



ÇİFT SİMETRİLİ DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN EKSENEL TİTREŞİMLERİ

Aydın ÖZMUTLU^{1*} 

¹Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Çorlu Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Tekirdağ.

Öz

Bu çalışmada çift simetrikli değişken kesitli çubukların taşıma matrisi yöntemi ile aksenal titreşimleri araştırılmıştır. Ele alınan problemdeki, çubuk açıklık ortasına göre simetrik ve her iki ucundan basit mesnetlidir. Konik çubuk için küresel koordinatlarda yazılan hareket denkleminin değişkenlerine ayırma yöntemi ile Bessel fonksiyonları cinsinden kapalı çözümü yapılmıştır. Simetrik çubuğun 1'inci ve 2'nci bölgesi için çubuk uçlarında durum vektörleri yazılmış ve her iki bölge için taşıma matrisi türetilmiştir. Simetrik çubuk için toplam taşıma matrisi yazılıp sınır koşulları uygulanarak titreşim denkleminde ulaşılmıştır. Bu denklemin çözümünden serbest titreşim frekansları ve mod şekilleri farklı koniklik oranları için belirlenmiştir. Koniklik oranının ve simetrisinin aksenal titreşim üzerine olan etkisi ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Konik çubuk, Aksenal titreşim, Taşıma matrisi, Küresel Bessel fonksiyonları

AXIAL VIBRATIONS OF DOUBLY SYMMETRIC TAPERED BARS

Abstract

In this study, axial vibrations of bi-symmetrical variable cross-section bars were investigated using the transfer matrix method. The bar in the problem under examination is presumptively symmetrical about its mid-span and simply supported at both ends. The doubly symmetric tapered bar's equation of motion, written in spherical coordinates, is solved in closed form employing the separation of variables, and the solution is expressed in terms of Bessel functions. State vectors are obtained at the ends of the symmetrical bar for the first and second domains, and the transfer matrix is computed for both domains. The vibration equation is obtained by writing the total transfer matrix for the symmetrical bar and applying the boundary conditions. From the solution of this equation, free vibration frequencies and mode shapes are determined for different taper ratios. The effect of taper ratio and symmetry on axial vibration has been demonstrated.

Keywords: Tapered bar, Axial vibration, Transfer matrix, Spherical Bessel functions

Sorumlu Yazar: Aydın ÖZMUTLU, aozmutlu@nku.edu.tr

1. Giriş

Mühendislik uygulamalarında kullanılan bir boyutlu yapılar içinde, çubuk eksen boyunca kesiti bir fonksiyona bağlı (doğrusal, parabolik, üstel, vb.) değişen elamanların ayrı bir yeri vardır [1]. Literatürde kesik konik olarak isimlendirilen bu elemanlar [2], prefabrik yapılar, köprüler, makine elemanları gibi farklı alanlardaki mühendislik uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır [3]. Kesik konik yapıların servis ömrü sırasında karşılaşılabilecekleri dinamik yükler, bu yapıların davranışlarının doğru bir şekilde anlaşılmasını ve boyutlandırılmasını zorunlu kılar. Bu anlamda yapı elemanlarında kesitlerin verimli kullanılması güvenlik ve ekonomiklik açısından önemli olup, kesik konik çubuklar bu beklentiyi karşılamakta prizmatik çubuklara göre bir adım öne çıkmaktadır [4]. Dolayısı ile bu yapılarda dinamik etkilerle ortaya çıkan titreşimlerin ve dalga yayılımının araştırılması, malzeme mühendisliği ve tasarımında meydana gelen gelişmelerle güncelliğini hala korumaktadır [5,6]. Çift simetrikli değişken kesitli çubukların uygulamada kullanımına ilişkin örnekler, çelik profil kolonlar [7], betonarme kolonlar [8] ve özellikle dönen makine parçalarının (helikopter rotor palası, rüzgar türbini vb.) [9] şeklinde verilebilir.

Banerjee ve Williams [10] ince kiriş (Euler-Bornoulli (EB)) teorisine uyan konik çubukların aksel, burulma ve eğilme titreşimlerinin, Bessel fonksiyonlarını kullanarak dinamik rijitlik yöntemi ile kesin çözümlerini elde etmişlerdir. Gupta [11] konik kirişlerin serbest titreşim frekanslarını ve mod şekillerini belirlemiş, çözümde sonlu elaman yaklaşımı kullanmıştır. Elastik mesnetli konik bir kirişin titreşimlerini, Lee ve diğ. [12] entegral dönüşüm yöntemini, Rosa ve Auciello [13] Bessel fonksiyonlarını, Hsu ve diğ. [14] Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak seçilen sınır koşulları için incelemişlerdir. Banerje ve diğ. [15] dönen konik bir çubuğun eğilme titreşimlerini araştırmışlardır. Frobenius seri çözümü kullanarak dinamik rijitlik yöntemi ile dönüş hızına bağlı, mod şekillerini ve serbest titreşim frekanslarını ortaya koymuşlardır. Ece ve diğ. [16] kesit genişliği üstel olarak değişen konik bir kirişin titreşimlerini araştırıp, problemin değişik sınır koşulları için kesin çözümlerini vermişlerdir. Lee ve Lee [17] konik bir EB kirişinde titreşim frekanslarını Frobenius seri çözümü kullanarak taşıma matrisi yöntemi (TMM) ile elde etmiş ve terim sayısına bağlı serideki yakınsamaya ait sonuçları paylaşmışlardır. Banerjee ve Ananthapuvirajah [18] aynı problemin Bessel fonksiyonları ile analitik çözümünü vermişlerdir. Çalım [19] konikliği üstel ve doğrusal değişen iki farklı durum için Timoshenko kirişinin serbest

