

Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Model için Parametre ve Model Yapısı Optimizasyonu

Serkan TAŞTAN*

Geliş Tarihi (Received): 16.10.2022– Kabul Tarihi (Accepted): 13.01.2023

Öz

Anlaşılması ve tahmin edilmesi kolay geleneksel gri modeller yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Ancak, bu modeller mevcut kestirim ve öngörü hassasiyeti artırılmak istenildiği zaman ihtiyaç duyulan uyarlamalar için gereken esneklikten yoksundurlar. Diğer taraftan, oldukça esnek olan doğrusal olmayan gri Bernoulli model tek parametresi ayarlanarak, birikim üretim operatörü uygulanmış zaman serisine uyan eğriyi etkin bir şekilde uydurulabilmektedir. Yine de, bu modelinin parametreleri ve yapısı çerçevesinde yapılabilecek iyileştirmeler mevcuttur. Bu yüzden, bu çalışmada doğrusal olmayan gri Bernoulli model için önerilen başlangıç koşulunu optimizasyonu, gri modellerin öngörü performanslarını yükseltmek adına önerilen kayan pencere yöntemi ve sezgisel algoritmalar ile model parametrelerinin optimizasyonu yaklaşımları bir arada kullanılmıştır. Doğrusal olmayan gri Bernoulli model kayan pencere yöntemine dayalı olarak tahmin edilmiştir. Diferansiyel denklemin çözümünde başlangıç koşulu olarak birinci dereceden birikim üretim operatörü uygulanmış serinin düzeltilmiş son elemanı kullanılmıştır. Geçmiş değer ve kuvvet katsayısının en iyi değerleri ise salp sürüsü optimizasyon algoritması kullanılarak bulunmuştur. Dolayısıyla, model yapısının ve parametrelerinin birlikte değerlendirildiği yeni bir optimize edilmiş doğrusal olmayan gri Bernoulli model önerilmiştir. Çalışmada, parametre tahmin yöntemi ve/veya model yapısı açısından birbirinden farklı sekiz gri model değerlendirilmiştir. Ulaşılan sonuçlar önerilen modelin diğer gri modellere göre daha başarılı olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, Türkiye'nin gayrisafi yurt içi hasıla hacim endeksi önerilen gri model ile daha iyi modellenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan gri Bernoulli model, Salp sürüsü algoritması, GSYH öngörüsü

Parameter and Model Structure Optimization for the Nonlinear Grey Bernoulli Model

Abstract

Traditional grey models, easy to understand and estimate, are widely used. However, these models lack the flexibility with regard to the adaptations required to increase the current prediction and forecast accuracy. However, the highly flexible non-linear grey Bernoulli model can effectively fit the curve for the accumulated generating operation series by adjusting its single parameter. Nevertheless, there are still improvements that can be made within the framework of the structure and parameters of this model. Therefore, in this study, initial condition optimization proposed for the non-linear grey Bernoulli model, the rolling window method proposed to improve the forecasting performance of the grey models and, optimization of the model parameters with heuristic algorithm combined. The non-linear grey Bernoulli model was estimated by using the rolling window method. The corrected last element of the accumulated generating operation series was used as the initial condition in the solution of the differential equation. The optimal values of the background value and power index were determined by using the salp swarm optimization algorithm. Therefore, a new optimized non-linear grey Bernoulli model is proposed by considering the structure and parameters of the model together. In the study, eight different grey models were evaluated in terms of parameter estimation method and/or model structure. The results showed that the proposed model outperformed the other grey models. Consequently, gross domestic product volume index of Turkey was better modeled with the proposed grey model.

Keywords: Non-linear grey Bernoulli model, Salp swarm algorithm, GDP forecast

* Doç. Dr., Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Yönetim Bilişim Sistemleri Bölümü, stastan@cumhuriyet.edu.tr, ORCID: 0000-0002-0889-9191

Giriş

Deng (1982) tarafından kısmen bilinen ve kısmen bilinmeyen bilgilere sahip belirsiz sistemlerin çözümü adına önerilen gri sistem teorisi bağlamında incelenen temel konulardan birisi gri öngörü modelidir. Bu model, sabit örnekleme frekansına sahip pozitif gözlemlerden oluşan zaman serilerinin (Kayacan, vd., 2010: 1785) basit hesaplamalar ile modellenmesi ve bu zaman serilerine ilişkin yüksek doğruluk seviyesinde öngörülere ulaşılması amacıyla özellikle gözlem sayısının az olduğu durumlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Birinci dereceden tek değişkenli GM(1,1) ve yine birinci dereceden N değişkenli GM(1,N) modelleri, hesaplama etkinlikleri ile karşılaştırıldığında çoğu zaman serisi için ulaşılan sonuçların yeterli düzeyde olması nedeniyle, uygulamada en çok yararlanılan gri öngörü modelleridir. Geleneksel gri modeller de diyebileceğimiz bu modeller, elde edilen kestirim ve öngörülere ilişkin makul bir başarımlık düzeyi hedeflendiğinde anlaşılması ve tahmin edilmesi kolay oldukları için tercih edilirler. Buna karşın, bu modeller mevcut kestirim ve öngörü hassasiyeti arttırılmak istenildiğinde, ihtiyaç duyulan uyarlamalar için gereken esneklikten yoksundurlar. Başka bir ifadeyle, geleneksel gri modeller yüksek hassasiyetin beklenemeyeceği kadar basittirler (Chen, vd., 2008: 1195). Bu düşünceden hareketle Chen, vd. (2008), n. dereceden kuvvete sahip doğrusal olmayan Bernoulli diferansiyel denkleme dayanan ve doğrusal olmayan gri Bernoulli model (NGBM(1,1)) olarak adlandırdıkları yeni bir gri modeli literatüre kazandırmışlardır. Oldukça esnek olan bu gri modelin parametresi n ayarlanarak, birinci dereceden birikim üretim operatörü uygulanmış seriye uyan eğri etkin bir şekilde uydurulabilmektedir. Bilindiği üzere birikim üretim operatörü ile zaman serisindeki rastsallığın veya düzensiz hareketlerin azaltılması ve söz konusu zaman serisinin monoton artan özellik kazanması amaçlanmaktadır (Tien, 2009: 1416). GM(1,1) modeli daima katlanarak artan ya da azalan seriler üretmektedir, bu nedenle rastsal, dalgalı ve doğrusal olmayan zaman serilerinin öngörüsünde etkin değildirler. Bu eksiklikleri gidermek adına NGBM(1,1) modeli kullanılabilir (Özcan ve Tüysüz, 2018: 174). NGBM(1,1) modeli güçlü uyarlanabilirlik özelliği ve dolayısıyla gözlenen düşük kestirim hataları sebebiyle az sayıda gözlem içeren doğrusal olmayan zaman serilerine yönelik yaygın uygulama alanına sahiptir (Cheng, vd., 2022: 2018).

