

Gri Sistem Teorisi ve Enerji Tüketim Modellemesinde Bir Uygulama

Grey System Theory and an Application in Energy Consumption Modelling

Sevcan DEMİR ATALAY¹ , Esra MAVİGÖZ² 

¹Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, İzmir, Türkiye

²Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, İzmir, Türkiye

Öz

Bu çalışmada GVMCT ile ifade edilen ve gri Verhulst modeline sabit terimin eklenmesi ile oluşturulan model üzerine çalışılmıştır. Bu modele ilişkin diferansiyel denklem çözülerek gri tahmin denklemi elde edilmiştir. Elde edilen tahmin denkleminin performansının değerlendirilmesi amacıyla enerji alanında bir uygulama çalışması yapılmıştır. Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (TERS) ve Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji (TECS) değişkenlerine ilişkin veri setleri incelenmiştir. Veri setinin uygun olması nedeniyle ilgili değişkenler için hem zaman serileri analizi kullanılarak hem de gri modelleme (GM (1,1) modeli, Gri Verhulst Modeli ve GVMCT modeli) kullanılarak çeşitli tahmin denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen tahmin denklemlerinin performansı MSE, MAE ve RMSE performans ölçülerine göre kıyaslanmıştır. $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında, TERS değişkeni için RMSE, MAE, MSE değerleri sırasıyla 711201.26, 721.37, 843.33, TECS değişkeni için RMSE, MAE, MSE değerleri sırasıyla 266685.55, 437.69, 516.42 elde edilmiştir. İki değişken içinde diğer modellerin performans kriterleri değerlerine göre daha küçük olması dolayısıyla önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Elde edilen tahmin denklemleri kullanılarak iki dönem için öngörü yapılmış ve gerçek değerler ile kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: GVMCT, GM (1,1), Gri Verhulst Modeli, Tahmin, Performans Ölçüleri

Abstract

In this study, the model created by adding the constant term to the grey Verhulst model called GVMCT has been studied. The grey estimation equation has been obtained by solving the differential equation of this model. In order to evaluate the performance of the obtained estimation equation, an application study has been carried out in the field of energy. Data sets related to Total Energy Consumed by the Residential Sector (TERS) and Total Energy Consumed by the Commercial Sector (TECS) variables have been examined. Due to the convenience of the data set, various estimation equations have been created for the related variables using both time series analysis and grey modeling (GM (1,1) model, Grey Verhulst Model and GVMCT model). The performance of the estimation equations obtained has been compared according to MSE, MAE and RMSE performance measures. Under the initial condition $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$, the RMSE, MAE, MSE values for the TERS variable have been obtained as 711201.26, 721.37, 843.33, respectively, and the RMSE, MAE, MSE values for the TECS variable have been obtained 266685.55, 437.69, 516.42, respectively. It is seen that the performance of the proposed GVMCT model is better because the performance criteria values of GVMCT model is smaller than the performance criteria values of the other models within the two variables. Forecasts have been made for two periods using the obtained estimation equations and compared with the actual values.

Keywords: GVMCT, GM (1,1), Grey Verhulst Model, Forecast, Performance Measures

I. GİRİŞ

Bilim, teknoloji ve insanlığın gelişmesi ile birlikte belirsizlik içeren sistemlere ilişkin çalışmalar yeni bir anlam kazanmıştır. 20. yüzyılın ikinci yarısında, sistem bilimi ve sistem mühendisliği alanlarında çeşitli teoriler ve belirsiz sistemlere ilişkin metodolojiler ortaya konulmuştur. Bu konuda L.A. Zadeh'in 1965 [1] yılındaki Bulanık Mantık Teorisi ve Julong Deng'in 1982 [2] yılındaki Gri Sistemler Teorisi önde gelen çalışmalardır. Bir bakımdan bu çalışmalar belirsiz bilgileri tanımlamak ve ele almak için kuram ve metodolojileri sağlar.

1982'de Julong Deng tarafından ortaya konulan Gri Sistem Teorisi, küçük örneklem ve zayıf bilgi içeren problemlerin incelenmesine odaklanan yeni bir yöntemdir. Bu teori az sayıda ve eksik verilerden yararlanarak bilgi sunmayı amaç edinmiştir. Bu özelliği ile de dikkatleri üzerine çekmektedir. Bu teorinin ortaya çıkışındaki temel düşünce stokastik veya bulanık yöntemlerle üstesinden gelinemeyen belirsiz sistemlerin davranışlarını, az sayıda veri ile tahmin etmektir. Küçük örneklem dayalı ve az bilgiye sahip belirsiz sistemler yaygın olduğundan gri sistem teorisi geniş uygulama alanlarına sahiptir. Gri sistem teorisi ortaya atıldığı günden bugüne endüstri, sosyal sistemler, ekolojik sistemler, ekonomi, trafik, yönetim, eğitim, çevre ve askeri gibi pek çok alanda başarı ile

Sorumlu Yazar: Sevcan DEMİR ATALAY, Tel: 02323115408, e-posta: sevcan.demir@ege.edu.tr

Gönderilme: 03.09.2022, **Düzenleme:** 21.03.2023, **Kabul:** 08.04.2023

uygulanmıştır [3]. Gri sistem teorisi alanında yapılan çalışmaları gri üretim, gri ilişki analizi, gri modelleme, gri tahmin, gri karar verme ve gri kontrol gibi başlıklar altında toplamak mümkündür [4].