titreşimlerini farklı sınır koşulları altında incelemiş, frekanslarını belirlemiştir. Magnucki ve diğ. [20] konikliği doğrusal ve yaddoğrusal değişen açıklık ortasına göre simetrik kirişlerin serbest titreşim frekanslarını analitik ve sayısal çözüm sonunda elde etmişlerdir. Her iki çözüm sonunda elde edilen farkların kabul edilebilir hata sınırı içinde kaldığı gösterilmiştir.

Konik çubukların dinamik davranışı üzerine olan çalışmalara bakıldığında genellikle eğilme titreşimlerinin araştırılmasına yoğunlaşıldığı anlaşılmaktadır. Eksenel titreşimlerin araştırıldığı çalışmalar sınırlıdır. Abrate [21] kesiti doğrusal değişen bir konik çubuğun titreşim frekanslarının kesin çözümünü elde etmiştir. Ayrıca, konik bir çubukta eksen boyunca kesit değişimi bazı özel seçilmiş fonksiyonlar ile tarif edilerek doğal frekansları veren kesin çözümler elde edilebilmektedir [22–26]. Gan ve diğ. [27] farklı çubuk teorileri kullanarak konik bir çubukta boyuna dalga yayılımını taşıma matrisi yöntemi ile incelemişlerdir. Pillutla ve diğ. [28] çubuk eksen boyunca enkesiti çeşitli fonksiyonlara bağlı değişen konik bir çubuğun serbest titreşimlerini frekanslarını veren yaklaşık çözümlerini Chebyshev fonksiyonlarını kullanarak elde etmişlerdir. Ayrıca çalışmada önerilen yaklaşık yöntem homojen olmayan çubuklara da uygulanarak yeter yaklaşıklık sağlandığı gösterilmiştir. Todorovska ve diğ. [29] piramit şeklindeki bir binayı kesik piramit biçiminde modelleyerek, kayma dalgası yayılımını deprem verileri üzerinden incelemişlerdir. Elde edilen sonuçları sistem tanımlaması yapmak için kullanmışlar ve yapı sağlığı izlemesine kaynaklık etmesi konusunda önemli bilgiler ortaya koymuşlardır. Šalinić ve diğ. [30] konik çubuk ve kirişlerdeki serbest titreşimleri eksenel derecelendirilmiş malzeme hali için incelemişlerdir. Ele alınan örneklerde çubuk ve kiriş elemanların en kesiti kademeli ve sürekli değişen parçalardan oluşmakta olup, bu yapıların uçlarına bağlı kütle ve yayların serbest titreşim üzerindeki etkilerine bakılmıştır.

Konik kirişler üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde çubuk boyunca enkesit alanının kademeli değişim gösterdiği problemlere çok az rastlanmaktadır. Bu çalışmada taşıma matrisi yöntemi ile konikliği kademeli değişen çubukların serbest titreşim analizine ait kapalı bir çözüm sunulmaktadır. Çalışmada açıklık ortasına göre simetrik konik bir çubuğun eksenel titreşimleri incelenmiştir. Konik geometrisi eksene dik her iki düzlemde de doğrusal değişim göstermektedir. Problemin geometrisine uygun olarak hareket denklemi küresel koordinatlarda tanımlanmıştır. Elde edilen dalga denklemi ayrıklaştırılarak Bessel diferansiyel denklemine indirgenmiştir. Bu