Aslında, yukarıda sözü edilen geleneksel gri modellere ilişkin temel eleştiriler doğrultusunda geliştirilen; ayrık gri model (Xie ve Liu, 2009), kesirli birikim operatörünün kullanıldığı gri model (Wu, vd., 2013), Fourier serisi ya da Markov zinciri ile hata düzeltilmesi yapılan melez gri model (Hsu, 2003), mevsimsel gri modeller (Xia ve Wong, 2014; Wang, vd., 2018), farklı trigonometrik terimler ile geliştirilen gri modeller (Comert, vd., 2021)

bulunmaktadır. Ancak NGBM(1,1) modelinden farklı olarak bu modeller, genellikle tüm araştırmacıların kolayca anlayamayacağı ve uygulayamayacağı kadar karmaşık modelleme sũreçleri ihtiva etmektedirler (Chen, vd., 2008: 1195).

Yine de, NGBM(1,1) modelinin yapısı ve parametreleri çerçevesinde geliştirilmeye açık unsurları bulunmaktadır. Zhou, vd. (2009), NGBM(1,1) modelinin kuvvet katsayısını ve geçmiş değer katsayısını karar değişkenleri olarak belirleyip söz konusu katsayıların optimal değerlerini parçacık sürũ optimizasyonu algoritması ile belirlemişlerdir. Algoritmanın uygunluk fonksiyonu olarak öngörü hatası kullanılmıştır. Chen, vd. (2010), iktisattaki Nash dengesi kavramı yardımıyla NGBM(1,1) modelini geliştirmişlerdir. Ayarlanması gereken kuvvet üssũ ve geçmiş değer olmak üzere iki parametresi bulunan Nash NGBM(1,1) modeli ile öngörü doğruluğu artırılabilmiştir. Hsu (2010), optimal model parametresini belirlemeye yönelik problemi, öngörü hatasının uygunluk fonksiyonu olarak belirlendiği genetik algoritma ile ele almıştır. Pao, vd. (2012), kuvvet katsayısının en iyi değerini bulmak amacıyla bir nũmerik iteratif yöntem önermişlerdir. Öngörü hatasının enkũçũklenmesine dayanan yöntem de ilgili katsayının değerini, [-0,2, 0,2] aralığında 0,01 adım büyüklüğu dikkate alınarak araştırılmıştır. Chia-Nan ve Van-Thanh (2015), yüksek dalgalanmalar sergileyen zaman serilerinde NGBM(1,1) modelinin öngörü performansını yükseltmek için bu modelin tahmininden elde edilen hata değerlerine Fourier serisi düzeltmesi uygulamışlardır. Lu, vd. (2016), birikim üretim operatörü uygulanan serinin son gözlemini NGBM(1,1) modelinin başlangıç koşulu olarak seçmişler ve sınır değer düzeltme yöntemi ile başlangıç koşulunu optimize etmişlerdir. Dahası başlangıç koşulunu da içerecek şekilde yazdıkları optimizasyon modelini kullanarak gri modelin iki parametresinin en iyi değerlerini eşanlı olarak bulmuşlardır. Özcan ve Tũysüz (2018), NGBM(1,1) modelini tahmininde kayan pencere yönteminden ve genetik algoritmadan yararlanmışlardır. Pencere uzunluğu ile beraber gri modelin parametrelerini genetik algoritma ile aynı anda belirlemişlerdir. Wu, vd. (2019), NGBM(1,1) modelini kayan pencere yöntemi ile tahmin etmişlerdir. Başlangıç koşulunu birikim üretim operatörü uygulanan serinin son elemanı olarak belirleyerek, kuvvet katsayısı [-1, 0,99] aralığında, geçmiş değer katsayısı [0, 1] aralığında olmak üzere 0,01 adım büyüklüğu doğrultusunda parametrelerin değerlerini birlikte araştırılmışlardır. Ngo ve Hoang (2020), Wu, vd. (2019) tarafından uygulanan yaklaşımı kuvvet katsayısının değerini belirlerken kullanılan adım büyüklüğünü arttırmak ve Lu, vd. (2016) tarafından önerilen başlangıç koşulunu kullanmak noktasında geliştirmişlerdir. Jiang, vd. (2021), NGBM(1,1) modelinin beyazlaştırma denklemini doğrusal formũlasyona dönüştürerek elde ettikleri yeni modelin kuvvet katsayısının

en iyi değerini balina optimizasyon algoritmasını kullanarak belirlemişlerdir. Cheng, vd. (2022), NGBM(1,1) modelinin geçmiş değer katsayısının optimizasyonu ile kuvvet üssünün optimizasyonunu birleştirerek modelin parametre tahmin yöntemini geliştirmişlerdir. Geçmiş değerin, sırasıyla üstel eğri, çok terimli eğri ve interpolasyon fonksiyonu formunda olduğu durumları dikkate alan üç farklı parametre optimizasyon yöntemi önermişlerdir.

Bu alışma da ise, yeni bilgilerin kullanım önceliği ilkesine göre NGBM(1,1) modeli kayan pencere yöntemine dayalı olarak kurulmuştur. Diferansiyel denklemin çözümünde başlangıç koşulu olarak Lu, vd. (2016) tarafından önerilen birinci dereceden birikim üretim operatörü uygulanmış serinin düzeltilmiş son elemanı kullanılmıştır. Dahası, model parametreleri yani kuvvet katsayısı, geçmiş değer katsayısı ve pencere uzunluğu eşzamanlı olarak ele alınmıştır. Bu parametrelerin değerleri, arama uzayının sürekli olduğu optimizasyon problemlerinin çözümünde başarısı bilinen salp sürüsü optimizasyon algoritması yardımıyla ortalama mutlak yüzde hata kriteri enküçüklenerek belirlenmiştir. Dolayısıyla, model yapısının ve parametrelerinin birlikte değerlendirildiği yeni bir optimize edilmiş NGBM(1,1) modeli önerilmiştir. Elde edilen sonuçlar önerilen modelin; kayan pencere yönteminin kullanımı, başlangıç koşulu optimizasyonu ve model parametrelerinin optimizasyonu yaklaşımlarının hiç uygulanmadığı, ayrı ayrı uygulandığı ya da ikisinin birlikte uygulandığı gri modellere göre daha başarılı olduğunu göstermiştir.

1. Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Model

NGBM(1,1) modeli tahmin edilirken izlenen süreç řu şekilde özetlenebilir (Chen, vd., 2008; Ngo ve Hoang, 2020; Wu, vd., 2019); İlk aşamada, m negatif değer almayan gözlemden oluşan $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(m)\}$ zaman serisine takip eden eşitlikte tanımlanan birinci dereceden birikim üretim operatörü,

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

uygulandıktan sonra $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(m)\}$ serisi elde edilir.

Sonraki aşamada, NGBM(1,1) modelinin temel gri diferansiyel denklemi yazılır:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b [x^{(1)}(k)]^n \quad (2)$$

Burada, λ $[0, 1]$ aralığında olmak üzere $z^{(1)}(k) = \lambda x^{(1)}(k) + (1 - \lambda)x^{(1)}(k - 1)$ şeklinde hesaplanır. Geleneksel modelleme yaklaşımında geçmiş değer katsayısı λ için 0,5 değeri kullanılır. Eşitlikte yer alan kuvvet katsayısı n ise $n=1$ dışında her hangi bir reel sayıdır. Burada, $n = 0$ olması durumunda geleneksel gri model GM(1,1) için temel denklem elde edilirken, $n = 2$ durumunda Gri-Verhulst modelinin temel denklemine ulaşır. NGBM(1,1) modelinin parametreleri a ve b , aşağıdaki matris tanımlamaları

$$Y_N = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(m) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & [z^{(1)}(2)]^n \\ -z^{(1)}(3) & [z^{(1)}(3)]^n \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(m) & [z^{(1)}(m)]^n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ile en küçük kareler yöntemi aracılığıyla tahmin edilir:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \quad (4)$$

Modelleme sürecinin devamında, Eşitlik (2)'nin belirli çözümü ya da ayrık zaman tepki fonksiyonu yazılır:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left[\left(x^{(0)}(1)^{(1-n)} - \frac{b}{a} \right) e^{-a(1-n)(k-1)} + \frac{b}{a} \right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad n \neq 1, k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Sürecin son aşamasında bu fonksiyon kullanılarak elde edilen seriye, tersine birikim üretim operatörü uygulanması suretiyle zaman serisinin k noktasındaki gözlemi için kestirim değeri hesaplanır:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k - 1) \quad (6)$$

Bu noktaya kadar açıklanan NGBM(1,1) modelinde, Eşitlik (5) yazılırken başlangıç koşulu zaman serisinin ilk gözlemi olan $x^{(0)}(1)$ olarak belirlenmiştir. Bu durum, öngörü modelinde ilk gözlem dışında kalan diğer tüm bilginin tam olarak kullanılmaması anlamına gelecektir (Wu, vd., 2019: 5). Lu, vd. (2016), birinci dereceden birikim üretim operatörü uygulanmış serinin son elemanının yani $x^{(1)}(m)$ değerinin sınır değer düzeltme yöntemi ile düzeltilerek başlangıç koşulu olarak belirlenmesinin modelin performansını arttırdığı göstermişlerdir. Bu nedenle Eşitlik (5) yerine,

$$E(k) = e^{-a(k-m)(1-n)}, \quad (7)$$

$$A(k) = (x^{(1)}(k))^{1-n} - \frac{b}{a}(1 - E(k))$$

olmak üzere takip eden eşitliğin kullanılmasını önermişlerdir:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left[\left(\frac{\sum_{k=1}^m A(k)E(k)}{\sum_{k=1}^m E(k)^2} - \frac{b}{a} \right) e^{-a(1-n)(k-m)} + \frac{b}{a} \right]^{\frac{1}{1-n}}, n \neq 1, k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Ayrıca bu çalışmada, NGBM(1,1) gri modelinin kestirim ve öngörü performanslarını arttırmak amacıyla model tahmin sürecinin zaman serisine ilişkin sadece belirli sayıda veri üzerinden gerçekleştirildiği kayan pencere yönteminden faydalanılmıştır. Bu yöntemde tahmin süreci daima güncel veriler üzerinden adım adım ele alınmaktadır. Her adımda pencere uzunluğu (p) kadar veri kullanılarak bir sonraki verinin kestirim ya da öngörü değeri hesaplanmaktadır. Bir önceki adımın en eski verisi bir sonraki adımda dikkate alınmaz iken yine bir önceki adımda kestirim veya öngörü değeri bulunan veri mevcut adımda tahmin sürecine dahil edilmektedir. Daima p tane gözlem model tahmininde kullanılacak şekilde, zaman serisi için tüm kestirimler elde edilinceye ya da istenilen sayıda öngörü değeri hesaplanıncaya kadar söz konusu işlem yinelenmektedir.

