Düzce University
Journal of Science & Technology

Research Article

Mean inequalities with the help of the weighted Jensen inequality

Mehmet Zeki SARIKAYA [a,*], Gizem KOZAN [b]

[a] *Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Düzce University, Düzce, TURKEY*
[b] *Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Düzce University, Düzce TURKEY*
* *Corresponding author's e-mail address: sarikayamz@gmail.com*
DOI: 10.29130/dubited.1153656

ABSTRACT

In this article, our aim is to first obtain a new integral inequality with the weighted Jensen inequality, and by applying this inequality, new mean inequalities will be obtained.

Keywords: *Convex functions, Jensen's inequality, mean inequalities.*

Ağırlıklı Jensen eşitsizliği yardımıyla ortalama eşitsizlikler

ÖZET

Bu makalede amacımız, ağırlıklı Jensen eşitsizliği ile ilk olarak yeni bir integral eşitsizliği elde etmek ve bu eşitsizliğin uygulanması ile yeni ortalama eşitsizlikler elde edilecektir.
Anahtar Kelimeler: *Konveks fonksiyonlar, Jensen eşitsizliği, ortalama eşitsizlikler.*

I. GİRİŞ

Jensen eşitsizliklerinin [3], [6] optimizasyonda (bakınız, ör., [4]), olasılık teorisinde (bakınız, ör., [5]) ve matematiğin birçok alanında önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Ayrıca, Jensen eşitsizliği, yıllar içinde, ölçülebilir uzaylar ve özellikle olasılık uzayları gibi çeşitli bağlamlarda artan sayıda yeni versiyonlara sahiptir [2]. Jensen eşitsizliği; $f : (a,b) \to R$ konveks bir fonksiyon ve $n \in N,$ $r_1 + r_2 + ... + r_n = 1$ olacak şekilde $r_1, r_2, ..., r_n \in (0,1)$ olsun. O halde $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ için

$$f(r_1 x_1 + r_2 x_2 + ... + r_n x_n) \leq r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) + ... + r_n f(x_n)$$

olarak bilinmektedir. Bu eşitsizliğin ağırlıklı versiyonu ise $f : I \to R$ konveks bir fonksiyon, $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ ve $m_1 + m_2 + ... + m_n > 0$ olacak şekilde $m_1, m_2, ..., m_n \geq 0$ reel saylar olsun. O halde

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + ... + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Jensen eşitsizlikleri literatürde önemli bir yere sahip olduğu bilinmektedir. Öyle ki bu eşitsizlikler yardımıyla Aritmetik-Geometrik Ortalama(AO-GO), Cauchy-Schwarz, Young, Hölder ve Minkowski gibi literatürde çokça kullanılan bu eşitsizliklerin bazılarını kolayca elde edilebilindiğini aşağıdaki fonksiyon seçimleri ile kolayca görülmektedir.

a) $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon olduğunda $r_1 = r_2 = ... = r_n = \frac{1}{n}$ ve $x_i \in (0, \infty),\ i = 1, 2, ..., n$ seçilmesi ile Jensen eşitsizliğini uygularsak

$$-\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq -\left(\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n}\right)$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sqrt[n]{x_{1.} x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

yani

$$GO \leq AO$$

bulunur.

b) $f(x) = x^2$ fonksiyonu R konveks fonksiyon olduğunda ağırlıklı Jensen eşitsizliğini uygularsak

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}\right)^2 \leq \frac{m_1 x_1^2 + m_1 x_2^2 + ... + m_n x_n^2}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

olup burada $m_i = b_i^2$ ve $x_i = \frac{a_i}{b_i},$ $i = 1, 2, ..., n$ seçilmesi ile

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

şeklinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği bulunur.

c) $f(x) = e^x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konveks fonksiyon olduğunda $r_1 + r_2 = 1$ olacak şekilde $r_1 = \frac{1}{p},\ r_2 = \frac{1}{q}$ ve $x_1 = p \ln a,$ $x_2 = q \ln b$ seçilmesi ile

$$e^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}} \leq \frac{e^x}{p}+\frac{e^y}{q}$$
eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa
$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$
şeklinde Young eşitsizliği bulunur.

İntegraller için ağırlıklı Jensen eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilir [5].

