

## Ortogonal Olabilirlik Ortalama - Varyans Modeli

Furkan GÖKTAŞ<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Karabük Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme Bölümü, 78050, Karabük

<sup>1</sup><https://orcid.org/0000-0001-9291-3912>

\*Sorumlu yazar: [furkangoktas@karabuk.edu.tr](mailto:furkangoktas@karabuk.edu.tr)

### Araştırma Makalesi

### ÖZ

#### Makale Tarihiçesi:

Geliş tarihi: 14.12.2022

Kabul tarihi:28.04.2023

Online Yayınlanma: 20.12.2023

#### Anahtar Kelimeler:

Portföy seçimi

Olabilirlik teorisi

Üçgensel bulanık sayılar

Konveks kuadratik minimizasyon

Uzman bilgisi

Olabilirlik çarpıklığı

Olabilirlik teorisi, portföy seçimi probleminde en çok kullanılan araçlardan biridir. Çünkü kesin olmayan olasılığın modellenmesine ve uzman bilgisinin portföy seçimi problemine entegre edilmesine imkan verir. Ama olabilirlik ortalama - varyans (OV) modelinin ve bunun uzantılarının bazı sorunları vardır. Bu nedenle bu çalışmada kesin konveks kuadratik minimizasyona dayanan ortogonal olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Ayrıca olabilirlik dağılımları üçgensel bulanık sayılar ile verildiğinde olabilirlik çarpıklığı tanımlanmıştır. Olabilirlik çarpıklığı önerilen modele kısıt olarak eklenebilir. Bu modelin analitik çözümü belirli şartlar altında elde edilmiştir. Ayrıca bu model açıklayıcı bir örnek ile tanıtılmıştır ve bu modelin sonuçları olabilirlik OV modelinin sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

## Orthogonal Possibilistic Mean - Variance Model

### Research Article

### ABSTRACT

#### Article History:

Received: 14.12.2022

Accepted: 28.04.2023

Published online: 20.12.2023

#### Keywords:

Portfolio selection

Possibility theory

Triangular fuzzy numbers

Convex quadratic minimization

Expert knowledge

Possibilistic skewness

The possibility theory is one of the most used tools in portfolio selection problem. Because, it enables to model imprecise probability and integrate expert knowledge into portfolio selection problem. However, there are some problems of the possibilistic mean - variance (MV) model and its extensions. Therefore, in this study, we propose an orthogonal possibilistic MV model based on strictly convex quadratic minimization. We also define possibilistic skewness when possibility distributions are given with triangular fuzzy numbers. The possibilistic skewness can be added to the proposed model as a constraint. We derive its analytical solution under certain conditions. We also illustrate it with an explanatory example and compare its results with the results of the possibilistic MV model.

**To Cite:** Göktaş F. Ortogonal Olabilirlik Ortalama-Varyans Modeli. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2023; 6(Ek Sayı): 29-41.

## Giriş

Olabilirlik teorisinin portföy seçiminde ilk defa kullanıldığı çalışmalarda, varlık getirileri için eksponansiyel olabilirlik dağılımları kullanılmıştır ve temel bileşenler analizinden yararlanılmıştır (Tanaka ve Guo, 1999; Tanaka ve ark., 2000). Literatürdeki ilk olabilirlik OV modelinde, olabilirlik dağılımları yamuk bulanık sayılarla verilmiştir (Carlsson ve ark., 2002). Bu model portföyde kısa pozisyon bulundurmama kısıdı varken sıralı minimal en iyileme (SMO) algoritmasıyla çözülebilir (Zhang ve ark., 2009). Ayrıca olabilirlik dağılımları yamuk bulanık sayılar yerine üçgensel bulanık sayılar ile verildiğinde herhangi iki varlık arasındaki olabilirlik korelasyonu 1 olarak bulunur (Corazzo

