
	3. 2^{9-4}_{IV}	B(9,5,4)	{9, 0, 6, 0, 0, 0}	0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1
	1. 2^{10-5}_{IV}	B(10,5,4)	{10,16,0,0,5,0,0}	1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1

Tablo 3. Tasarımlar ve kod karşılıkları (Devam)

Deneme	Tasarım	Kod karşılığı (n,k, $d^{\perp}_{min}$)	Ağırlık dağ.$^{\perp}$ i=$Ç_{max}$,...,n	DKM/Tanımlayıcı bağıntılar
32	2. 2_{IV}^{10-5}	B(10,5,4)	{15,0,15,0,0,0,1}	0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1
	3. 2_{IV}^{10-5}	B(10,5,4)	{16,0,12,0,3,0,0}	0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1
	2_{IV}^{11-6}	B(11,5,4)	{25,0,27,0,10,0,1,0}	1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
64	2_{VII}^{7-1}	C(7,6,7)	{1}	1 1 1 1 1 1 1
	2_{V}^{8-2}	B(8,6,5)	{2, 1, 0, 0}	1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1
	1. 2_{IV}^{9-3}	B(9,6,4)	{1, 4, 2, 0, 0, 0}	1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1
	2. 2_{IV}^{9-3}	B(9,6,4)	{2, 3, 1, 1, 0, 0}	0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1
	3. 2_{IV}^{9-3}	B(9,6,4)	{2,4,0,0,0,1,0)	0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1
	1. 2_{IV}^{10-4}	B(10,6,4)	{2,8,4,0,1,0,0}	0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1
	2. 2_{IV}^{10-4}	B(10,6,4)	{3,6,4,2,0,0,0}	0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1
	3. 2_{IV}^{10-4}	B(10,6,4)	{3,7,4,0,0,1,0}	0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1
	2_{IV}^{11-5}	B(11,6,4)	{4, 14, 8, 0, 3, 2, 0, 0}	0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1
128	2_{VIII}^{8-1}	C(8,7,8)	{1}	1 1 1 1 1 1 1 1
	2_{VI}^{9-2}	B(9,7,6)	{3, 0, 0, 0}	1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1
	1. 2_{V}^{9-2}	B(9,7,5)	{1,1,1,0,0}	0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1
	2. 2_{V}^{9-2}	B(9,7,5)	{2,0,0,1,0}	0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1

Tablo 3. Tasarımlar ve kod karşılıkları (Devam)

Deneme	Tasarım	Kod karşılığı (n,k, $d^{\perp}_{min}$)	Ağırlık dağ.$^{\perp}$ i=$Ç_{max}$,...,n	DKM/Tanımlayıcı bağıntılar
	3. 2_{V}^{9-2}	B(9,7,5)	{2,1,0,0,0}	0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1
128	1. 2_{V}^{10-3}	B(10,7,5)	{3,3,1,0,0,0}	1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1
	2. 2_{V}^{10-3}	B(10,7,5)	{4,2,0,1,0,0}	0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1
	2_{V}^{11-4}	B(11,7,5)	{6, 6, 2, 1, 0, 0, 0}	1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1

5. KAYNAKLAR

Arazi, B., 1988. A Commensense Approach to the Theory of Error Correcting Codes. Computer System Series, MIT Pres.

Bilous, R. T., Rees, G. H. J.,2003. An Enumeration of Binary Self-Dual Codes of Length 32. http://www.cs.umanitoba.ca/~vanrees/bil.pdf.

Box, G. E. P., Hunter, J. S, 1961. The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs Part I. Technometrics, 3(3): 311-351.

Box, G. E. P., Hunter, W. G., Hunter, J. J., 1978. Statistics for Experiments. John Wiley & Sons, New York, NY.

Brouwer, A. E., Cohen A. M., Neguyen M. V. M, 2003. Fractional Factorial Desingns of Strength 3 and Small Run Size. http://win.tue.nl/amc/pub /cbn.pdf.

Chen, H., 1998. Some Projective Properties of Fractional Factorial Designs. Statistics & Probabilitiy Letters, 40,185-188.

Clark, J. B., Dean, A. M., 2001. Equivalence of Fractional Factorial Designs. Statistica Sinica, 11, 537-547.