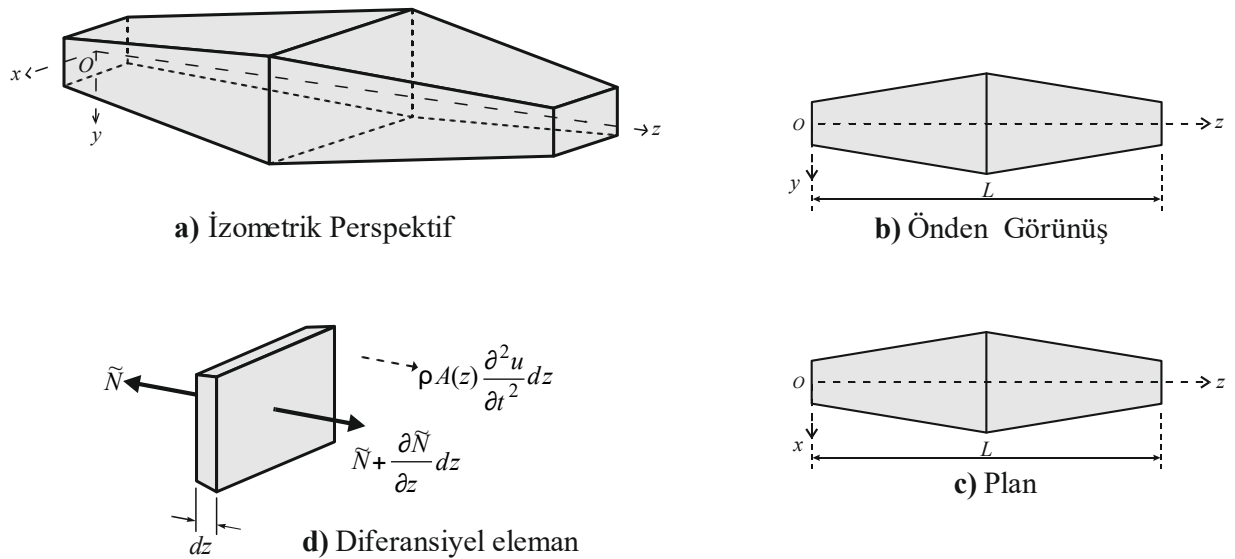
denklemin çözümü kullanılarak, çubuğun her iki bölgesinde uçlarında yazılan durum vektörleri ilişkisinden taşıma matrisi elde edilmiştir. Çubuğun mesnetlenme durumu göz önüne alınarak yazılan sınır koşulları, titreşim frekanslarının elde edilmesini sağlayan denklemi vermiş ve bu frekanslara karşılık gelen mod şekilleri belirlenmiştir. Koniklik oranındaki değişimin frekanslara ve mod şekillerine etkisine bakılmış, prizmatik bir çubukla sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümünde homojen, izotrop konik bir çubuğun hareket denklemi ve çözümü, çubuğun her bölgesi için taşıma matrisi ve bütünü için toplam taşıma matrisi, son olarak sabit mesnetlenme durumuna ait frekans denklemi verilmiştir.

2.1 Analitik Model ve Çözüm

Ekseni boyunca çubuk en kesiti doğrusal değişen, açıklık ortasına göre simetrik L uzunluğunda bir çubuk göz önüne alalım (Bk. Şekil 1). Çubuğun doğrusal esnek davrandığı kabul edilmiş olup küçük şekildeğiştirme teorisi göz önüne alınmaktadır.



Şekil 1. Analitik model

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[EA(r) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \rho A(r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Çubuk enkesit alanı çift simetriye sahip olduğu için değişimi $A(r) = A_0(r/r_0)^2$ şeklindedir. Çubuğun mesnet noktasındaki kesitin kenar uzunluğu a_0 , açıklık ortasındaki kesitin kenar uzunluğu a_m olmak üzere çubuk geometrisinden $r_0 = a_0 L / (a_m - a_0)$ şeklinde hesaplanır.

İncelenen problemde küresel simetri söz konusu olduğu için $\partial / \partial \theta = 0$ ve $\partial / \partial \varphi = 0$ 'dır, burada θ ve φ sırası ile kutup ve azimut açısıdır. Buna göre Denklem (4) yeniden düzenlenir.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

Burada $c_L = \sqrt{E/\rho}$, boyuna dalga hızıdır. Çubuğun zamana göre davranışının $e^{i\omega t}$ şeklinde harmonik olduğu varsayılırsa, $u(r;t) = U(r)e^{i\omega t}$ ve $\tilde{N}(r;t) = N(r)e^{i\omega t}$ ilişkileri yazılabilir. Burada ω açısal frekans, $i = \sqrt{-1}$ 'dir. Bu ilişkiler kullanılarak Denklem (5), zamana göre ayrıştırılmış olur. Sadece uzaysal koordinatlara bağlı olan Denklem (6) aşağıda verilmiştir.