Teorem 1. (Ağırlıklı Jensen Eşitsizliği) $F : [a,b] \to R$ *konveks ve* $g : (a,b) \to R$ *sürekli ve* $\int_a^b f(x)dx < \infty$
$$F\left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\right) \leq \frac{1}{\int_a^b f(x)dx}\int_a^b f(x)F(g(x))dx$$
dır.

$a,b > 0$ olmak üzere bazı önemli ortalama eşitsizliklerini aşağıdaki şekilde hatırlatalım [1]:

1) Aritmetik Ortalama
$$AO = A(a,b) = \frac{a+b}{2},$$

2) Geometrik Ortalama
$$GO = G(a,b) = \sqrt{ab},$$

3) Harmonik Ortalama
$$HO = H(a,b) = \frac{2ab}{a+b},$$

4) Logaritmik Ortalama
$$LO = L(a,b) = \begin{cases} a & , \ a = b \text{ için} \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a} & , \ a \neq b \text{ için} \end{cases},$$

5) Özdeş Ortalama
$$IO = I(a,b) = \begin{cases} a & , \ a = b \text{ için} \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \ a \neq b \text{ için} \end{cases},$$

6) p -Logaritmik Ortalama
$$L_pO = L_p(a,b) = \begin{cases} a & , \ a = b \text{ için} \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \ a \neq b \text{ için} \end{cases}.$$
Dolayısıyla bu ortalamalar arasında
$$HO \leq GO \leq LO \leq IO \leq AO$$
şeklinde bir ilişki vardır.

Bu çalışmada amacımız yukardaki özel eşitsizliklerin elde edilmesi düşüncesi ile ağırlıklı Jensen eşitsizliğinin uygulamasıyla yeni bir eşitsizlik tanımlamaktır. Böylece elde edilen bu eşitsizliğin uygulamaları yardımıyla da bazı ortalama eşitsizlikler elde edilecektir.

II. ANA SONUÇLAR

Teorem 2. *Negatif olmayan* $f, g \in L^{\alpha}([a,b])$, $0<a<b,\quad \alpha \geq 1$ *için*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{(\alpha-2)}\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)dx\right)\left(\int_a^b g^{\alpha}(x)dx\right) \tag{1}$$

dır.

İspat. $F(t)=t^{\alpha-1}, \alpha \geq 1$ konveks fonksiyonu için ağırlıklı Jensen eşitsizliğini uygulanırsa, bu durumda

$$\left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\int_a^b f(x)dx}\int_a^b f(x)g^{\alpha-1}(x)dx,$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^{\alpha-1} \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^{\alpha-2}\int_a^b f(x)g^{\alpha-1}(x)dx$$

yazılır. Buradan da $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $p=\alpha,\ q=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ seçilmesi ile Hölder eşitsizliğini sağ taraftaki integrallere uygulanırsa,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^{\alpha-1}$$

$$\leq \left[\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_a^b dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]^{(\alpha-2)}\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_a^b g^{\alpha}(x)dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$=(b-a)^{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\alpha}}\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left(\int_a^b g^{\alpha}(x)dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

olur. Böylece

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{(\alpha-2)}\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)dx\right)\left(\int_a^b g^{\alpha}(x)dx\right)$$

istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Sonuç 3. $\alpha \geq 1$ *ve* $0<a<b$ *olmak üzere*

$$L_{\alpha}(a,b) \leq L_{\alpha(\alpha-1)}(a,b) \tag{2}$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $L_{\alpha}(a,b)=\left(\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *dır.*

İspat. (1) eşitsizliğinde $f(x)=x$ ve $g(x)=x^{\alpha-1},\ \alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\int_a^b x^{\alpha}dx\right)^{\alpha-1} \leq (b-a)^{\alpha-2}\left(\int_a^b x^{\alpha(\alpha-1)}dx\right)$$

$$\left(\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1} \leq (b-a)^{\alpha-2}\,\frac{b^{\alpha(\alpha-1)+1}-a^{\alpha(\alpha-1)+1}}{\alpha(\alpha-1)+1}$$

$$\left(\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{b^{\alpha(\alpha-1)+1}-a^{\alpha(\alpha-1)+1}}{(\alpha(\alpha-1)+1)(b-a)}$$

$$\left(\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{b^{\alpha(\alpha-1)+1}-a^{\alpha(\alpha-1)+1}}{(\alpha(\alpha-1)+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}}$$

$$L_\alpha(a,b) \leq L_{\alpha(\alpha-1)}(a,b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 4. *Özel olarak (2) eşitsizliğinde* $\alpha = 2$ *için* $L_2(a,b) = L_2(a,b)$ *olur. Diğer yandan, (2) de* $\alpha = 3$ *alınırsa* $L_3(a,b) < L_6(a,b)$ *bulunur.*