ve Nardelli, 2019). Bu nedenle bu model bu kısıt altında doğrusal en iyileme problemine indirgenir (Taş ve ark., 2016; Göktaş ve Duran, 2020). Bu modelin iyimser ve kötümser yatırımcılar için varyantları önerilmiştir. Bu varyantlar sırasıyla üst ve alt olabilirlik OV modeli olarak adlandırılır (Zhang ve ark. 2007). Olabilirlik dağılımları yamuk bulanık sayılarla verildiğinde bu varyantlar da bu kısıt altında doğrusal en iyileme problemlerine indirgenir (Zhang, 2007). Olabilirlik dağılımlarındaki çarpıklığı doğrudan dikkate almak portföy seçimi probleminin çözümünde daha iyi sonuçlar alınmasını sağlayabilir. Bu nedenle olabilirlik çarpıklığı tanımlanarak yine bu kısıt altında olabilirlik ortalama - varyans - çarpıklık modeli önerilmiştir. Bu modeldeki olabilirlik ortalaması ve varyansı tanımları ise geçmişteki tanımlarla ilişkilidir (Li ve ark. 2015). Son dönemdeki çalışmalarda genelleştirilmiş olabilirlik OV modelinin çok periyotlu varyantları önerilmiştir. Bu çalışmalara Yang ve ark. (2022), Gong ve ark. (2022) ve Gupta ve ark. (2020) örnek olarak verilebilir.

Olabilirlik OV modeli ve bunun uzantıları portföyde kısa pozisyon bulundurmama kısıdı yokken işlevsiz kalmaktadır. Bu sorunu çözmek için temel bileşenler analizine dayanan yeni bir olabilirlik OV modeli önerilmiştir (Göktaş ve Duran, 2019). Bu model tüm yönleriyle Markovitz (1952)'de verilen OV modelinin, olabilirlik teorisindeki karşılığıdır. Buna karşın olabilirlik dağılımları varlık getirileri yerine temel bileşenler için verildiğinden, bu model ile uzman bilgisinin kullanılması kolay değildir. Halbuki olabilirlik teorisinin, portföy seçimi probleminde yaygın olarak kullanılmasının nedenlerinden biri uzman bilgisinin portföy seçimi problemine entegre edilmesine imkan vermesidir.

Literatürdeki yukarıda bahsedilen boşlukları doldurmak için bu çalışmada ortogonal olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Bu modelde varlık getirilerinin olabilirlik dağılımları üçgensel bulanık sayılar ile verilmiştir. Ayrıca üçgensel bulanık sayılar için olabilirlik çarpıklığı tanımlanarak bu modele kısıt olarak eklenmiştir. Bununla birlikte bu modelin analitik çözümü belirli şartlar altında elde edilmiştir. Bu modelde, varlık getirileri arasındaki olabilirlik korelasyonu her zaman için 0 olarak bulunur. Bu nedenle bu model kısa pozisyon bulundurmama kısıdı yokken de verimli bir şekilde kullanılabilir. Bu çalışmanın kalanı şu şekilde organize edilmiştir. Bölüm 2'de ortogonal olabilirlik OV modeli tanımlanmıştır ve bu modelin matematiksel analizi yapılmıştır. Bölüm 3'te açıklayıcı bir örnekle bu model tanıtılmış ve bu modelin sonuçları Carlsson ve ark. (2002)'de verilen olabilirlik OV modelinin sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Bölüm 4 ile çalışma sonuçlandırılmıştır.