Gri tahmin modelleri, az miktarda veri bulunması durumunda dahi belirsizlik içeren sistemlerin özelliklerini tanımlayabilme özelliği nedeniyle birçok tahmin ile ilgili uygulamalarda kullanılmıştır [5], [6], [7]. Ayrıca, az sayıda veri bulunması durumunda dahi uygulanabilirlikleri nedeniyle, gri tahmin modelleri diğer yöntemlere göre daha güvenilir, kullanıcı dostu ve pratik olduğu düşünülmektedir. İstatistiksel modellere benzer olarak gri tahmin modelleri de bir tahmin modeller topluluğudur. Bu modeller topluluğu içerisinde GM (1,1) modeli ön plana çıkmaktadır. GM (1,1) modeline ilişkin olarak model parametrelerinin optimize edilmesi ([8], [9]), hibrit GM (1,1) model önerileri ([10], [11], [12]), GM(1,1) model açılımları ([13], [14], [15]) ve farklı başlangıç koşullarının önerilmesi ([16], [17]) gibi farklı bakış açılarından birçok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmada temel olarak gri tahmin modeli ve uygulaması üzerine bir çalışma yapılması amaçlanmaktadır. Çalışmada gri modelin girdisine katkıda bulunmak amacıyla gri Verhulst modeline sabit terim eklenerek bir model oluşturulmuştur. Modele ilişkin diferansiyel denklem çözülerek bir tahmin denklemi elde edilmiştir. Elde edilen tahmin denkleminin performansının belirlenebilmesi amacıyla enerji alanında bir uygulama çalışması yapılmıştır. Çalışma kapsamında Amerika Birleşik Devletleri (ABD) Enerji Bilgi İdaresi tarafından hazırlanan Ocak 2020 Aylık Enerji Değerlendirmesi'nden elde edilen enerji tüketim veri seti kullanılmıştır. Bu veri setleri içerisinde iki tanesi bu çalışmada kullanılmıştır:

- TERS: Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Residential Sector),
- TECS: Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Commercial Sector).

Veriler 1949-2018 yılları arasındaki yıllık verilerden oluşmaktadır. Öncelikle bu değişkenler için zaman serileri analizi yapılarak uygun model denklemleri elde edilmiştir. Sonrasında değişkenler için uygun gri model (GM (1,1) modeli, Gri Verhulst Modeli ve önerilen GVMCT modeli) denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen tahmin denklemlerinin performansı, gerçek değerler ile denklemlerden elde edilen tahmin değerlerinin kıyaslanması ile ortaya konmaktadır. Bu amaçla ortalama hata kare (MSE, mean square error), ortalama mutlak hata (MAE, mean absolute error) ve karekök ortalama hata kare (RMSE, root mean square error) performans ölçüleri olarak belirlenmiş ve bu

ölçülere bağlı olarak modellere ilişkin kıyaslamalar yapılmıştır. İlgili yorumlar verilerek önerilen modelin performansı değerlendirilmiştir. 2019-2020 yılları için öngörü değerleri elde edilmiştir.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. GM(1,1) Modeli

Gri tahmin teorisi gri sistem teorisinin önemli bir yapıtaşıdır. GM (1,1) tahmin modeli, söz konusu tahmin teorisinin ana modelidir, yani kısıtlı miktarda veri (en az dört veya daha fazla) ile oluşturulan fakat bakıldığında yine de yüksek hassasiyetli önemi yadsınamayacak sonuçlar alabilen tek değişkenli birinci dereceden gri modeldir ([18], [19], [20], [21]). GM(1,1) üç temel adımdan oluşmaktadır: (1) Birikimli üretim işlemi (Accumulated Generation Operation (AGO)), (2) Gri modelleme, (3) Ters birikimli üretim işlemi (Inverse Accumulated Generation Operation (IAGO)). Bu modelin kurulumu aşağıda verilen adımlardan oluşmaktadır ([22], [23], [24]). Burada;

- $X^{(0)}$: orijinal veri dizisini
- $X^{(1)}$: kümülatif veri dizisini
- Z: ortalama serisini
- AGO: kümülatif işlem operatörünü
- IAGO: Ters kümülatif işlem operatörünü

göstermektedir.

Adım 1: $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, negatif olmayan, eşit zaman aralıklarında toplanmış ve en az dört veriden ($n \geq 4$) oluşan ham veri noktaları olsun. $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ dizisi ise k . elemanı $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile elde edilen birikimli üretim işlemi (accumulated generating operation) dizisini oluşturmaktadır.

Adım 2: Model parametreleri tahmin edilir. GM(1,1) modelinin gri fark denklemi (grey difference equation)

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (1)$$

şeklinde verilmektedir [5]. Burada $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile tanımlanmaktadır. k 'nın değerleri (1) denkleminde

yerine konulduğunda elde edilen denklemler matris formunda $Y = Br$ şeklinde ifade edilebilir, burada

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

$$r = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Yukarıda matris formu verilen denklemler çözülerek a ve b 'nin en küçük kareler tahminleri $\hat{r} = [\hat{a}, \hat{b}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ ile elde edilir.

Adım 3: Zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. $GM(1,1)$ 'in beyazlaştırılmış denklemi (whitening equation)

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (2)$$

şeklinde verilmektedir. $\hat{r} = [\hat{a}, \hat{b}]^T$ parametreleri (2) denklemde yerine konulup çözüldüğünde

$$\hat{x}^{(1)}(t) = Ce^{-\hat{a}t} + \hat{b}/\hat{a} \quad (3)$$

zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. Burada C bir sabittir. $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu olarak seçilip, (3) denklemde yerine konularak C değeri elde edilir. Dolayısıyla $\hat{x}^{(1)}(k) = [x^{(1)}(1) - \hat{b}/\hat{a}]e^{-(k-1)\hat{a}} + \hat{b}/\hat{a}$, $k = 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir.

Adım 4: Bu adımda ham verilere ait uyumu yapılmış değerler ve tahmin değerleri elde edilir. $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$ ifadesi kullanılarak

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right] (1 - e^{-\hat{a}}) e^{-\hat{a}(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$$

sonucuna ulaşılır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) değerleri, uyumu yapılmış değerler (fitted values), $\hat{x}^{(0)}(k)$, ($k \geq n+1$) değerleri, tahmin edilmiş değerler (predicted values) olarak adlandırılmaktadır.