Sonuç 5. $\alpha \geq 1$ *ve* $0 < a < b$ *olmak üzere*

$$L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}^{\alpha+1}(a,b) \leq L_\alpha^\alpha(a,b)A(a,b) \tag{3}$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $A(a,b) = \left(\frac{b+a}{2}\right)$ *dır.*

İspat. (1) eşitsizliğinde $f(x) = x$ ve $g(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\int_a^b x^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}dx\right)^\alpha \leq (b-a)^{\alpha-2}\left(\int_a^b x^\alpha dx\right)\left(\int_a^b xdx\right)$$

$$\left(\frac{b^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}-a^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{2\alpha+1}{\alpha}(b-a)}\right)^\alpha \leq \left(\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}\right)$$

$$\left(\frac{b^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}-a^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{2\alpha+1}{\alpha}(b-a)}\right)^{\alpha\frac{(\alpha+1)}{(\alpha+1)}} \leq \left(\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right)^{\alpha\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}^{\alpha+1}(a,b) \leq L_\alpha^\alpha(a,b)A(a,b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 6. *Özel olarak (3) eşitsizliğinde* $\alpha = 2$ *için* $L_{\frac{3}{2}}^3(a,b) \leq L_2^2(a,b)A(a,b)$ *yazılır.*

Sonuç 7. $\alpha \geq 1$ *ve* $0 < a < b$ *olmak üzere*

$$L_{-\alpha}^\alpha(a,b)L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a, \ln b) \leq L^\alpha(a,b)\ln I(a,b) \tag{4}$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır.

İspat. (1) eşitsizliğinde $f(x)=\frac{1}{x}$ ve $g(x)=\ln^{\frac{1}{\alpha}} x,\ \alpha\geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\int_a^b \ln^{\frac{1}{\alpha}} x \frac{dx}{x}\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2}\int_a^b x^{-\alpha}dx\int_a^b \ln x dx$$

$$(\ln b-\ln a)^{\alpha}\left(\frac{(\ln b)^{\frac{1}{\alpha}+1}-(\ln a)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)(\ln b-\ln a)}\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2}\left(\frac{b^{-\alpha+1}-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\left[b(\ln b-1)-a(\ln a-1)\right]$$

$$\left(\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\right)^{\alpha} L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a,\ln b)\leq \left(\frac{b^{-\alpha+1}-a^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{-\alpha}(-\alpha)}\left(\frac{b\ln b-b-a\ln a+a}{b-a}\right)$$

$$L_0^{\alpha}(\ln a,\ln b)L_{-\alpha}^{\alpha}(a,b)L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a,\ln b)\leq \frac{\ln b^b-\ln a^a-b+a}{b-a}$$

$$L_{-\alpha}^{\alpha}(a,b)L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a,\ln b)\leq L^{\alpha}(a,b)\ln I(a,b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 8. *Özel olarak (4) eşitsizliğinde* $\alpha=2$ *için*

$$L_{-2}^{2}(a,b)L_{\frac{1}{2}}(\ln a,\ln b)\leq L^{2}(a,b)\ln I(a,b)$$

yazılır.

Sonuç 9. $\alpha\geq 1$ *ve* $0<a<b$ *olmak üzere*

$$L_{-\alpha}(a,b)\leq G(a,b) \tag{5}$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $G(a,b)=\sqrt{a.b}$ *dir.*

İspat. *(1) eşitsizliğinde* $f(x)=\frac{1}{x}$ *ve* $g(x)=\frac{1}{x},\ \alpha\geq 1$ *olacak şekilde seçilirse*

$$\left(\int_a^b \frac{1}{x^2}dx\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2}\left(\int_a^b x^{-\alpha}dx\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2}\left(\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2$$

$$\left(\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(b-a)}\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \leq \sqrt[2]{a.b}$$

$$L_{-\alpha}(a,b) \leq G(a,b)$$

istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 10. *Özel olarak (5) eşitsizliğinde* $\alpha = 2$ *için* $L_{-2}(a,b) = G(a,b)$ *olur. Diğer yandan, (5) de* $\alpha = 3$ *alınırsa* $L_{-3}(a,b) \leq G(a,b)$ *bulunur.*