## Materyal ve Metot

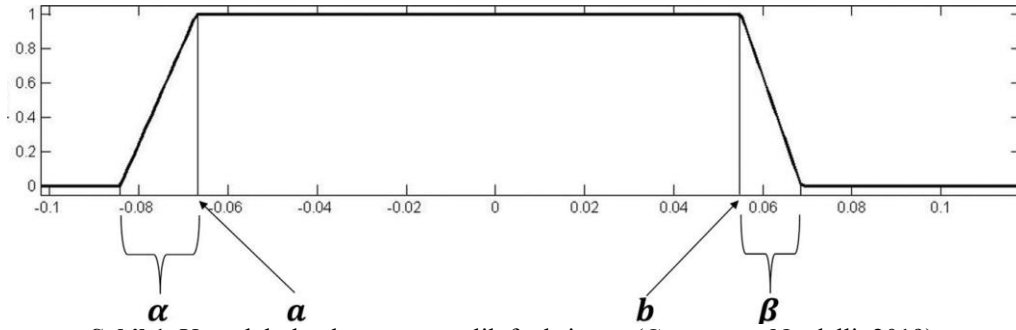
Bu çalışmada portföyde kısa pozisyon bulundurulabildiği ama risksiz varlık bulundurulmadığı varsayılmıştır. Buna göre portföy seçimi problemi için uygun çözüm kümesi (1)'deki gibidir. Burada portföydeki varlıkların ağırlık vektörü  $w$  ile,  $i$ . varlığın ağırlığı  $w_i$  ile, varlık sayısı  $n$  ile gösterilmiştir.

$$S = \left\{ w : \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\} \quad (1)$$

Yamuk bulanık sayı  $(a,b,\alpha,\beta)$  için üyelik fonksiyonu (2)'deki gibidir. Bu çalışmada olduğu gibi  $a=b$  olduğunda ise özel olarak üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır ve  $(a,\alpha,\beta)$  ile gösterilir.

$$A(t) = \begin{cases} 1 - \frac{a-t}{\alpha}, & a-\alpha \leq t \leq a \\ 1, & a \leq t \leq b \\ 1 - \frac{t-b}{\beta}, & b \leq t \leq b+\beta \\ 0, & \text{değilse} \end{cases} \quad (2)$$

Şekil 1'de bu yamuk bulanık sayının üyelik fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



Şekil 1. Yamuk bulanık sayının üyelik fonksiyonu (Corazzo ve Nardelli, 2019).

Fuller ve ark. (2011)'de verilen olabilirlik ortalaması ve varyansının tanımlarında ağırlık fonksiyonu 1 olarak alınsın. Buna göre  $(a,\alpha,\beta)$  için olabilirlik ortalaması ve varyansı sırasıyla (3)'teki gibi bulunur (Göktaş ve Duran, 2019). Burada  $a$ ,  $a-\alpha$  ve  $a+\beta$  sırasıyla getiri için temel durum, en kötü durum ve en iyi durum öngörüleridir.

$$E_p((a,\alpha,\beta)) = a + \frac{\beta - \alpha}{4} \quad (3)$$

$$Var_p((a,\alpha,\beta)) = \left( \frac{\beta + \alpha}{6} \right)^2$$

$i$ . varlığın getirisinin olabilirlik dağılımı  $(a_i,\alpha_i,\beta_i)$  olsun. Portföy getirisinin olabilirlik ortalaması ve varyansı (4)'teki gibi bulunur (Göktaş ve Duran, 2019). (4)'ün ikinci eşitliği, herhangi iki varlık arasındaki olabilirlik korelasyonunun 0 olduğu varsayımı ile uyumludur.

$$E_p \left( \sum_{i=1}^n w_i (a_i, \alpha_i, \beta_i) \right) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \sum_{i=1}^n w_i \left( a_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{4} \right) \quad (4)$$

$$Var_p \left( \sum_{i=1}^n w_i (a_i, \alpha_i, \beta_i) \right) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \left( \frac{\beta_i + \alpha_i}{6} \right)^2$$

Portföy getirisinin olabilirlik dağılımı ise bulanık aritmetik kullanılarak (5)'teki üçgensel bulanık sayı olarak bulunur (Ali ve ark., 2016).

$$\sum_{i=1}^n w_i (a_i, \alpha_i, \beta_i) = \left( \sum_{i=1}^n w_i a_i, \sum_{w_i \geq 0} w_i \alpha_i + \sum_{w_i < 0} |w_i| \beta_i, \sum_{w_i \geq 0} w_i \beta_i + \sum_{w_i < 0} |w_i| \alpha_i \right) \quad (5)$$