2.2. Gri Verhulst Modeli

Verhulst Modeli aynı zamanda lojistik büyüme eğrisi olarak da karşımıza çıkmaktadır. Verhulst modeli genellikle belirli bir doygunluğa ulaşmış durumlarla süreçleri tahmin etmek ve tanımlamak için

kullanılmaktadır [25]. Verhulst Modeli'nin en yaygın olarak kullanıldığı alan insan popülasyonunun tahminlenmesine ilişkin çalışmalardır ve bu aynı zamanda modelin ortaya atılmasının temelini oluşturur. Genellikle karesel yapıdaki verilerle çalışılırken başarılı sonuçların elde edildiği Verhulst Modeli ilk olarak, Alman biyolog Pierre Francois Verhulst tarafından literatüre kazandırılmıştır [26].

Başlangıç fonksiyonuna ilişkin büyüme üstel olarak karşımıza çıkarken sonrasında doyumun başlamasına paralel olarak büyüme yavaşlar, belirli bir denge ve olgunluğa ulaşınca da durur. Verhulst Modelinin temel amacı, gerçek bir sisteme ilişkin tüm gelişmeyi bir sınıra ulaştırmaktır. Bu sayede model, belirli bir doygunluk bölgesi içeren S- eğrisi gibi bazı artan süreçlerin açıklanmasında etkin bir anlam taşır [27]. Bu modelin kurulumu aşağıda verilen adımlardan oluşmaktadır:

Adım 1: $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, negatif olmayan, eşit zaman aralıklarında toplanmış ve en az dört veriden ($n \geq 4$) oluşan ham veri noktaları olsun. $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ dizisi ise k . elemanı $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$ olan birikimli üretim işlemi (accumulated generating operation) dizisini oluşturmaktadır.

Adım 2: Model parametreleri tahmin edilir.

Verhulst modelinin ikinci-dereceden gri fark denklemi

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^2 \quad (4)$$

şeklinde verilmektedir. Burada $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile tanımlanmaktadır. k 'nin değerleri (4) denklemde yerine konulduğunda elde edilen denklemler matris formunda $Y = Br$ şeklinde ifade edilebilir, burada

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (z^{(1)}(2))^2 & -z^{(1)}(2) \\ (z^{(1)}(3))^2 & -z^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots \\ (z^{(1)}(n))^2 & -z^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix}.$$

Yukarıda matris formu verilen denklemler çözülerek a ve b 'nin en küçük kareler tahmin edicileri $\hat{r} = [\hat{a}, \hat{b}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ ile elde edilir.

Adım 3: Zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. Verhulst modelinin beyazlaştırılmış denklemi

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b(x^{(1)}(t))^2 \quad (5)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu diferansiyel denklem Bernoulli diferansiyel denklemi olarak tanımlanmaktadır. $\hat{r} = [\hat{b}, \hat{a}]^T$ tahminleri (5) denklemine yerine konulup $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında çözüldüğünde

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1) + (a - bx^{(1)}(1))e^{ak}} \quad (6)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$ zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir.

Adım 4: Ham verilere ait uyumu yapılmış ve tahmin değerleri elde edilir. $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k + 1) - \hat{x}^{(1)}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$ ile sonuca ulaşılır. $\hat{x}^{(0)}(k)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) değerleri uyumu yapılmış değerler (fitted values), $\hat{x}^{(0)}(k)$, ($k \geq n + 1$) değerleri tahmin edilmiş değerler (predicted values) olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$ başlangıç koşulu alınarak çözüm yapılırsa

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{ax^{(1)}(n)}{bx^{(1)}(n) + (a - bx^{(1)}(n))e^{a(k-n)}}$$

sonucu elde edilir.

2.3. Sabit Terimli Gri Verhulst Modeli (GVMCT)

Klasik $GM(1,1)$ modeli birçok alanda uygulandığı ve zayıf bilgi ile tahmin problemlerinin çözümünde bir hayli başarı sağlamış olmasına rağmen, modelin tahmin doğruluğunu artırmak ve uygulama aralığını genişletmek için hala iyileştirmeye gereksinimi vardır. Gri girdinin optimizasyonu, klasik gri modelin doğruluğunu arttırmak için en önemli ölçülerden biridir [28]. Gri modelin girdisi geliştirilerek çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu modellerden bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir [28].

Tablo 1. Farklı Girdilerin Kullanıldığı Modeller: Literatürde var olan farklı gri modellerin ismi, notasyonu ve gri girdisi verilmektedir.

Gri Model	Notasyon	Gri Modelin Girdisi
Non-homogeneous grey model	NGM (1,1, k)	bk
Self-adapting intelligent grey model	SAIGM	$bk + c$
Grey model with time power	GM (1,1, t^α)	$bt^\alpha + c$
Exponential optimization grey model	EOGM	be^{at}
Grey model with full-order time power terms	FOTP-GM	$\sum_{i=0}^h b_i k^i, (h \geq 1)$
Grey Verhulst model	GVM	$b(x^{(1)}(t))^2$
Nonlinear grey Bernoulli model	NGBM	$b(x^{(1)}(t))^n$
Incomplete gamma grey model	IGGM	$b\gamma(\mu, t) + c$

Bu çalışmada Gri modelin girdisine katkıda bulunmak amacıyla aşağıdaki model denklemi göz önüne alınmıştır. Bu model gri Verhulst modeline sabit terimin eklenmesi ile oluşturulmuştur.