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + 2r \frac{dU}{dr} + (kr)^2 U = 0 \quad (6)$$

Burada $k = \omega / c_L$ boyuna dalga sayısı ve karşımıza çıkan bu denklem, sıfıncı mertebeden küresel Bessel diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$U(r) = A j_0(kr) + B n_0(kr), \quad r > 0 \quad (7)$$

kesik konik çubuk için Denklem (7)'deki gibi elde edilir [31]. Burada $j_0(kr)$ ve $n_0(kr)$ sırası ile sıfıncı mertebeden Bessel ve Neuman fonksiyonudur. A ve B ise entegrasyon sabitidir. Bu fonksiyonlar ayrıca

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad n_0(kr) = -\frac{\cos(kr)}{kr} \quad (8)$$

Denklem (8)'deki gibi de ifade edilebilir. Bu durumda alternatif bir çözüm

$$U(r) = A \frac{\sin(kr)}{kr} - B \frac{\cos(kr)}{kr} \quad r > 0 \quad (9)$$

Denklem (9)'da görülmektedir. Bu çözüm (O, z) koordinat takımında ifade edilmek istenirse (O', r) koordinat takımından dönüşüm yapılır.

$$U_1(z) = \frac{1}{r_0 + z} [C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz)], \quad 0 \leq z \leq L/2 \quad (10)$$

Böylece konik çubuğun 1'inci bölgesinde geçerli yerdeğiştirme elde edilmiş olur (Denklem (10)). Burada C_1 ve C_2 farklı sabitler olup, problemin sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenir. Konik çubuğun $z = 0$ noktasındaki kesiti A_0 ise, 1'inci bölgede herhangi bir z noktasındaki en kesit alanı $A_1(z) = A_0 [1 + (z/r_0)]^2$ şeklinde değişmektedir. Denklem (2)'deki bünye bağıntısı kullanılarak

$$N_1(z) = EA_1(z) \left\{ -(r_0 + z)^{-2} [C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz)] + k(r_0 + z)^{-1} [C_1 \cos(kz) - C_2 \sin(kz)] \right\} \quad (11)$$

eksenel normal kuvvet elde edilmiş olur (Denklem (11)). Şimdi çubuğun 2'inci bölgesinde geçerli yerdeğiştirmeyi elde edelim, bu bölgede koniklik negatif eğimlidir (Bk. Şekil 2). Bu durumda 2'nci bölgede (O, z) koordinat takımında geçerli yerdeğiştirme,

$$U_2(z) = \frac{1}{(r_0 + L) - z} [D_1 \sin(kz) + D_2 \cos(kz)], \quad L/2 \leq z \leq L \quad (12)$$

Denklem (12)'de verilmiştir. Burada D_1 ve D_2 , 2'nci bölgedeki entegrasyon sabitleridir. Konik çubuğun $z = L/2$ noktasındaki kesiti A_m ise, 2'nci bölgede herhangi bir z noktasındaki en kesit alanı $A_2(z) = A_u \{1 - [z/(r_0 + L)]\}^2$ şeklinde değişmektedir. Çubuğun simetrik geometrisi sonucu $A_u = (a_u)^2 = (2a_m - a_0)^2$ yazılır. Bünye bağıntısından elde edilen bu bölgedeki aksenal normal kuvvet aşağıda verilmiştir (Denklem (13)).

$$N_2(z) = EA_2(z) \left\{ ((r_0 + L) - z)^{-2} [D_1 \sin(kz) + D_2 \cos(kz)] + k((r_0 + L) - z)^{-1} [D_1 \cos(kz) - D_2 \sin(kz)] \right\} \quad (13)$$

2.2 Alan ve Toplam Taşıma Matrisinin İnşası

Bu kısımda konik çubuğun 1'inci ve 2'nci bölgesi için alan taşıma matrisleri türetilcek sonra tüm çubuğu temsilen toplam taşıma matrisi elde edilecektir. Alan taşıma matrisleri türetilirken eleman

uçlarında yazılan durum vektörleri arasındaki ilişkilerden yararlanılacaktır. Denklem (10) ve Denklem (11) matris formunda Denklem (14)'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{B}_1(z)\mathbf{C} \quad (14)$$

Burada geçen $\mathbf{B}_1(z)$ matrisinin açık hali aşağıda Denklem (15)'de verilmiştir.

$$\mathbf{B}_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(kz)}{r_0 + z} & \frac{\cos(kz)}{r_0 + z} \\ -\frac{EA_1(z)\sin(kz)}{(r_0 + z)^2} + \frac{EA_1(z)k\cos(kz)}{r_0 + z} & -\frac{EA_1(z)\cos(kz)}{(r_0 + z)^2} - \frac{EA_1(z)k\sin(kz)}{r_0 + z} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Şimdi 1'inci çubuk parçasının uçlarında durum vektörlerini tanımlayalım (Bk. Şekil 2). 1'inci çubuk parçasının sol ucunda $z = z_0 = 0$ 'da tanımlı durum vektörü $\mathbf{f}(z_0) = \mathbf{B}_1(z_0)\mathbf{C}$ ve sağ ucunda $z = z_1 = L/2$ 'de tanımlı durum vektörü $\mathbf{f}(z_1) = \mathbf{B}_1(z_1)\mathbf{C}$ 'dir.