Pasha ve ark. (2009)'un Tanım 7.1'ine benzer olarak bu çalışmada  $(a, \alpha, \beta)$  için olabilirlik çarpıklığı (6)'daki gibi tanımlanmıştır. Tanımı gereği, olabilirlik çarpıklığı  $(-1, 1)$  arasında değer alır. Olabilirlik çarpıklığı pozitifse (negatifse) olabilirlik dağılımı sağa (sola) çarpıktır. Olabilirlik çarpıklığı 0 ise olabilirlik dağılımı simetriktir.

$$S_p((a, \alpha, \beta)) = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \quad (6)$$

(5) ve (6)'daki bilgiler doğrultusunda portföy getirisinin olabilirlik dağılımının olabilirlik çarpıklığı (7)'deki gibi bulunur.

$$S_p \left( \sum_{i=1}^n w_i (a_i, \alpha_i, \beta_i) \right) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (\beta_i - \alpha_i)}{\sum_{i=1}^n |w_i| (\alpha_i + \beta_i)} \quad (7)$$

Portföy getirisinin olabilirlik dağılımının sola çarpık olmama kısıdı ise (8)'deki gibi ifade edilir. Bu çalışmada önerilen ortogonal OV modelinin tanımı, (8)'deki kısıdın modele eklenip eklenmemesine bağlı olarak farklılık göstermektedir.

$$\sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - \beta_i) \leq 0 \quad (8)$$

Negatif olmayan riskten kaçınma katsayısı  $\pi$  olsun. (8)'deki kısıt modele eklenmediğinde ortogonal olabilirlik OV modeli (9)'daki kesin konveks kuadratik minimizasyon problemi ile tanımlanır. Burada  $\pi=2$  iken ortogonal olabilirlik OV modelindeki iki amacın (olabilirlik ortalamasını maksimize etmenin ve olabilirlik varyansını minimize etmenin) ağırlıkları eşittir.

$$\min \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (9)$$

öyle ki  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

(9) için Lagrange fonksiyonu (10)'daki gibidir. Burada  $\lambda$ , Lagrange çarpanı olarak adlandırılır.

$$L(w, \lambda) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (10)$$

Lagrange fonksiyonu ve en iyi çözüm için (11)'deki bilgiler geçerlidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(w, \lambda)}{\partial w_i} &= \pi w_i \sigma_i^2 - \mu_i + \lambda = 0, \forall i \\ w_i^* &= \frac{\mu_i - \lambda^*}{\pi \sigma_i^2}, \forall i \end{aligned} \quad (11)$$

(9) kesin konveks minimizasyon problemi olduğundan bu problemin en iyi çözümü tektir. Bu çözüm, (11)'deki ifade (9)'daki kısıtta yerine konulduğunda (12)'deki gibi bulunur.

$$w_i^* = \frac{\mu_i - \left( \frac{-1 + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\pi \sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\pi \sigma_i^2}} \right)}{\pi \sigma_i^2}, \forall i \quad (12)$$

(8)'deki kısıt modele eklenmediğinde olabirlik varyansını minimum yapan portföy (13)'teki kesin konveks kuadratik minimizasyon probleminin en iyi çözümü olarak tanımlanır. (9)'da  $\pi \rightarrow \infty$  iken (13) elde edilir. Başka bir deyişle (13), (9)'un bir özel çözümünü verir.

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} w_i^2 \sigma_i^2 \\ \text{öyle ki } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

(13)'ün en iyi çözümü tektir ve Lagrange çarpanları yöntemiyle (14)'teki gibi bulunur. (12)'de  $\pi=1$  ve her  $i$  için  $\mu_i=0$  iken (14) elde edilir.

$$w_i^* = \frac{1}{\sigma_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}, \forall i \quad (14)$$

Performans  $P(w)$  fonksiyonuyla tanımlansın. (8)'deki kısıt modele eklenmediğinde performansı maksimum yapan portföy, (15)'teki en iyileme probleminin en iyi çözümü olarak tanımlanır. Belirli bir  $\pi$  değeri için (9) ile (15) özdeştir. Başka bir deyişle (15), (9)'un bir özel çözümünü verir.

$$\text{maks } P(w) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2}} \quad (15)$$

$$\text{öyle ki } \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

(16)'daki kesin konveks kuadratik minimizasyon probleminin tek en iyi çözümü standardize edildiğinde yani elemanları toplamına bölüldüğünde (15)'in tek en iyi çözümü bulunur (Goldfarb ve Iyengar, 2003; Tütüncü ve Koenig, 2004).