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^2 + c \tag{7}$$

Burada $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k - 1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ ile tanımlanmaktadır. k 'nın değerleri yukarıdaki denklemde yerine konulduğunda elde edilen denklemler matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2 & 1 \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Yukarıda matris formu verilen denklemler çözülerek a , b ve c 'nin en küçük kareler tahmin edicileri $\hat{r} = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{c}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ denkleminde elde edilir. Modele ait beyazlaştırılmış denklem (whitening equation)

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b(x^{(1)}(t))^2 + c \tag{8}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Dolayısıyla $GM(1,1)$ modelinin ikinci-dereceden gri diferansiyel denklemi gözönüne alınmıştır. $\hat{r} = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{c}]^T$ parametreleri son denklemde yerine konularak çözülerek zamana bağlı tahmin denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü [29]'da verilmektedir. Diferansiyel denklemin çözümünden elde edilen sonuç $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ ve $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=n} = x^{(1)}(n)$ olmak üzere iki farklı başlangıç koşulu için çözülerek zamana bağlı tahmin denklemi elde edilebilmektedir. Son olarak $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k - 1)$ ifadesi ile de $\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ tahmin değerleri elde edilebilmektedir. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa aşağıdaki üç durum ortaya çıkmaktadır:

1. Durum: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $X \in R$ ve K keyfi sabit olmak üzere genel çözümü

$$y(x) = \frac{1}{2a} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})Ke^{\sqrt{b^2 - 4ac}x}}{1 - Ke^{\sqrt{b^2 - 4ac}x}} \tag{9}$$

olup burada

$$K = \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4ac} + 2ay_0)e^{-x_0\sqrt{b^2 - 4ac}}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac} + 2ay_0}$$

dir ve

$$y(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ise tekil çözümdür.

2. Durum: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise $X \in R$, K_1 keyfi sabit olmak üzere genel çözüm;

$$y(x) = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{-ax + K_1} \quad (10)$$

olup burada

$$K_1 = ax_0 + \frac{2a}{b + 2ay_0}$$

dir ve

$$y(x) = -\frac{b}{2a}$$

ise tekil çözümdür.

3. Durum: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise, $X \in R$ ve K_2 keyfi sabit olmak üzere genel çözüm

$$y(x) = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} \tan\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2}x + K_2\right) \quad (11)$$

olur ve burada

$$K_2 = -\frac{1}{2}x_0 + \sqrt{-b^2 + 4ac} + \arctan\left(\frac{b + 2ay_0}{\sqrt{-b^2 + 4ac}}\right)$$

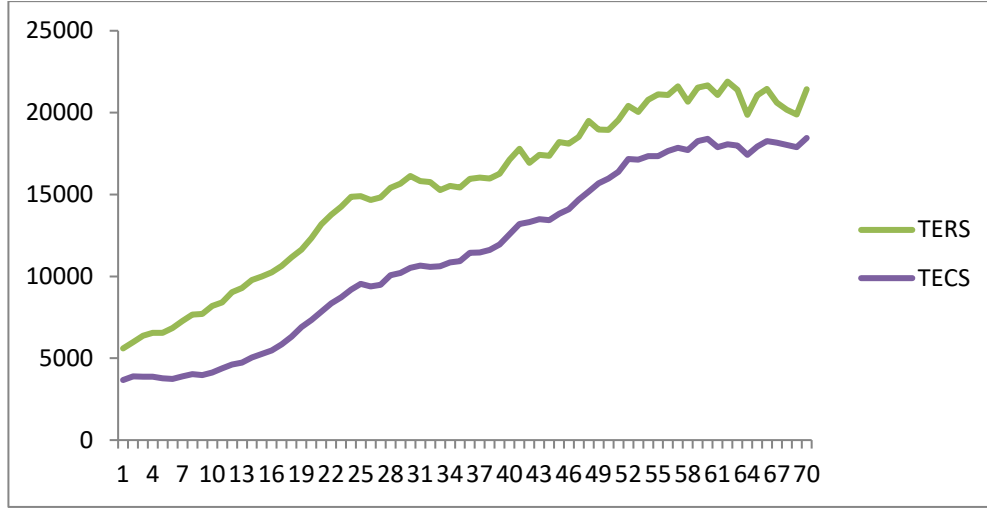
olur.

III. UYGULAMA

Ülkelerin enerji tüketim verileri, ileride oluşacak enerji taleplerini karşılamak için oluşturulacak enerji politikalarında büyük rol oynamaktadır. Doğru tahmin modelleri, enerji tüketim trendlerinin belirlenmesi ve enerji yatırımlarının planlanması için fayda sağlamaktadır. Bu bağlamda çalışma kapsamında yapılacak uygulama çalışmasının enerji alanında olabileceği düşünülmüştür. Çalışma kapsamında Amerika Birleşik Devletleri (ABD) Enerji Bilgi İdaresi tarafından hazırlanan Ocak 2020 Aylık Enerji Değerlendirmesi'nden elde edilen enerji tüketim veri seti kullanılabilir durumdadır. Bu veri seti "British thermal unit" (Btu) cinsinden ABD'deki ticaret ve sanayi sektörleri tarafından tüketilen birincil ve toplam enerji tüketim miktarlarını içermektedir. Bu veri setleri içerisinde iki tanesi bu çalışmada kullanılmıştır. Veriler 1949-2018 yılları arasındaki yıllık verilerden oluşmaktadır. Kullanılan değişkenler şunlardır:

- **TERS:** Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Residential Sector)
- **TECS:** Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji (Total Energy Consumed by the Commercial Sector)

Bu değişkenlere ait zaman yolu grafiği aşağıda verilmektedir:



Şekil 1. İki Değişken İçin Zaman Yolu Grafiği: TERS ve TECS değişkenlerinin 1949-2018 yılları arasındaki yıllık veri kullanılarak çizilmiştir.