Sonuç 11. $\alpha \geq 1$ *ve* $0 < a < b$ *olmak üzere*

$$L(a,b) \leq A(a,b)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $L(a,b) = \frac{b-a}{Inb-Ina}$ *ve* $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ *dir.*

İspat. *(1) eşitsizliğinde* $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ *ve* $g(x) = x^{\frac{-1}{\alpha}}$, $\alpha \geq 1$ *olacak şekilde seçilirse*

$$\left(\int_a^b dx\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2}\int_a^b xdx\int_a^b \frac{1}{x}dx$$

$$(b-a)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha}(b-a)^{-2}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)(\ln b - \ln a)$$

$$1 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{\ln b - \ln a}{b-a}\right)$$

$$\frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$L(a,b) \leq A(a,b)$$

elde edilir ve *istenilen sonuç elde edilmiş olur.*

Sonuç 12. $\alpha \geq 1$ *ve* $0 < a < b$ *olmak üzere*

$$L_{\frac{2}{\alpha}}(a,b) \leq A(a,b) \qquad (6)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır.

İspat. *(1) eşitsizliğinde* $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}} veg(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \geq 2$ *olacak şekilde seçilirse*

$$\left(\int_a^b x^{\frac{2}{\alpha}}dx\right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2}\left(\int_a^b x dx\right)^2$$

$$\left(\frac{b^{\frac{2}{\alpha}+1}-a^{\frac{2}{\alpha}+1}}{\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)(b-a)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$L_{\frac{2}{\alpha}}(a,b) \leq A(a,b)$$

elde edilir ve *istenilen sonuç elde edilmiş olur.*

Hatırlatma 13. *Özel olarak (6) eşitsizliğinde* ☺■2 *için* $L_1(a,b) \leq A(a,b)$ *yazılır.*

Teorem 14. $f\ :\ [a,b] \subset (0,\infty) \to R$ *negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere* $\alpha \geq 1$ *için*

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\alpha}(x)dx\right)^2 \qquad (7)$$

dır.

İspat. Teorem 2 de özel olarak $f = g$ seçilirse istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 15. $\alpha \geq 1$ *ve* $0 < a < b$ *olmak üzere*

$$L_{-\alpha}(a,b) \leq G(a,b) \qquad (8)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır.

İspat. (7) eşitsizliğinde $f(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{b-a}\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{ab}} \leq \left(\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{(b-a)(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{L_{-\alpha}(a,b)}$$

$$L_{-\alpha}(a,b) \leq G(a,b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 16. $\alpha \geq 1$ *ve* $0 < a < b$ *olmak üzere*

$$T_2(a,b) \leq T_{\alpha}(a,b)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $T_{\alpha}(a,b) = \left(\frac{s^{\alpha}-r^{\alpha}}{\alpha(\ln s - \ln r)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *dır.*

İspat. (7) eşitsizliğinde $f(x) = e^x$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\frac{1}{b-a}\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2}\right)^{\alpha} \le \left(\frac{1}{b-a}\frac{e^{b\alpha}-e^{a\alpha}}{\alpha}\right)^{2}$$

$$\left(\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha(b-a)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Buradan da $e^{b} = s \to b = \ln s$ ve $e^{a} = r \to a = \ln r$ olarak alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

III. REFERANSLAR

[1] Dragomir SS.,Pearce CEM. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000.

[2] P. Auscher, T. Coulhon, A. Grigoryan, Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces: Lecture Notes from a Quarter Program on Heat Kernels, Random Walks, and Analysis on Manifolds and Graphs: April 16--July 13, 2002, Emile Borel Centre of the Henri Poincaré Institute, Paris, France, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society (2003).

[3] J.L.W.V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math., vol. 30, no 1, 1905, pp. 175-193.

[4] Y. Nesterov, Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course, Applied Optimization Springer US (2013).

[5] J.E. Pecaric, Y.L. Tong, Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Mathematics in Science and Engineering Elsevier Science (1992).

[6] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA (1987).