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} w_i^2 \sigma_i^2 \quad (16)$$

$$\text{öyle ki } \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = 1$$

(15)'in en iyi çözümü tektir ve (16) için Lagrange çarpanları yöntemi kullanıldığında (17)'deki gibi bulunur. Belirtilen şart sağlanmazsa (15) sınırlı değildir. (17)'de her  $i$  için  $\mu_i = 1$  iken (14) elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} > 0 \Rightarrow w_i^* = \frac{\mu_i}{\sigma_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\sigma_i^2}}, \forall i \quad (17)$$

(9)'daki en iyileme problemine (8)'deki kısıt eklensin. Buna göre ortogonal OV modeli (18)'deki gibi tanımlanır. Bu çalışmada ortogonal OV modelinin (18)'de verilen tanımı kullanılmıştır ve (18)'in verilen  $\pi$  için en iyi çözümü etkin portföy (EP) olarak adlandırılmıştır.

$$\min \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

$$\text{öyle ki } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - \beta_i) \leq 0$$

(18) için Lagrange fonksiyonu (19)'daki gibidir. Burada  $\zeta$  negatif değildir ve  $\lambda$  her değeri alabilir.

$$L(w, \lambda, \omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) + \zeta \left( \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - \beta_i) \right) \quad (19)$$

Karush – Kuhn - Tucker (KKT) koşullarından bilindiği üzere eğer (18)'deki ikinci kısıt aktif kısıt değilse  $\zeta^* = 0$  olarak bulunur ve tek en iyi çözüm (12)'deki gibidir. (18)'deki ikinci kısıt aktif olsun. Buna göre Lagrange fonksiyonu ve en iyi çözüm için (20)'deki bilgiler geçerlidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(w, \lambda)}{\partial w_i} &= w_i \pi \sigma_i^2 - \mu_i + \lambda + \zeta (\alpha_i - \beta_i) = 0, \forall i \\ w_i^* &= \frac{\mu_i - \lambda^* - \zeta^* (\alpha_i - \beta_i)}{\pi \sigma_i^2}, \forall i \end{aligned} \quad (20)$$

(20)'deki ifade (18)'deki iki aktif kısıtta yerine koyulsun. Buna göre  $\lambda^*$  ve  $\zeta^*$  (21)'deki iki bilinmeyenli iki denklem çözülerek bulunur.

$$\begin{aligned} \lambda^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{\pi \sigma_i^2} + \zeta^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)}{\pi \sigma_i^2} &= -1 + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\pi \sigma_i^2} \\ \lambda^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)}{\pi \sigma_i^2} + \zeta^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)^2}{\pi \sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i (\alpha_i - \beta_i)}{\pi \sigma_i^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Bu çalışmada (8)'deki kısıt modele eklenmiş ve olabirlik varyansını minimum yapan portföy (VP) (22)'deki kesin konveks kuadratik minimizasyon probleminin tek en iyi çözümü olarak tanımlanmıştır. (18)'de  $\pi \rightarrow \infty$  iken (22) elde edilir. Buna göre VP, etkin portföydür.