Bu grafikten TERS ve TECS değişkenlerinin benzer yapıda oldukları ve yukarı yönlü bir trend eğiliminde oldukları söylenebilir. Bu iki değişken için hem klasik zaman serisi analizi ile uygun modeller belirlenmiş hem de çeşitli gri modellere uyum yapılarak değişkenin yapısına uygun gri modeller belirlenmiştir. İlgili

değişkenlerin yukarı yönlü bir trend eğiliminde olmaları nedeniyle bu iki değişken için hem doğrusal (lineer) hem de karesel (quadratic) trend için model uyumu yapılmış ve istatistiksel açıdan anlamlı model denklemleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. İki Değişken İçin İstatistiksel Açıdan Anlamlı Model Denklemleri: TERS ve TECS değişkenleri için kurulan doğrusal ve parabolik trend denklemleri verilmektedir.

Doğrusal Trend denklemi	Parabolik trend denklemi
$\hat{Y}_{TERS_d} = 6967.957 + 237.193t$	$\hat{Y}_{TERS_p} = 4581.350 + 436.077t - 2.801t^2$
$\hat{Y}_{TECS_d} = 6967.957 + 237.193t$	$\hat{Y}_{TECS_p} = 1806.420 + 304.617t - 0.724t^2$

İlgilenilen değişkenlerin zaman yolu grafiği incelendiğinde bir trend yapısının varlığı göze çarpmaktadır. Bu durumda literatürde lineer trend yapısının varlığı durumunda en çok kullanılan gri model klasik GM (1,1)’dir. Bu nedenle ilgili değişkenlere ilişkin GM (1,1) modelleri elde edilmiştir. Ancak trend yapısının lineer olması yanında karesel formu da değerlendirilmelidir. Bu nedenle literatürde yer alan gri Verhulst modeline de uyum yapılmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 3’ de verilmiştir.

Tablo 3. TERS ve TECS Değişkenleri İçin GM (1,1) ve Gri Verhulst Model Denklemleri: TERS ve TECS değişkenleri için GM(1,1) ve Gri Verhulst model denklemleri verilmektedir.

GM (1,1) model denklemleri	
TERS için	$x_p^{(1)}(k+1) = \left[5599,404 - \frac{9236,541}{(-0,014)} \right] e^{-(-0,014)k} + \frac{9236,541}{(-0,014)}$
TECS için	$x_p^{(1)}(k+1) = \left[3668,856 - \frac{5315,246}{(-0,021)} \right] e^{-(-0,021)k} + \frac{5315,246}{(-0,021)}$
Gri Verhulst model denklemleri	
TERS için	$x_p^{(1)}(k+1) = \frac{-0,059(5599,404)}{(-0,0000000394)(5599,404) + ((-0,059) - (-0,0000000394)5599,404)e^{-0,059k}}$
TECS için	$x_p^{(1)}(k+1) = \frac{-0,061(3668,856)}{(-0,00000005)(3668,856) + ((-0,061) - (-0,00000005)3668,856)e^{-0,061k}}$

Bu çalışmada önerilen Gri Verhulst modeline sabit terimin eklenmesi ile oluşturulan GVMCT modeline uyum yapılmıştır. Her bir değişken için bu modele uyumun detayları şöyle verilebilir: Öncelikle GVMCT modeline ilişkin tahmin denkleminin oluşturulabilmesi için 2.3. bölümünde detayları verilen matrislerin oluşturulması ve bu matrisler kullanılarak (7) denkleminin katsayılarının en küçük kareler yöntemi ile elde edilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla TERS değişkeni için matrisler oluşturulduktan sonra (7) denkleminin katsayıları için $b = -0,00000001747940823991$, $a = -0,0315947155430396$, $c = 6684,84612360998$ değerleri elde edilmiştir. Çözümün detayları gereği b yerine a ve a yerine $(-b)$ kullanıldığından $a = -0,00000001747940823991$,

$$b = 0,0315947155430396,$$

$$c = 6684,84612360998$$

alınarak $\Delta = 0,00146561466790790$ ($\sqrt{\Delta} = 0,038283347$) elde edilmiştir. $\Delta > 0$ olduğundan (9) denklemi kullanılarak TERS değişkeni için $\hat{x}^{(1)}(k+1)$, $k = 1,2,3, \dots$ değerleri elde edilir. (9) denkleminde K keyfi sabittir ve değeri başlangıç koşuluna bağlı olarak hesaplanmaktadır. $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ ($\hat{x}^{(0)}(1) = y(x_0)$, $x^{(0)}(1) = y_0$), başlangıç koşulu altında $K = -0,10$ olarak hesaplanmıştır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ serisinin değerleri $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ olmak üzere aşağıdaki IAGO işlemi ile elde edilmiştir.

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

Benzer şekilde TECS değişkeni için matrisler oluşturulduktan sonra (7) denkleminin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$b = -0,00000002915793996,$$

$$a = -0,041778649,$$

$$c = 3247,872752$$

Benzer şekilde b yerine a ve a yerine $(-b)$ kullanıldığından

$$a = -0,00000002915793996,$$

$$b = 0,041778649,$$

$$c = 3247,872752$$

alınarak $\Delta = 0,00212$ ($\sqrt{\Delta} = 0,046089702$) elde edilmiştir. $\Delta > 0$ olduğundan (9) denklemi kullanılarak TECS değişkeni için $\hat{x}^{(1)}(k+1)$, $k = 1,2,3, \dots$ değerleri elde edilir. (9) denkleminde K keyfi sabittir ve değeri başlangıç koşuluna bağlı olarak hesaplanmaktadır. $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ ($\hat{x}^{(0)}(1) = y(x_0)$, $x^{(0)}(1) = y_0$), başlangıç koşulu altında $K = -0,049297954$ olarak hesaplanmıştır. $\hat{x}^{(0)}(k)$ serisinin değerleri $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ olmak üzere aşağıdaki IAGO işlemi ile elde edilmiştir.