Danacıoğlu, N., 2005. Kesirli Çok Etkenli Deneylerde Çözüm ve En Az Sapma Kavramı, HÜ, İstatistik Bölümü, Doktora tezi, Ankara (yayımlanmamış).

Dey, A., 1985. Orthogonal Fractional Factorial Designs. New Delhi, Wiley Eastern.

Franklin, M. F., 1984. Constructions Tables of Minimum Aberration Designs, Technometrics, 236(3): 225-232.

Fries, A., Hunter, W. G., 1980. Minimum Aberration 2^{k-p} designs. Technometrics, 22(4): 601-608.

Gulliver, T. A., Bhargava V. K. ,2000. New Linear Codes Over GF(8). Applied Mathematics Letters, 13, 17-19.

Halmos, P. R., 1999. Finite-Dimensional Vector Spaces. 7th. Ed., Springer-Verlag.

Hamming, R. W., 1950. Error Detecting and Error Correcting Codes. The Bell System Technical Journal, XXVI, 2, 147-160.

Hedeyat, A. S., Sloane, N. J. A., Stufken J., 1999. Orthogonal Arrays: Theory and Applications. Springer-Verlag, NY.

Huffman, W. C., Pless, V., 2003. Fundemantals of Error Correcting Codes. Cambridge University Pres.

Kuş, P., 2002. Hata Düzeltme Kodlaması. Kara Harp Okulu Bilim Dergisi, Kara Harp Okulu Basımevi, 2, 18-34,

Lin, C. D., Sitter, R. R., 2008. An Isomorphism Check for Two-Level Fractional Factorail Designs. Journal of Statistical Planning and Inference, 138, 1085-1101.

MacWilliams, F. J., Sloane N. J. A., 1977. The Theory of Error-Correcting Codes. North-Holland Mathematical Library, Elsevier Science Publishers.

Mathews, K. R., 1991. Linear Algebra. University of Queensland.

Nguyen, G. D., 1997. A Polynomial Construction of Perfect Codes. Computers Math. Applic., 33(8): 127-131.

Pless, V., 1998. Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes. John Wiley & Sons, Inc., Third Edition.

Pretzel, O., 1992. Error-Correcting Codes and Finite Fields. Clarendon Pres. Oxford, Student Edition.

Purser, M., 1995. Introduction to Error-Correcting Codes. Artech House Inc.

Rao, C. R., 1946. On Hypercubes of Strength D and A System of Confounding in Factorial Experiments. Bull. Cal. Math. Soc., 38, 67-78.

Sloane, N. J. A., Thompson, J. G., 1983. Cyclic Self-dual Codes. IEEE Trans. Information Theory, 29, 364-366.

Sun, D. X., Chen, J., Wu, C. F. J., 1993. A Catalogue of Two-Level and Three-Level Fractional Factorial Designs With Small Runs. Internal. Statist. Rev., 61,131-145.

Tang, B., Deng, L. Y., 1999. Minimum G_2-Aberration for Nonregular Fractional Factorial Designs. Ann. Statist., 27, 1914-1926.

Vanstone, S. A., Oorschot van P. C., 1989. An Introduction to Error-Correcting Codes with Applications. Kluwer Academic Publishers.

Wiggert, D., 1978. Error-Control Coding and Applications. Artech House.

Wu, C. F. J., Chen, Y. Y., 1992. A Graph-Aided Method for Planning Two-Level Experiments when Certain Interactions are Important. Technometrics, 34, 162-175.

Xu, H., 2009. Algorithmic Construction of Efficient Fractional Factorial Designs with Large Run Sizes. Technometrics, 52(3): 262-277.

FRACTIONAL FACTORIAL DESIGNS AND CODES

ABSTRACT

Fractional factorial experiments with minimum aberration are commonly used in practice. In this study the characteristics of two-level fractional factorial experiments, namely word length pattern, resolution, aberration etc. are introduced. By exploring the algebraic structure of two-level fractional factorial designs, the connection between coding theory, especially Hamming codes, and fractional factorial designs is investigated. Two-level fractional factorial designs are constructed from codes (Hamming, binary linear and binary cyclic codes), and are ordered by the minimum aberration criterion. Designs and their corresponding codes are listed in a catalog.

Keywords: Minimum aberration, Hamming codes, Fractional factorial designs, Coding theory.