Tahmin edilen gri modellerin kestirim ve öngörü başarımı kök ortalama hata (RMSE) ve ortalama mutlak yüzde hata (MAPE) kriterleri üzerinden değerlendirilir. Takip eden eşitlikler yardımıyla gri modeller için hesaplan RMSE ve MAPE kriterlerinin daha düşük değerini veren model daha iyidir.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k))^2} \quad (9)$$

$$MAPE = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| 100 \quad (10)$$

2. Salp Sürüsü Algoritması

Mirjalili, vd. (2017) tarafından geliştirilen salp sürüsü algoritması, okyanusların derinliklerinde yaşayan salpların besin arama ve toplu gezinme davranışlarının modellendiği bir meta-sezgisel algoritmadır. Lider salp, salp sürüsünün diğer bir deyişle salp zincirin önünde yer alıp sürüyü yönlendirir. Diğer salplar ise takipçilerdir, bu gruptakiler birbirlerini takip

ettikleri gibi doğrudan ya da dolaylı olarak lideri izlerler. Buna göre salp zincirinin benzetiminde kullanılan ilk eşitlik lider salpın pozisyonunun güncellendiği aşağıdaki eşitliktir:

$$x_j^1 = \begin{cases} F_j - c_1 ((ub_j - lb_j)c_2 + lb_j) & c_3 < 0,5 \\ F_j + c_1 ((ub_j - lb_j)c_2 + lb_j) & c_3 \geq 0,5 \end{cases} \quad (11)$$

Burada j . boyuttaki liderin pozisyonu x_j^1 iken F_j besin kaynağının pozisyonudur. Eşitlik (11)'de, lb_j ve ub_j sırasıyla j . boyuttaki alt sınır ile üst sınırken, hem c_2 hem de c_3 $[0, 1]$ aralığında rastsal sayılardır. Eşitlikteki son parametre c_1 ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$c_1 = 2e^{\left(\frac{-4l}{L}\right)^2} \quad (12)$$

Eşitlikte, l ve L sırasıyla mevcut ve maksimum iterasyon sayısıdır. Algoritmada son olarak takipçi salpların pozisyonlarını güncellemek adına, x_j^i , $i \geq 2$ için i . takipçinin j . boyuttaki pozisyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlik kullanılır:

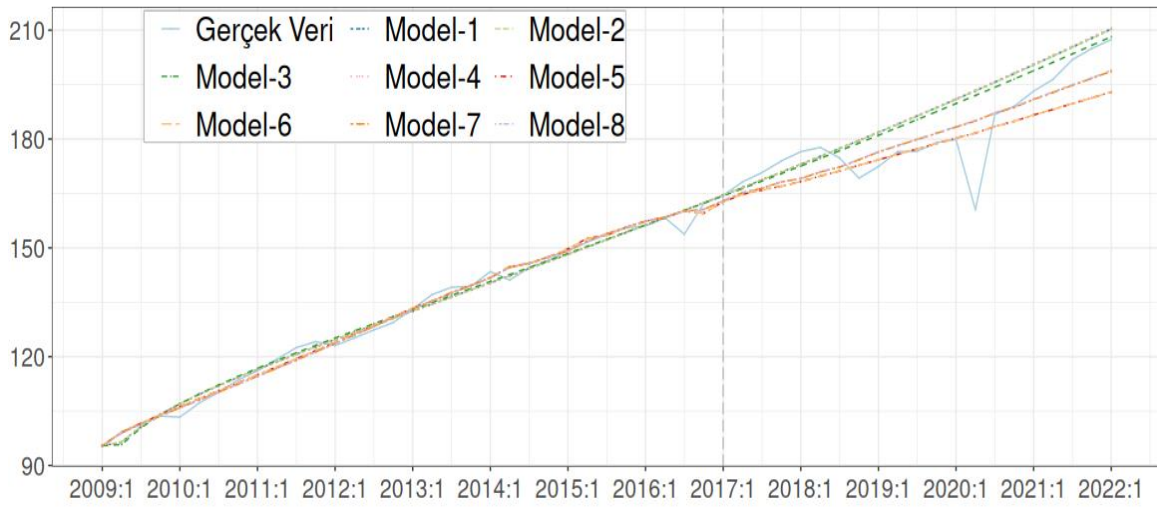
$$x_j^i = \frac{1}{2}(x_j^i + x_j^{i-1}) \quad (13)$$

Salp sürüsü algoritmasında, yukarıda verilen eşitlikler kullanılarak salpların pozisyonları iterasyonlar boyunca alt ve üst sınırlar dikkate alınarak belirli pozisyonlara doğru sürekli güncellenir (Rizk-Allah, vd., 2019: 1643). Aljarah, vd. (2018) popülasyondaki salpların yarısının lider olarak belirlenip Eşitlik (11)'in bu doğrultuda uygulanmasının, bir lider salp bulunduğu duruma göre algoritmanın performansını artırdığı göstermişlerdir. Çalışmada bu yaklaşım benimsenerek, salp sürüsü algoritması ile NGBM(1,1) modelinin iki parametresinin optimal değeri araştırılmıştır. Modelinin kuvvet katsayısı $[-1, 1]$ aralığında ve geçmiş değer katsayısı $[0, 1]$ aralığında değerler alacak şekilde, optimizasyon süreci Eşitlik (10)'da verilen MAPE kriteri uygunluk fonksiyonu olarak belirlenerek işletilmiştir.

3. Bulgular

Önerilen gri modelin ve çalışma kapsamında ele alınan diğer gri modellerin performanslarını karşılaştırmak adına, önemli bir makroekonomik gösterge olan Türkiye'nin mevsim ve takvim etkisinden arındırılmış zincirlenmiş gayrisafi yurt içi hasıla (GSYH) hacim endeksi kullanılmıştır. 2009:1 ve 2022:1 dönemine ait üçer aylık veriler Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) internet sitesinden alınmıştır. Zaman serisinin 2009:1 ile 2016:4 dönemini

kapsayan sekiz yıllık, 32 gözlemden oluşan kısmi eğitim verisi olarak modellerin tahmininde ve modelleme yeteneklerinin değerlendirilmesinde kullanılmıştır. 2017:1 ve 2022:1 dönemini içeren altı yıllık, 21 gözlemden oluşan kısım test verisi olarak ayrılıp modellerin öngörü başarımlarını belirlemek amacıyla kullanılmıştır. Şekil 1’de 2009:1-2022:1 dönemi için zincirlenmiş GSYH hacim endeksi ile tahmin edilen modellerden elde edilen kestirim ve öngörü değerleri görülmektedir. Şekil 1’de de görüldüğü üzere, ilgili zaman serisi özellikle öngörü döneminde önemli dalgalanmalar ve kırılmalar içermektedir. Bu durum, her ne kadar kullanılan modeller güçlü uyarlanabilirlik özelliğine sahip olsalar da modellerin öngörü performanslarını olumsuz etkilemiştir.