Her iki uç arasındaki durum vektörü arasındaki ilişki, katsayılar vektörü yok edilirse

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_1) &= \mathbf{B}_1(z_1)\mathbf{B}_1^{-1}(z_0)\mathbf{f}(z_0) \\ &= \mathbf{T}_1(z_1, z_0)\mathbf{f}(z_0) \end{aligned} \quad (16)$$

Denklem (16)'daki gibi elde edilir. Burada $\mathbf{T}_1(z_1, z_0) = \mathbf{B}_1(z_1)\mathbf{B}_1^{-1}(z_0)$ 1'inci alan taşıma matrisidir.

Benzer şekilde Şimdi 2'nci çubuk parçasının uçlarında durum vektörlerini tanımlayalım (Bk. Şekil 2). 2'nci çubuk parçasının sol ucunda $z = z_1 = L/2$ 'de tanımlı durum vektörü $\mathbf{f}(z_1) = \mathbf{B}_2(z_1)\mathbf{D}$ ve sağ ucunda $z = z_2 = L$ 'de tanımlı durum vektörü $\mathbf{f}(z_2) = \mathbf{B}_2(z_2)\mathbf{D}$ 'dir.

Her iki uç arasındaki durum vektörü arasındaki ilişki, katsayılar vektörü yok edilirse

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_2) &= \mathbf{B}_2(z_2)\mathbf{B}_2^{-1}(z_1)\mathbf{f}(z_1) \\ &= \mathbf{T}_2(z_2, z_1)\mathbf{f}(z_1) \end{aligned} \quad (17)$$

Denklem (17)'daki gibi elde edilir. Burada $\mathbf{T}_2(z_2, z_1) = \mathbf{B}_2(z_2)\mathbf{B}_2^{-1}(z_1)$ 2'nci alan taşıma matrisidir.

Her iki parça üzerinde yazılan alan taşıma matrisleri ve durum vektörleri ilişkileri kullanılarak simetrik çubuğun sol ve sağ uç durum vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_2) &= \mathbf{T}_2(z_2, z_1)\mathbf{f}(z_1) \\ &= \mathbf{T}_2(z_2, z_1)\mathbf{T}_1(z_1, z_0)\mathbf{f}(z_0) \\ &= \mathbf{T}(z_2, z_0)\mathbf{f}(z_0) \end{aligned} \quad (18)$$

Denklem (18)'deki gibi kurulur. Burada $\mathbf{T}(z_2, z_0)$ çubuğun bütünü için geçerli toplam taşıma matrisidir.

Toplam taşıma matrisi, incelenen probleme göre titreşim özelliklerini belirlemekte, frekans ve mod şekillerini hesaplamakta kullanılabilir. Bu çalışmada örnek olarak her iki ucun sabit mesnetli olmasına ait sınır koşulları kullanılmıştır. Bu duruma karşılık gelen sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilir (Denklem (19)).

$$U(z=0) = 0, \quad U(z=L) = 0 \quad (19)$$

Denklem (19)'da verilen bu koşullar Denklem (18)'de yerine koyulursa

$$U(L) = \mathbf{T}_{11}(L,0)U(0) + \mathbf{T}_{12}(L,0)N(0) \quad (20)$$

Denklem (20) elde edilir. $N(0) \neq 0$ olduğuna göre aşikâr çözümden farklı çözümlere ancak

$$\mathbf{T}_{12}(L,0) = 0 \quad (21)$$

Denklem (21) ile ulaşılır. Serbest titreşim frekansları Denklem (21)'den hesaplanabilir. Elde edilen her bir frekansa karşılık gelen mod şekilleri C_1, C_2, D_1, D_2 entegral sabitlerinin belirlenmesi ile hesaplanır. Sabitlerin belirlenmesi, birinin keyfi olarak (örneğin $C_1 = 1$) seçilmesi ve diğer sabitlerin, seçilen sabit cinsinden sınır koşullarını sağlayacak şekilde hesaplanması ile olur.

3. Bulgular

Bu bölümde yukarıda teorisi verilen yol izlenerek, açıklık ortasına göre simetrik çifte konik bir çubukta aksenal serbest titreşimlere ait doğal frekanslar ve mod şekilleri için sayısal sonuçlar verilecektir. Çubuk geometrisine ait seçilen büyüklükler; L çubuk boyu, c_L boyuna dalga hızı, ω doğal frekans olmak üzere, boyutsuz frekans

$$\Omega_i = \omega_i L / c_L \quad (22)$$

Denklem (22) ile hesaplanır. Çubuğun başlangıç noktasındaki kesitinin kenar uzunluğu $a_0 = L/10$ alınmıştır. Açıklık ortasındaki kesitinin kenar uzunluğu koniklik oranına bağlı bulunur. Çubuk geometrisinden, pozitif eğimli kısımda koniklik oranı $\alpha_1 = 1/r_0 = 2(a_m - a_0)/a_0 L$, negatif eğimli kısımda $\alpha_2 = 1/(r_0 + L) = 2(a_m - a_0)/a_u L$ şeklinde hesaplanır. Kiriş parçasının uzunluğu $L = 1$ m ve malzeme özellikleri $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $E = 32 \text{ GPa}$ ve Poisson oranı $\nu = 0.2$ olarak seçilmiştir.