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} w_i^2 \sigma_i^2 \\ \text{öyle ki } \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - \beta_i) &\leq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(22)'deki ikinci kısıt aktif değilse tek en iyi çözüm (14)'teki gibidir. (22)'deki ikinci kısıt aktif olsun. KKT'nin durağanlık koşuluna göre (22)'nin tek en iyi çözümü (23)'teki gibidir.

$$w_i^* = - \frac{\lambda^* + \zeta^* (\alpha_i - \beta_i)}{\sigma_i^2}, \forall i \quad (23)$$

(23) ifadesi (22)'deki iki aktif kısıtta yerine koyulsun. Buna göre  $\lambda^*$  ve  $\zeta^*$  (24)'teki iki bilinmeyenli iki denklem çözülerek bulunur. (21)'de  $\pi=1$  ve her  $i$  için  $\mu_i=0$  iken (24) elde edilir.

$$\begin{aligned}\lambda^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} + \zeta^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)}{\sigma_i^2} &= -1 \\ \lambda^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)}{\sigma_i^2} + \zeta^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)^2}{\sigma_i^2} &= 0\end{aligned}\tag{24}$$

Bu çalışmada (8)'deki kısıt modele eklenmiş ve performansı maksimum yapan portföy (PP) (25)'teki kesin konveks kuadratik minimizasyon probleminin tek en iyi çözümünün standardize edilmiş hali olarak tanımlanmıştır. Tanımı gereği PP, belirli bir  $\pi$  değeri için (18)'in çözümüdür. Başka bir deyişle PP, etkin portföydür.

$$\begin{aligned}\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} w_i^2 \sigma_i^2 \\ \text{öyle ki } \sum_{i=1}^n w_i \mu_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - \beta_i) &\leq 0\end{aligned}\tag{25}$$

(25)'teki ikinci kısıt aktif değilse PP (17)'deki gibidir. (25)'teki ikinci kısıt aktif olsun. KKT'nin durağanlık koşuluna göre (25)'in tek en iyi çözümü (26)'daki gibidir.

$$w_i^* = -\frac{\lambda^* \mu_i + \zeta^* (\alpha_i - \beta_i)}{\sigma_i^2}, \forall i\tag{26}$$

(26) ifadesi (25)'teki iki aktif kısıtta yerine koyulsun. Buna göre  $\lambda^*$  ve  $\zeta^*$  (27)'deki iki bilinmeyenli iki denklem çözülerek bulunur. (27)'de her  $i$  için  $\mu_i=1$  iken (24) elde edilir.

$$\begin{aligned}\lambda^* \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} + \zeta^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i) \mu_i}{\sigma_i^2} &= -1 \\ \lambda^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i) \mu_i}{\sigma_i^2} + \zeta^* \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)^2}{\sigma_i^2} &= 0\end{aligned}\tag{27}$$

**Uyarı:** Portföyde risk varlık bulunabiliyor ise PP ile ilişkili analitik çözüm elde edilir. Portföyde kısa pozisyon bulundurmama kısıdı olduğunda yani varlıkların ağırlıkları negatif olamadığında ise konveks kuadratik minimizasyon algoritmalarıyla bu bölümde işlenen problemlerin tek çözümleri bulunabilir. Bu algoritmalar ile ilgili detaylı bilgi için Gill ve Wong (2015)'e bakınız.



## Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde Zhang (2007)'de verilen örnek üzerinden ortogonal olabilirlik OV modeli tanıtılmıştır. Ayrıca kıyaslama yapabilme amacıyla Carlson ve ark. (2022)'de verilen olabilirlik OV modelinin sonuçları da verilmiştir. Bu modelin uygulanmasıyla ilgili detaylı bilgi için Göktaş ve Duran (2020)'ye bakınız. Beş riskli varlığın (S1, S2, S3, S4 ve S5) getirileri ( $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ ) için olabilirlik dağılımları (28)'deki üçgensel bulanık sayılar olsun.

$$\begin{aligned} r_1 &= (0,073;0,054;0,087) \\ r_2 &= (0,105;0,075;0,102) \\ r_3 &= (0,138;0,096;0,123) \\ r_4 &= (0,168;0,126;0,162) \\ r_5 &= (0,208;0,168;0,213) \end{aligned} \tag{28}$$

(28)'deki bilgiler doğrultusunda, olabilirlik ortalamasının ve standart sapmasının Carlson ve ark. (2022)'de verilen tanımlarına göre aşağıdaki bilgiler verilebilir. Performans, olabilirlik ortalaması bölü olabilirlik standart sapmasıdır ve en iyi değerler koyu olarak gösterilmiştir.