Şekil 1: Gerçek veri ile gri modellerin kestirim ve öngörülleri

Çalışmada, model yapısı ve/veya parametre tahmin yöntemi açısından birbirinden farklı sekiz gri model değerlendirilmiştir. Model-1 geleneksel NGBM(1,1) gri modelken, Model-2 bu modelin başlangıç koşulunun Lu, vd. (2016) tarafından önerilen yöntem kullanılarak düzeltilmesi ile oluşturulmuştur. Diğer bir ifadeyle, Model-2 tahmin edilirken Eşitlik (8) kullanılmıştır. Her iki modelin geçmiş değer katsayısı (λ), geleneksel modele uygun olarak 0,5’dir. Bu modellerin kuvvet katsayıları (n) ise $[-1, 0,999]$ aralığında 0,001 adım büyüklüğü ile ızgara araması gerçekleştirilerek bulunmuştur. Model-3 ve Model-4, sırasıyla Model-1 ve Model-2’nin hem λ hem de n parametrelerinin salp sürüsü algoritması ile optimize edilmesi yoluyla elde edilmiştir. Bu modeller tek seferde tüm eğitim verisi kullanılarak tahmin edilmiştir. Bu dört modele kayan pencere yöntemi uygulanarak sırasıyla Model-5, Model-6, Model-7 ve Model-8 tahmin edilmiştir. Kayan pencere yöntemi ile model tahmininde; pencere uzunluğu (p) için alt sınır gri modellerin tahmini için gerekli olan en az gözlem sayısından hareketle 4, üst sınır eğitim verisinin gözlem sayısı yani 32 olarak belirlenmiştir. Salp sürüsü

algoritmasında tüm modeller için popülasyon büyüklüğü 30 ve maksimum iterasyon sayısı 500 olarak seçilmiştir. Tüm modellerin parametre tahminlerinde eğitim verisi üzerinden hesaplanan MAPE değeri amaç fonksiyonu olarak kullanılmıştır. Bu bağlamda tahmin edilen modellerin parametreleri Tablo 1’de verilmiştir. Model-1 ve Model-2 için tahmin edilen kuvvet katsayıları aynıdır. Bu modeller ile kıyaslandığında, model parametrelerinin birlikte optimize edildiği Model-3 için bulunan kuvvet katsayısı daha büyük iken geçmiş değer katsayısı daha küçüktür. Başlangıç koşulu optimizasyonu ve parametre optimizasyonu birlikte uygulandığı Model-4 için elde edilen parametre tahminleri ise Model-1 ve Model-2’nin parametre değerlerine yakındır. Bu dört modele kayan pencere yöntemi uygulandığında, tüm modeller için en uygun pencere uzunluğu 16 olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla, model tahminlerinde her adımda son dört yılın verilerinin kullanılmasının zaman serisine uygun modelinin belirlenmesi noktasında daha faydalı olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca, Model-5 ve Model-6 için her adımda tahmin edilen kuvvet katsayıları birbirlerine oldukça yakın değerler almıştır. Diğer taraftan, Model-7 ve Model-8’in her adımda salp sürüsü algoritması ile eşzamanlı olarak en iyi değerleri belirlenen kuvvet katsayıları ve geçmiş değer katsayılarının, bulunan değerleri arasında ise önemli farklılıklar görülmektedir.

Modellere ait kestirimlerin doğruluk dereceleri Tablo 2’de sunulmuştur. Tablo 2 incelendiğinde tüm modellerin, MAPE değerlerinin %10 eşik değerinden daha küçük olması nedeniyle yüksek doğrulukta kestirimler sağladığı yorumu yapılabilir. MAPE kriteri açısından Model-7 ve RMSE kriteri açısından Model-8 kestirim başarımı en iyi olan modellerdir. Her iki modelde, kayan pencere yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir. Söz konusu yöntemin uygulandığı modeller ile zaman serisi diğer modellere nazaran hem MAPE hem de RMSE kriterleri bağlamında daha iyi modellenmiştir. Aynı şekilde, salp sürüsü algoritması kullanılarak model parametrelerinin değerleri belirlendiğinde uyum iyiliği daha yüksek modeller tahmin edilmiştir. Ancak, sadece başlangıç koşulu optimizasyonunu uygulamanın geleneksel NGBM(1,1) modelin başarımı üzerinde anlamlı bir etkisi bulunmamaktadır. Diğer taraftan, bu yaklaşım kayan pencere yöntemiyle birlikte uygulandığında genel olarak model kestirim performansına olumlu katkı sağlamaktadır. Dolayısıyla, başlangıç koşulu optimizasyonunu tek başına uygulamanın yerine, parametre optimizasyonu ve kayan pencere yöntemi ile birlikte uygulamanın zaman serisinin daha etkin olarak modellenmesine olanak sağladığı görülmüştür. Bu sayede en iyi uyuma sahip modeller elde edilmiştir.

Tablo 1: Gri modellerin parametreleri

Model	p	λ	n
Model-1	32	0,500	0,063
Model-2	32	0,500	0,063
Model-3	32	0,425	0,071
Model-4	32	0,523	0,062
Model-5	16	0,500	0,016 0,016 0,027 0,035 0,050 0,034 0,015 0,018 0,015 0,002 -0,016 0,019 0,022 0,024 0,029 0,025 0,026 0,001 -0,003 0,012 0,023 0,031 0,022 0,018 0,011 0,009 0,008 0,010 0,012 0,012 0,016 -0,005 -0,001 - 0,004 -0,001 0,000 0,001 0,001
Model-6	16	0,500	0,016 0,016 0,027 0,036 0,051 0,034 0,015 0,018 0,015 0,002 -0,016 0,019 0,022 0,025 0,029 0,025 0,026 0,001 -0,003 0,012 0,023 0,031 0,022 0,018 0,011 0,009 0,008 0,010 0,012 0,012 0,016 -0,005 -0,001 - 0,004 -0,001 0,000 0,001 0,001
Model-7	16		0,620 0,620 0,656 0,443 0,429 0,450 0,012 0,012 0,011 0,043 0,054 0,036 0,414 0,470 0,450 0,826 0,813 0,642 0,026 0,019 0,017 -0,006 -0,022 0,439 0,507 0,508 0,488 0,188 0,221 0,000 0,024 0,024 0,029 0,025 0,015 0,176 0,328 0,349 0,369 0,320 0,245 0,007 0,003 0,013 0,011 0,031 0,020 0,231 0,237 0,325 0,343 0,338 0,427 0,023 0,012 0,004 0,004 0,007 0,013 0,474 0,466 0,465 0,501 0,506 0,506 0,012 0,014 -0,005 0,001 -0,006 - 0,482 0,483 0,004 -0,003 0,001 0,001
Model-8	16		0,658 0,658 0,683 0,435 0,417 0,444 0,014 0,014 0,012 0,043 0,053 0,036 0,401 0,467 0,444 0,861 0,838 0,659 0,028 0,019 0,017 -0,006 -0,022 0,431 0,509 0,507 0,483 0,155 0,194 0,000 0,024 0,024 0,029 0,025 0,015 0,145 0,311 0,334 0,356 0,310 0,220 0,006 0,003 0,013 0,011 0,031 0,019 0,211 0,214 0,310 0,329 0,326 0,421 0,022 0,012 0,004 0,004 0,007 0,012 0,472 0,461 0,463 0,501 0,494 0,505 0,012 0,014 -0,005 0,001 -0,006 - 0,483 0,481 0,004 -0,003 0,001 0,000