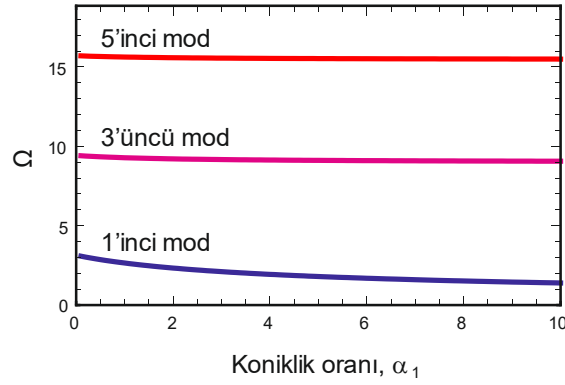
Seçilen geometrik ve malzeme özellikleri kullanılarak çubuğun aksenal titreşimleri Denklem (21) ile hesaplanmıştır. Toplam taşıma matrisi bütün çubuk için yazılıp sınır koşulları uygulandıktan sonra Denklem (21) ile serbest titreşim denkleminde ulaşılmıştır. Bu denklem aşkın bir denklem olup bu denklemin kökleri ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak bulunur. Bulunan köklerin en küçüğü 1'inci doğal titreşim frekansıdır. Bu sonuçlar üzerinde Denklem (22) ile boyutsuzlaştırma yapılarak koniklik oranına bağlı elde edilen boyutsuz doğal frekanslar Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1'de koniklik oranı değiştikçe simetrik modlarda (1,3,5,...) mod sayısına bağlı olarak boyutsuz frekansların prizmatik çubuğa göre azaldığı görülmektedir. Asimetrik modlarda ise frekanslar prizmatik çubuk ile aynıdır.

Tablo 1. Koniklik oranına göre boyutsuz doğal frekanslar

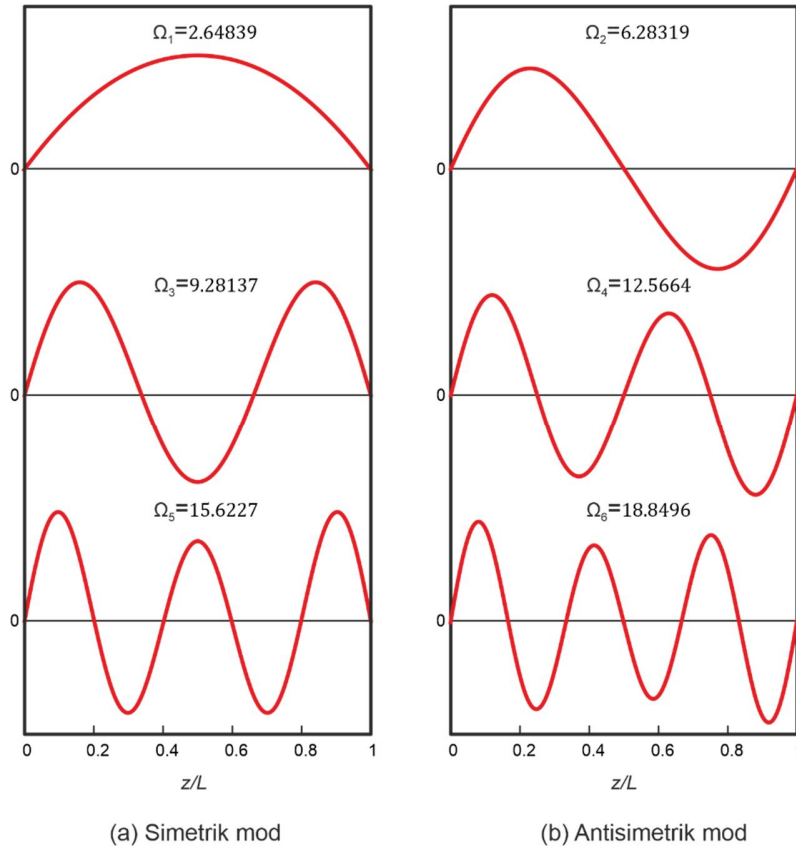
Mod sayısı, n	$\alpha_1 = 0.25$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 4$	Prizmatik çubuk
1	2.99339	2.64839	1.93481	3.14159
2	6.28319	6.28319	6.28319	6.28319
3	9.37739	9.28137	9.13490	9.42478
4	12.56637	12.56637	12.56637	12.56637
5	15.67962	15.62267	15.53675	15.70796
6	18.84956	18.84956	18.84956	18.84956