IV. BULGULAR

4.1. Uygun Modellerin Performans Değerlendirmesi

Bu çalışmada iki değişken ile ilgili hem zaman serileri analizi hem de gri modelleme kullanılarak bir takım tahmin denklemleri elde edilmiştir. Bu tahmin denklemlerinin performansı gerçek değerler ile denklemlerden elde edilen tahmin değerlerinin kıyaslanması ile ortaya konmaktadır. Bu amaçla ortalama hata kare (MSE, mean square error), ortalama mutlak hata (MAE, mean absolute error) ve karekök ortalama hata kare (RMSE, root mean square error) ölçüleri performans ölçüleri olarak belirlenmiş ve bu ölçülere bağlı olarak kıyaslama yapılmıştır. Bu ölçüler aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2}{n}}, \quad MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2}{n}$$

Burada n zaman periyodunu, y_i gözlenen değerleri ve \hat{y}_i ilgili modelden elde edilen tahmin değerlerini göstermektedir $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Bu performans ölçüleri her bir belirlenen tahmin modeli için elde edilmiş ve Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. TERS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu ($\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu

Altında): TERS değişkeni için lineer ve parabolik trend denklemleri ile GM(1,1), Gri Verhulst ve GVMCT gri modellerine ait MSE, MAE ve RMSE değerleri hesaplanmıştır.

	Lineer Trend	Parabolik Trend	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	1547026,003	2702787	3027041,828	142553595,6	711201,2553
MAE	1004,623451	1281,799	1468,349424	11531,44185	721,3727193
RMSE	1243,795001	1644,0154	1739,839598	11939,58105	843,3274899

Performans ölçüleri hataya dayalı olarak hesaplandığından elde edilen değerlerin küçük olması istenir. Dolayısıyla TERS değişkeni için performans tablosu incelendiğinde tüm kriterlere göre (MSE, MAE, RMSE) önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Zaman

serisi modellerinden (lineer ve parabolik trend) lineer trend denkleminin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Gri modeller içerisinde (GM (1,1), Gri Verhulst ve GVMCT) Gri Verhulst modeli hep daha kötü bir performans göstermektedir.

Tablo 5. TECS Değişkeni İçin Performans Kriter Tablosu ($\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ Başlangıç Koşulu

Altında): TECS değişkeni için lineer ve parabolik trend denklemleri ile GM(1,1), Gri Verhulst ve GVMCT gri modellerine ait MSE, MAE ve RMSE değerleri hesaplanmıştır.

	Lineer Trend	Parabolik Trend	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	601309,1667	2702787	2447341,914	81403143,18	266685,5521
MAE	633,8923189	1281,799	1184,59042	8472,077807	437,6890676
RMSE	775,4412722	1644,0154	1564,398259	9022,369045	516,4160649

TECS değişkeni için performans tablosu incelendiğinde tüm kriterlere göre (MSE, MAE, RMSE) önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Zaman serisi modellerinden lineer trend denkleminin performansının daha iyi olduğu görülmektedir. Gri modeller içerisinde (GM (1,1), Gri Verhulst ve GVMCT) Gri Verhulst modeli hep daha kötü bir performans göstermektedir.

İlgilenilen iki değişken içinde benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca gri modele ait diferansiyel denklem belirli bir başlangıç koşuluna bağlı olarak çözülmektedir. Başlangıç koşulunun değiştirilmesi durumunda elde edilecek sonuçlar da farklı olmaktadır. Literatürde farklı başlangıç koşulu önerileri

bulunmaktadır. Başlangıç koşulunun tahmin denkleminin performansını ne kadar etkilediğinin görülebilmesi amacıyla $\hat{x}^{(1)}(k)|_{k=n} = x^{(1)}(n)$ başlangıç koşulu alınarak hesaplamalar tekrarlanmıştır. Değişkenlere ilişkin elde edilen performans kriter tabloları yeniden hazırlanmış ve TERS değişkeni için Tablo 6'da, TECS değişkeni için Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 6. TERS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu:

TERS değişkeni için iki farklı başlangıç koşulu altında MSE, MAE ve RMSE değerleri hesaplanmış ve karşılaştırma tablosu oluşturulmuştur.

	$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$			$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=n} = x^{(1)}(n)$		
	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	3027041,8	142553595,6	711201,26	102285356,00	4886151,507	709150,35
MAE	1468,349	11531,442	721,373	9478,099	1960,4168	711,3552
RMSE	1739,84	11939,581	843,327	10113,622	2210,464	842,111

Tablo 7. TECS Değişkeni İçin İki Farklı Başlangıç Koşulu Altında Performans Kriter Tablosu:

TECS değişkeni için iki farklı başlangıç koşulu altında MSE, MAE ve RMSE değerleri hesaplanmış ve karşılaştırma tablosu oluşturulmuştur.

	$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=1} = x^{(1)}(1)$			$\hat{x}^{(1)}(k) _{k=n} = x^{(1)}(n)$		
	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT	GM (1,1)	Gri Verhulst	GVMCT
MSE	2447341,914	81403143,18	266685,5521	90573267,9412	1280607,0235	265323,4427
MAE	1184,59042	8472,077807	437,6890676	8569,039	959,24906	433,0486
RMSE	1564,398259	9022,369045	516,4160649	9516,998894	1131,639087	515,0955666

Tablo 6 ve Tablo 7 incelendiğinde yine önerilen GVMCT modelinin daha iyi performans gösterdiği söylenebilir. Ancak iki farklı başlangıç koşulu sonuçlarda büyük bir fark yaratmamaktadır.