Modellerin öngörü performansları Tablo 3’de verilmiştir. Tablo 3’e bakıldığında en başarılı modelin parametre optimizasyonu, başlangıç koşulu optimizasyonu ve kayan pencere yönteminin birlikte uygulandığı Model-8 olduğu görülmektedir. Bu modele ilişkin MAPE değeri 2,838’dir ve yüksek öngörü başarımı anlamına gelmektedir. Her ne kadar geriye kalan tüm gri modellerden de yüksek doğrulukta öngörüler elde edilmiş olsa da, Model-8 ile geleneksel NGBM(1,1) modeli, Model-1, arasındaki performans farkı kayda değerdir.

Tablo 2: Modellere ait kestirimlerin doğruluk dereceleri

Kriter	Model-1	Model-2	Model-3	Model-4	Model-5	Model-6	Model-7	Model-8
RMSE	1,959	1,959	1,967	1,963	1,878	1,878	1,840	1,834
MAPE	1,143	1,143	1,142	1,143	1,013	1,012	0,950	0,951

Tablo 3: Modellere ait öngörülerin doğruluk dereceleri

Kriter	Model-1	Model-2	Model-3	Model-4	Model-5	Model-6	Model-7	Model-8
RMSE	9,668	9,666	8,928	9,810	8,099	8,096	7,101	7,088
MAPE	3,958	3,957	3,516	4,040	3,326	3,325	2,847	2,838

Öngörü sürecinde başlangıç koşulu optimizasyonu yaklaşımının diğer iki yaklaşımdan bağımsız kullanılmasının geleneksel modelle kıyaslandığında model başarımı üzerinde olumlu etkisi gözlenmektedir. Ancak, bu yaklaşım kayan pencere yönteminden bağımsız parametre optimizasyonu ile birlikte kullanıldığında tahmin edilen modelin öngörü başarısı diğer modellere göre düşüktür. Nitekim, bu iki yaklaşımın birlikte kullanıldığı Model-4, öngörü doğruluğunun değerlendirilmesinde kullanılan her iki kriter açısından en kötü modeldir. Son olarak parametre optimizasyonunun, geleneksel NGBM(1,1) modelinin ve bu modele kayan pencere yönteminin dahil edildiği gri modelin öngörü performanslarını önemli ölçüde iyileştirdiği görülmüştür.

Sonuç

Bu çalışmada; gri modellerin öngörü performanslarını yükseltmek adına literatürde yaygın olarak kullanılan kayan pencere yöntemi, doğrusal olmayan gri Bernoulli model için önerilen başlangıç koşulunu optimizasyonu ve sezgisel algoritmayla model parametrelerinin optimizasyonu yaklaşımları bir arada kullanılarak NGBM(1,1) modeli için yeni bir tahmin yöntemi sunulmuştur. Her bir yaklaşımın, tek başına ve birlikte geleneksel NGBM(1,1) modelinin performansı üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu doğrultuda oluşturulan sekiz model üzerinden karşılaştırmalar yapılmıştır. Tüm karşılaştırmalar MAPE ve RMSE kriterleri çerçevesinde yapılırken, parametre optimizasyonlarında amaç fonksiyonu olarak MAPE kriteri kullanılmıştır. Öncelikle geleneksel NGBM(1,1) modeli ızgara araması yöntemi ve salp sürüsü algoritması kullanılarak ayrı ayrı tahmin edilmiştir. Devamında, model tahminleri başlangıç koşulu optimizasyonu ile birlikte ele alınmıştır. Son olarak tahmin sürecine kayan pencere yöntemi dahil edilmiştir.

Önceki çalışmaları destekler nitelikte, kayan pencere yönteminin kullanıldığı gri modellerin genel olarak diğer gri modellere göre daha başarılı olduğu görülmüştür. Kayan pencere yöntemi ve model parametrelerinin salp sürüsü algoritması ile optimizasyonu beraber uygulandığında, geleneksel NGBM(1,1) modelinin hem kestirim hem de öngörü başarımının önemli oranda arttığı görülmüştür. Fakat başlangıç koşulu optimizasyonunun kayan pencere yöntemi ile birlikte uygulanmadığı sürece model başarısına ciddi bir katkısı olmadığı gibi parametre optimizasyonu ile kullanıldığında öngörü performansını düşürdüğü gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, Türkiye'nin GSYH hacim endeksi, NGBM(1,1) modelinin yapısı ve parametrelerinin optimizasyonu çerçevesinde bu üç yaklaşımın birlikte kullanıldığı önerilen gri model ile daha iyi modellenmiştir. Bu çalışmada, parametre optimizasyonu ve kayan pencere yönteminin kullanımı kapsamında ulaşılan sonuçlar; Zhou, vd. (2009), Özcan ve Tüysüz (2018) ile Ngo ve Hoang (2020) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda elde edilen aynı kapsamdaki genel bulgular ile uyumaktadır.