Simetrik modlardaki frekans değişimlerine koniklik oranının etkisi Şekil 3'de sunulmuştur. İlk mod için frekansların koniklik oranından çok fazla etkilendiği ama 3'üncü ve 5'inci mod için fazla etkilenmediği görülmektedir. Çubuk 1'inci modda titreşirken düğüm noktası gözlenmez, 2'nci modla beraber hareketin olmadığı bir düğüm noktası oluşur. 1'inci modun dışında her zaman $n-1$ tane düğüm noktası oluşur. Konikliğin etkisi ile düğüm noktaları prizmatik çubuğa göre enkesitin kalınlaştığı tarafa hareket eder [32]. Yüksek modlara çıkıldıkça düğüm noktalarının sayısı artar ve bu hareket kısıtlanmaya başlar böylece koniklikten etkilenmenin daha da azalacağı söylenebilir. Ayrıca koniklik oranının belli bir değerden sonra frekanslar üzerindeki etkisinin kaybolduğu ve bir asimptotik değere yaklaştığı Şekil 3'de görülmektedir.



Şekil 3. Simetrik mod frekanslarının koniklik oranına göre değişimi

Seçilen bir koniklik oranı örneğin $\alpha_1 = 1$ için hesaplanan boyutsuz frekanslara karşılık gelen mod şekilleri Şekil 4'de görülmektedir.



Şekil 4. $\alpha_1 = 1$ koniklik oranı için a) Simetrik ve b) antisimetrik mod şekilleri

4. Sonuçlar

Bu çalışmada açıklık ortasına göre simetrik değişken kesitli bir çubuğun aksenal titreşimleri incelenmiştir. Değişken kesit çiftli simetriye sahip alınarak kapalı çözüm elde edilmiştir. İki ucu basit mesnetli simetrik çubuk için toplam taşıma matrisi üzerinden titreşim denklemi bulunmuş ve serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar maddeler halinde aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Konik bir çubuğun doğal frekanslarının ve mod şekillerinin, koniklik oranından etkilendiği görülmüştür.
- Değiştirilen koniklik oranı sadece simetrik mod ve frekanslar üzerinde bir etkiye sahiptir.
- Koniklik oranı arttıkça simetrik modların frekansları azalır ve sabit bir değere yaklaşır.
- Koniklik oranının frekanslar üzerindeki etkisi yüksek modlarda kaybolmaktadır.

Çalışmadaki yöntem simetrik ya da simetrik olmayan koniklik oranı çubuk boyunca bölgeden bölgeye değişen çoklu konikliğe sahip çubuklara genişletilebilir. Önerilen yöntem ile elde edilen sonuçlar kesin olduğu için sayısal yöntemlerle elde edilen sonuçların doğrulanmasında kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Elishakoff, I., Eigenvalues of inhomogeneous structures: Unusual closed-form solutions, CRC Press, Boca Raton, Fla., 2005.
- [2] Balduzzi, G., Aminbaghai, M., Sacco, E., Füssl, J., Eberhardsteiner, J., and Auricchio, F., Non-prismatic beams: A simple and effective Timoshenko-like model, International Journal of Solids and Structures, 90, ss. 236–250, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.02.017>.
- [3] Vilar, M., Hadjiloizi, D. A., Masjedi, P. K., and Weaver, P. M., Stress analysis of generally asymmetric non-prismatic beams subject to arbitrary loads, European Journal of Mechanics - A/Solids, 90, s. 104284, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104284>.
- [4] Andrade, A. and Camotim, D., Lateral–Torsional Buckling of Singly Symmetric Tapered Beams: Theory and Applications, Journal of Engineering Mechanics, 131, ss. 586–597, 2005. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2005\)131:6\(586\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:6(586)).
- [5] Demir, E., Çallioğlu, H., and Sayer, M., Vibration analysis of sandwich beams with variable cross section on variable Winkler elastic foundation, Science and Engineering of Composite Materials, 20, ss. 359–370, 2013. <https://doi.org/10.1515/secm-2012-0151>.