Buraya kadar yapılan analizler incelenen değişkenlerin 1949-2018 yılları arasındaki yıllık verilerine

dayanmaktadır. Bundan sonraki iki dönem için çalışma kapsamında göz önüne alınan modellerden tahmin değerleri elde edilmiş, oluşan gerçek değerler ile birlikte Tablo 8 ve Tablo 9' da verilmiştir.

Tablo 8. TERS Değişkeni Tahmin Değerleri: Analiz 1949-2018 yılları arasındaki verilerden oluşmaktadır. Dolayısıyla TERS değişkeni için 2019 ve 2020 yılları için hem gerçek hem de öngörü değerleri verilmiştir.

	Gerçekleşen Değer	Lineer Trend	Quadratic Trend	GM (1,1)	Verhulst	GVMCT
2019	21068,989	23808,66	21422,976	24646,3038	13300,6546	20346,3836
2020	20803,162	24045,853	21458,51	24993,7787	13797,1051	20206,2345

Tablo 9. TECS Değişkeni Tahmin Değerleri: Analiz 1949-2018 yılları arasındaki verilerden oluşmaktadır. Dolayısıyla TECS değişkeni için 2019 ve 2020 yılları için hem gerçek hem de öngörü değerleri verilmiştir.

	Gerçekleşen Değer	Lineer Trend	Quadratic Trend	GM (1,1)	Verhulst	GVMCT
2019	18010,899	20401,032	19784,543	23207,8109	10646,1718	17954,037
2020	16762,815	20654,239	19985,628	23700,3282	11073,1943	17846,392

TERS ve TECS değişkenleri için önerilen GVMCT modeli oldukça iyi performans göstermiş ve 2019-2020 yılları için oldukça yakın öngörü değerleri elde edilmesini sağlamıştır.

V. SONUÇ

Gri Sistem Teorisi, belirsizliğin ve eksik bilginin olduğu durumlarla ilişkilendirilen, stokastik veya bulanık yöntemlerle üstesinden gelinmeyen durumlarda belirsiz sistemlerin çıktılarını genel istatistik yöntemlerin yanı sıra sınırlı sayıda veri ile gerçeğe yakın tahminleme yeteneği ile dikkatleri üzerine çekmektedir [30]. Gri model ile ilgili çalışmalar incelendiğinde çoğu araştırmada kullanımına en sık rastlanan modelin GM (1,1) modeli olduğu görülmektedir. Bu model doğrusal trend yapısının varlığında doğru sonuçlar üretebilmektedir. Ancak, ilgilenilen veri yapısının doğrusal olmadığı durumlar ile çoğunlukla karşılaşmakta ve bu durumlar gerçeğe daha uygun görünmektedir. Dolayısıyla farklı veri yapılarına uygun modellere ilişkin tahmin denklemlerinin oluşturulması literatüre katkı açısından önemlidir. Bu bakış açısıyla bu çalışma doğrusal olmayan veri yapılarının modellenmesine katkı sağlamaktadır. Bu çalışmada günlük hayatta önemli bir yere sahip enerji alanında kullanılacak uygun gri model denklemleri elde edilmiştir. Enerji sektörü baz alınarak yapılan uygulamamızda iki farklı değişken ele alınmıştır. Bunlar;

- TERS (Konut Sektörünün Tükettiği Toplam Enerji),
- TECS (Ticari Sektörün Tükettiği Toplam Enerji),

TERS değişkeni için RMSE, MAE, MSE değerleri sırasıyla $(\hat{x}^{(1)}(k))|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında 711201.2553, 721.3727193, 843.3274899 elde edilmiştir. Buna göre diğer modellerin performans kriterleri değerlerine göre küçük olması dolayısıyla önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir.

TECS değişkeni için RMSE, MAE, MSE değerleri sırasıyla $(\hat{x}^{(1)}(k))|_{k=1} = x^{(1)}(1)$ başlangıç koşulu altında 66685.5521, 437.6890676, 516.4160649 elde edilmiştir. Buna göre diğer modellerin performans kriterleri değerlerine göre küçük olması dolayısıyla önerilen GVMCT modelinin performansının daha iyi olduğu görülmektedir.

Zaman serileri analizi yapabilmemiz için veri kümesinin oldukça geniş olması gerekmektedir. Bu çalışmada amaçlanan temel hedef, az veri ile çalışan gri sistem baz alınarak bir model geliştirmek, sonrasında geliştirilen bu modelin ilgili alana ilişkin sonuçların daha gerçekçi ve destekleyici olması açısından zaman serileri ile birlikte değerlendirerek en elverişli yöntemi belirlemektir. Bu nedenle çalışma kapsamında gerçekleştirilen uygulamalar sonucunda elde edilen denklemlerin performansı veri kümesi büyüklüğünün uygun olması nedeniyle zaman serisi analizi ile elde

edilen denklemlerle kıyaslanabilmiş ve elde edilen denklemlerin performansının yukarıda belirtildiği üzere iyi olduğu görülmüştür. Yani kullanışlı bir gri model geliştirildiği ifade edilebilir. Dolayısıyla, bu uygulama alanında ve veri kümesi büyüklüğünün sınırlı olduğu durumlarda kullanılabilir, iyi performans gösteren tahmin denklemi alternatifi bu çalışma ile ortaya konulmuştur. Tüm bu detaylar çalışmanın önemini ortaya koymakta ve dolayısıyla verilen detaylar açısından konuya katkı sağlamaktadır.