Ayrıca, bu çalışmada model parametrelerin optimizasyonu noktasında salp sürüsü algoritması tercih edilmiştir. Bu algoritma ile optimizasyon problemleri ele alınırken, diğer bir çok sezgisel algoritmada olduğu gibi popülasyon büyüklüğü ve iterasyon sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Ancak bu algoritmaların genelinden farklı olarak salp sürüsü algoritması, ayarlanması gereken başka herhangi bir parametre içermemektedir. Kullanım kolaylığı ve elde edilen sonuçların etkinliği bakımından, ayarlanması gereken çok sayıda parametresi olan daha karmaşık sezgisel algoritmalara göre daha üstün olduğu söylenebilir. Yine de sonraki çalışmalarda farklı sezgisel algoritmalar kullanılarak NGBM(1,1) modelinin parametreleri için en iyi değerler belirlenebilir. Bu doğrultuda yapılacak bir karşılaştırma yardımıyla algoritmalar arasında parametre optimizasyonu ve tahmin edilen modellerin başarımları noktasında anlamlı bir fark olup olmadığı araştırılabilir.

Kaynakça

- Aljarah, I., Mafarja, M., Heidari, A. A., Faris, H., Zhang, Y. ve Mirjalili, S. (2018). Asynchronous accelerating multi-leader salp chains for feature selection. *Applied Soft Computing*, 71, 964–979. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.07.040>
- Chen, C.-I., Chen, H. L. ve Chen, S.-P. (2008). Forecasting of foreign exchange rates of Taiwan's major trading partners by novel nonlinear Grey Bernoulli model NGBM(1,1). *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(6), 1194–1204. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.08.008>
- Chen, C.-I., Hsin, P.-H. ve Wu, C.-S. (2010). Forecasting Taiwan's major stock indices by the Nash nonlinear grey Bernoulli model. *Expert Systems with Applications*, 37(12), 7557–7562. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.04.088>
- Cheng, M., Liu, Y., Li, J. ve Liu, B. (2022). Nonlinear Grey Bernoulli model NGBM (1, 1)'s parameter optimisation method and model application. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 18(3), 2017. <https://doi.org/10.3934/jimo.2021054>
- Chia-Nan, W. ve Van-Thanh, P. (2015). An Improved Nonlinear Grey Bernoulli Model Combined with Fourier Series. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, e740272. <https://doi.org/10.1155/2015/740272>
- Comert, G., Begashaw, N. ve Huynh, N. (2021). Improved grey system models for predicting traffic parameters. *Expert Systems with Applications*, 177, 114972. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114972>
- Deng, J. L. (1982). Control Problems of Grey System. *Systems and Control Letters*, 5, 288-294.
- Hsu, L.-C. (2003). Applying the Grey prediction model to the global integrated circuit industry. *Technological Forecasting and Social Change*, 70(6), 563–574. [https://doi.org/10.1016/S0040-1625\(02\)00195-6](https://doi.org/10.1016/S0040-1625(02)00195-6)
- Hsu, L.-C. (2010). A genetic algorithm based nonlinear grey Bernoulli model for output forecasting in integrated circuit industry. *Expert Systems with Applications*, 37(6), 4318–4323. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.11.068>
- Jiang, J., Feng, T. ve Liu, C. (2021). An Improved Nonlinear Grey Bernoulli Model Based on the Whale Optimization Algorithm and Its Application. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, e6691724. <https://doi.org/10.1155/2021/6691724>

- Kayacan, E., Ulutas, B. ve Kaynak, O. (2010). Grey system theory-based models in time series prediction. *Expert Systems with Applications*, 37(2, 2), 1784–1789. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.07.064>
- Lu, J., Xie, W., Zhou, H. ve Zhang, A. (2016). An optimized nonlinear grey Bernoulli model and its applications. *Neurocomputing*, 177, 206–214. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.11.032>
- Mirjalili, S., Gandomi, A. H., Mirjalili, S. Z., Saremi, S., Faris, H. ve Mirjalili, S. M. (2017). Salp Swarm Algorithm: A bio-inspired optimizer for engineering design problems. *Advances in Engineering Software*, 114, 163–191. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2017.07.002>
- Ngo, H. A. ve Hoang, T. N. (2020). A Rolling Optimized Nonlinear Grey Bernoulli Model RONGBM (1, 1) and application in predicting total COVID-19 infected cases. <https://arxiv.org/abs/2008.07581>
- Özcan, T. ve Tüysüz, F. (2018). Healthcare Expenditure Prediction in Turkey by Using Genetic Algorithm Based Grey Forecasting Models. C. Kahraman ve Y. I. Topcu içinde, *Operations Research Applications in Health Care Management* (159–190). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-65455-3_7
- Pao, H.-T., Fu, H.-C. ve Tseng, C.-L. (2012). Forecasting of CO2 emissions, energy consumption and economic growth in China using an improved grey model. *Energy*, 40 (1), 400–409. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2012.01.037>
- Rizk-Allah, R. M., Hassanien, A. E., Elhoseny, M. ve Gunasekaran, M. (2019). A new binary salp swarm algorithm: Development and application for optimization tasks. *Neural Computing and Applications*, 31(5, 5), 1641–1663. <https://doi.org/10.1007/s00521-018-3613-z>
- Tien, T.-L. (2009). A new grey prediction model FGM(1, 1). *Mathematical and Computer Modelling*, 49(7, 7), 1416–1426. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.11.015>
- Wang, Z.-X., Li, Q. ve Pei, L.-L. (2018). A seasonal GM(1,1) model for forecasting the electricity consumption of the primary economic sectors. *Energy*, 154, 522–534. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.04.155>

- Wu, L., Liu, S., Yao, L., Yan, S. ve Liu, D. (2013). Grey system model with the fractional order accumulation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(7), 1775–1785. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.11.017>
- Wu, W.-Z., Zhang, T. ve Zheng, C. (2019). A Novel Optimized Nonlinear Grey Bernoulli Model for Forecasting China's GDP. *Complexity*, 2019, e1731262. <https://doi.org/10.1155/2019/1731262>
- Xia, M. ve Wong, W. K. (2014). A seasonal discrete grey forecasting model for fashion retailing. *Knowledge-Based Systems*, 57, 119–126. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2013.12.014>
- Xie, N.-m. ve Liu, S.-f. (2009). Discrete grey forecasting model and its optimization. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2), 1173–1186. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.01.011>
- Zhou, J., Fang, R., Li, Y., Zhang, Y. ve Peng, B. (2009). Parameter optimization of nonlinear grey Bernoulli model using particle swarm optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 207(2), 292–299. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.10.045>