- [6] Soltani, M., Atoufi, F., Mohri, F., Dimitri, R., and Tornabene, F., Nonlocal Analysis of the Flexural-Torsional Stability for FG Tapered Thin-Walled Beam-Columns, *Nanomaterials* (Basel, Switzerland), 11, 2021. <https://doi.org/10.3390/nano11081936>.
- [7] Zhang, B.-H., Guo, Y.-L., and Dou, C., Ultimate bearing capacity of asymmetrically double tapered steel columns with tubular cross-section, *Journal of Constructional Steel Research*, 89, ss. 52–62, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2013.06.010>.
- [8] Alkloub, A., Allouzi, R., and Naghawi, H., Numerical Nonlinear Buckling Analysis of Tapered Slender Reinforced Concrete Columns, *International Journal of Civil Engineering*, 17, ss. 1227–1240, 2019. <https://doi.org/10.1007/s40999-019-00395-5>.
- [9] Ozgumus, O. O. and Kaya, M. O., Flapwise bending vibration analysis of double tapered rotating Euler–Bernoulli beam by using the differential transform method, *Meccanica*, 41, ss. 661–670, 2006. <https://doi.org/10.1007/s11012-006-9012-z>.
- [10] Banerjee, J. R. and Williams, F. W., Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, ss. 2289–2302, 1985. <https://doi.org/10.1002/nme.1620211212>.
- [11] Gupta, A. K., Vibration of Tapered Beams, *Journal of Structural Engineering*, 111, ss. 19–36, 1985. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1985\)111:1\(19\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1985)111:1(19)).
- [12] Lee, S. Y., Ke, H. Y., and Kuo, Y. H., Analysis of non-uniform beam vibration, *Journal of Sound and Vibration*, 142, ss. 15–29, 1990. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90580-S](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90580-S).
- [13] Rosa, M. A. de and Auciello, N. M., Free vibrations of tapered beams with flexible ends, *Computers & Structures*, 60, ss. 197–202, 1996. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00397-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00397-5).
- [14] Hsu, J.-C., Lai, H.-Y., and Chen, C. K., Free vibration of non-uniform Euler–Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method, *Journal of Sound and Vibration*, 318, ss. 965–981, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.05.010>.
- [15] Banerjee, J. R., Su, H., and Jackson, D. R., Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method, *Journal of Sound and Vibration*, 298, ss. 1034–1054, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.040>.
- [16] Ece, M. C., Aydogdu, M., and Taskin, V., Vibration of a variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications*, 34, ss. 78–84, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2006.06.005>.
- [17] Lee, J. W. and Lee, J. Y., Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam, *Computers & Structures*, 164, ss. 75–82, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.11.007>.



- [18] Banerjee, J. R. and Ananthapuvirajah, A., Free flexural vibration of tapered beams, *Computers & Structures*, 224, s. 106106, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.106106>.
- [19] Çalım, F. F., Değişken Kesitli Timoshenko Kirişinin Serbest Titreşim Analizi, *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 6, ss. 76–82, 2017. <https://doi.org/10.28948/ngumuh.297736>.
- [20] Magnucki, K., Magnucka-Blandzi, E., Milecki, S., Goliwaş, D., and Wittenbeck, L., Free flexural vibrations of homogeneous beams with symmetrically variable depths, *Acta Mechanica*, 232, ss. 4309–4324, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03053-x>.
- [21] Abrate, S., Vibration of non-uniform rods and beams, *Journal of Sound and Vibration*, 185, ss. 703–716, 1995. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0410>.
- [22] LI, Q. S., Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods, *Applied Acoustics*, 60, ss. 13–28, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(99\)00048-1](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(99)00048-1).
- [23] LI, Q. S., Exact solutions for free longitudinal vibrations of non-uniform rods, *Journal of Sound and Vibration*, 234, ss. 1–19, 2000. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2856>.
- [24] Raj, A. and Sujith, R. I., Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods, *Journal of Sound and Vibration*, 283, ss. 1015–1030, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.003>.
- [25] Guo, S. and Yang, S., Free longitudinal vibrations of non-uniform rods, *Science China Technological Sciences*, 54, ss. 2735–2745, 2011. <https://doi.org/10.1007/s11431-011-4534-6>.
- [26] Yardimoglu, B. and Aydin, L., Exact longitudinal vibration characteristics of rods with variable cross-sections, *Shock and Vibration*, 18, ss. 555–562, 2011. <https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0561>.
- [27] Gan, C., Wei, Y., and Yang, S., Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 333, ss. 434–445, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.09.010>.
- [28] Pillutla, S. H., Gopinathan, S., and Yerikalapudy, V. R., Free longitudinal vibrations of functionally graded tapered axial bars by pseudospectral method, *Journal of Vibroengineering*, 20, ss. 2137–2150, 2018. <https://doi.org/10.21595/jve.2018.19373>.
- [29] Todorovska, M. I., Girmay, E. A., Wang, F., and Rahmani, M., Wave propagation in a doubly tapered shear beam: Model and application to a pyramid-shaped skyscraper, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 51, ss. 764–792, 2022. <https://doi.org/10.1002/eqe.3590>.



[30] Šalinić, S., Obradović, A., and Tomović, A., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams, *Composites Part B: Engineering*, 150, ss. 135–143, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.05.060>.

[31] Abramowitz, M., and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* / edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Dover Publications, New York, 1970.

[32] Balachandran, B., and Magrab, E. B., *Vibrations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.