GM(1,1) ve Gri Verhulst modeli uygulama alanında çokça kullanılan iki modeldir. Verhulst modelinin bir versiyonu diyebileceğimiz ve bu çalışmada kullanılan GVMCT modeli bundan sonraki çalışmalarda göz önünde bulundurulacak ve farklı uygulama alanları ile bu modelin kullanımının yaygınlaştırılması sağlanacaktır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma FYL-2020-21749 numaralı Ege Üniversitesi BAP Lisansüstü Tez projesi kapsamında desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A., (1965). Fuzzy Sets., *Information and Control*, 8(3), 338 – 35, [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [2] Deng J.L., (1982). Control-Problems of Grey Systems. *Systems & Control Letters*, 1, 288-294, 10.1016/S0167-6911(82)80025-X
- [3] Huang, T.L, Wen, K.L. ve Deng J.L., (1997). The Documents of Grey System Theory. *2nd National Conference of Grey Theory and Applications*, 1-32.
- [4] Aydemir, E., Bedir, F. ve Özdemir, G., (2013). Gri Sistem Teorisi Ve Uygulamaları: Bilimsel Yazın Taraması. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 18(3), 187-200.
- [5] Deng J.L., (1989). Introduction To Grey System Theory. *J Grey Syst*, 1 (1), 1-24.
- [6] Aydemir, E., Bedir, F. ve Ozdemir, G., (2013). The Grey System Approaches for Demand Forecasting. *Journal of Trends in Development of Machinery and Associated Technology*, 17 (1), 105-108.
- [7] Ekincioglu, G., Akbay, D. ve Aydemir, E., (2022). Effects of the Covid-19 Pandemic on Turkish Natural Stone Industry: A Grey Forecasting Model. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 10 (2), 520 – 531.
- [8] Tan L.Z., Ouyang A.J., Peng X.Y., et al., (2015). A Fast And Stable Forecasting Model To Forecast Powerload. *Int J Pattern Recogn Artifintell*, 29 (03), 1559-1564.
- [9] Lin Z, Zhang Q. ve Liu H., (2012). Parameters Optimization of GM (1, 1) Model based on Artificial fish swarm algorithm. *Grey Syst Theor Appl.*, 2(2), 166-177.
- [10] Wang ZX, Li Q. ve Pei LL., (2017). Grey Forecasting Method Of Quarterly Hydropower Production in China Based On A Data Grouping Approach. *Appl Math Model.*, 51, 302-316.
- [11] Lin YH, Chiu C.C, Lee P.C, et al., (2012). Applying Fuzzy Grey Modification Model On Inflow Forecasting. *Engappl Artif intell*, 25(4), 734-743.
- [12] Chang, C-J., Lin, J-Y. ve Jin, P., (2017). A Grey Modeling Procedure Based On The Data Smoothing Index For Short-Term Manufacturing Demand Forecast. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 23, 409-422.
- [13] Xie N. M. ve Liu S.F., (2009). Discrete Grey Forecasting Model and Its Optimization. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2), 1173-1186.
- [14] Ma. ve Liu Z.B., (2017). Application Of A Novel Time-Delayed Polynomial Grey Model To Predict The Natural Gas Consumption in China. *J Comput appl. Math*, 324, 17-24.
- [15] Yang, Y. ve Xue, D., (2016). Continuous Fractional-Order Grey Model and Electricity

- Prediction Research Based on the Observation Error Feedback. *Energy*, 115, 722-733.
- [16] Deng J.L., (2002). Basis On Grey System Theory. Wuhan. Huazhong University of Science and Technology Press.
- [17] Dang, Y.G. ve Liu, S.F., (2004). The GM Models That X(N) Be Taken As Initial Value. *Kybernetes*, 33(2), 247-254.
- [18] Xie N. M. ve Liu S.F., (2009). Discrete Grey Forecasting Model and Its Optimization. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2), 1173-1186.
- [19] Liu, S. ve Yi Lin., (2010). Grey Systems Theory and Applications, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg, s. 391.
- [20] Mostafaei, H. ve Kordnoori, S., (2012). Hybrid Grey Forecasting Model for Iran's Energy Consumption and Supply. *International Journal of Energy Economics and Policy*, 2(3), 97-102.
- [21] Shen, X. ve Lu, Z., (2014). The Application of Grey Theory Model in the Predication of Jiangsu Province's Electric Power Demand, *AASRI Procedia*, 7, 81-87.
- [22] Akay, D. ve Atak, M., (2007). Grey Prediction With Rolling Mechanism For Electricity Demand Forecasting of Turkey. *Energy*, 32, 1670-1675.
- [23] Lin Z, Zhang Q. ve Liu H., (2012). Parameters Optimization of GM (1, 1) Model based on Artificial fish swarm algorithm. *Grey Syst Theor Appl*; 2(2), 166-177.
- [24] Wang, H. T., ve Mu, S. R., (2010). Study on the energy consumption structure and carbon emissions trend in Beijing. *Urban Studies*, 17(9), 55-60.
- [25] Es, H.A., (2020). Gri Tahmin Modelleri ile Toplam Enerji Talep Tahmini: Türkiye Örneği. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. GÜFBED/GUSTIJ* 10 (3), 771-782.
- [26] Zeng, B., Li, C., Chen G. ve Zhang, W., (2013). Verhulst Model of Interval Grey Number Based on Information Decomposing and Model Combination. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 472065, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/472065>
- [27] Kayacan, E., Ulutas, B. ve Kaynak, O., (2010). Grey System Theory-Based Models in Time Series Prediction, *Expert Systems with Applications*, 37, 1784 -1789.
- [28] Zhang, P., Ma, X. ve She, K., (2019). Forecasting Japan's Solar Energy Consumption Using a Novel Incomplete Gamma Grey Model. *Sustainability*, 11, 5921.
- [29] Atalay, S.D., Çalış, G. ve Adıyaman M., (2022). An improved grey Verhulst model to forecast energy demand in the USA and Turkey. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering Sustainability*, 175(3), 154-164, <https://doi.org/10.1680/jensu.21.00085>
- [30] Liu, S. ve Lin, Y., (2006). Grey Information, Springer, Berlin Heidelberg, s.512.