Extended Summary

The grey forecasting model is one of the main topics studied in the context of grey system theory, which was introduced by Deng (1982) for the solution of uncertain systems with partially known and partially unknown information. This model, which is estimated by simple calculations, is widely used to make high-accuracy forecasts, especially for the time series with a limited number of positive observations and a fixed sampling frequency (Kayacan, et al., 2010: 1785). First-order univariate GM(1,1) and first-order multivariable GM(1,N) models are the mostly used grey forecasting models in practice because of the results obtained from these models are sufficient compared to computational burden for most of the time series. GM(1,1) and GM(1,N) are also called as traditional grey models. These models, which provide predictions and forecasts at a reasonable level of performance, are preferred because they are easy to understand and estimate. However, these models lack the flexibility with regard to the adaptations required to increase the current prediction and forecast accuracy. In other words, traditional grey models are so simple to expect high precision (Chen, et al., 2008: 1195). Following on this idea, Chen, et al. (2008) proposed a new grey model, which named as the non-linear grey Bernoulli model (NGBM(1,1)), based on the non-linear Bernoulli differential equation. By adjusting the power index of this highly flexible grey model, the curve for the accumulated generating operation series can be effectively fitted. Traditional grey models are ineffective in forecasting random, fluctuating and non-linear time series (Özcan and Tüysüz, 2018: 174). On the other hand, the NGBM(1,1) model has been applied widely to the non-linear time series with a limited number of observations due to its strong adaptability (Cheng, et al., 2022: 2018). There are also other grey models developed in line with the above-mentioned basic criticisms for the traditional grey models; the discrete grey model (Xie and Liu, 2009), the grey model with fractional order accumulation (Wu, et al., 2013), the hybrid grey model with error correction using Fourier series or Markov chain (Hsu, 2003), seasonal grey models (Xia and Wong, 2014; Wang, et al., 2018), grey models with different trigonometric terms (Comert, et al., 2021). However, unlike the NGBM(1,1) model, these models generally contain complex modeling processes that all researchers cannot easily understand and apply (Chen, et al., 2008: 1195).

Nevertheless, there are still improvements that can be made within the framework of the structure and parameters of the NGBM(1,1) model. In this study, the NGBM(1,1) model was estimated by using the rolling window method, according to the principle of the priority of using new information. In the solution of the differential equation, the corrected last element of

the accumulated generating operation series was used as the initial condition by following Lu, et al. (2016). Moreover, model parameters namely power index, background value and window size were evaluated simultaneously. The values of these parameters were determined by minimizing the Mean Absolute Percentage Error (MAPE) by using the salp swarm optimization algorithm. Hence, a new optimized NGBM (1,1) model is proposed by considering the structure and parameters of the NGBM(1,1) model together.

The seasonally and calendar adjusted gross domestic product (GDP) in chain linked volume index of Turkey, which is an important macroeconomic indicator, was used to compare the performances of the grey models. The quarterly data, which cover the 2009:1-2022:1 periods, were obtained from the website of Turkish Statistical Institute (TUIK). The data set was divided into two parts. The first part covering the periods 2009:1-2016:4 was used as training data to estimate the models. The second part covering 2017:1-2022:1 periods was used as test data to evaluate the forecasting performance of the models.

In the study, eight different grey models were evaluated in terms of model structure and/or parameter estimation method. Model-1 is the traditional NGBM (1,1) grey model. Model-2 was estimated with the correction of the initial condition of this model according to the method suggested by Lu, et al. (2016). The background value coefficient (λ) of both models was set to 0.5 in accordance with the traditional model. The power indexes (n) of these models were determined by performing a grid search in the range of $[-1, 0,999]$ with a step size of 0.001. Model-3 and Model-4 were estimated, respectively, by optimizing both λ and n parameters of Model-1 and Model-2 with the salp swarm algorithm. These models were estimated by using all of the training data at one time. Model-5, Model-6, Model-7, and Model-8 were estimated, respectively, by applying the rolling window method to these four models. The optimal window size for all models was found to be 16. The parameters of the salp swarm algorithm, namely population size and maximum number of iterations, were chosen as 30 and 500, respectively. The MAPE value calculated from the training data was used as the objective function in the parameter estimations of the grey models.

When the prediction accuracy of the models is examined by considering the MAPE values, it can be interpreted that all models provide high-accuracy predictions. Model-7 and Model-8 have the best prediction performance according to MAPE and RMSE criterion, respectively. Both models were estimated by using the rolling window method. The time series are modeled better than other models in terms of both MAPE and RMSE criteria with the models applied the method in question. Likewise, models, whose parameters are determined by

using salp swarm algorithm, are estimated with higher goodness of fit. However, the initial condition optimization alone has no significant effect on the performance of the traditional NGBM (1,1) model. On the other hand, when this approach is combined with the rolling window method, it makes a positive contribution to the model prediction performance in general. It is seen that combining the initial condition optimization together with parameter optimization and the rolling window method, instead of using it alone, allows the time series to be modeled more effectively. In this way, the models with the best fit are obtained.

When the forecasting performances of the models are investigated, it is seen that the most successful model is Model-8, which is estimated by using parameter optimization, initial condition optimization and rolling window method together. The MAPE value for this model is 2.838, which means high forecast performance. Although high accuracy forecasts are also obtained from all remaining grey models, the performance difference between the Model-8 and the traditional NGBM (1,1) model is significant. It is observed that the use of the initial condition optimization approach alone in the forecasting stage has a positive effect on the performance of grey model compared to the traditional model. However, when this approach is used together with parameter optimization but not using the rolling window method, the forecast performance of the estimated model is lower than other models. Finally, it is seen that parameter optimization significantly improves the forecast performances of both the traditional NGBM (1,1) model and the grey model estimated by using the rolling window method.

As a result, Turkey's GDP volume index is better modeled with the proposed grey model, which combines these three approaches within the framework of the optimization of parameters and the structure of the NGBM (1,1) model. The results obtained in this study within the scope of parameter optimization and the use of the rolling window method support the general findings of Zhou, et al. (2009), Özcan and Tüysüz (2018), and Ngo and Hoang (2020) in the same context.