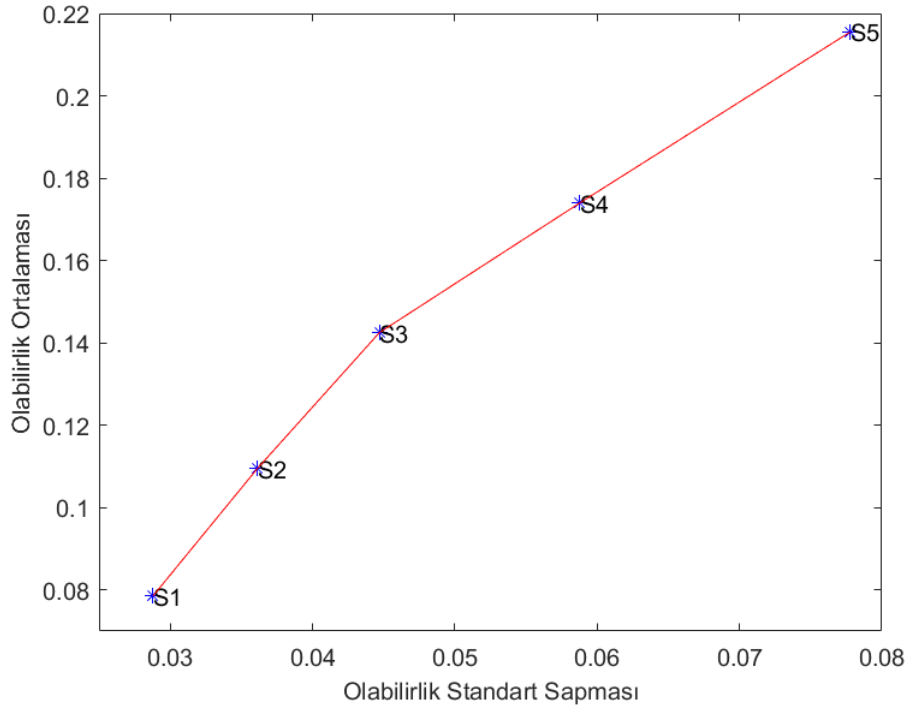
**Tablo 1.** Olabilirlik OV modeli için metrikler.

Varlıklar	Ol. Ort.	Ol. Std. S.	Performans
S1	0,0785	<b>0,0288</b>	2,2274
S2	0,1095	0,0361	3,0307
S3	0,1425	0,0447	<b>3,1877</b>
S4	0,174	0,0588	2,9598
S5	<b>0,2155</b>	0,0778	2,7709

Kısa pozisyon bulundurmama kısıdı varken aşağıdaki bilgiler verilebilir. Aksi halde tüm durumlarda en iyi çözüm sınırsızdır.

- i. Olabilirlik ortalamasını maksimum yapan portföyde sadece S5 bulunur.
- ii. Olabilirlik standart sapmasını minimum yapan portföyde sadece S1 bulunur.
- iii. Performansı maksimum yapan portföyde sadece S3 bulunur.

Şekil 2'de olabilirlik OV modelinin etkin sınırı verilmiştir. Görüldüğü üzere bu örnekte bu model için tüm varlıklar etkin sınırın üzerindedir yani etkin portföydür.



Şekil 2. Olabilirlik OV modelinin etkin sınırı.

Ortogonal olabilirlik OV modelinde olabilirlik ortalaması, olabilirlik standart sapması, performans ve olabilirlik çarpıklığı Tablo 2’deki gibi bulunmuştur. Burada en iyi değerler koyu olarak gösterilmiştir. Görüldüğü üzere tüm varlıklar için olabilirlik dağılımları sağa çarpıktır. Ayrıca riskli varlıkların ilk üç metrik için sıralaması Tablo 1’deki ile hemen hemen aynıdır.

Tablo 2. Ortogonal olabilirlik OV modeli için metrikler.

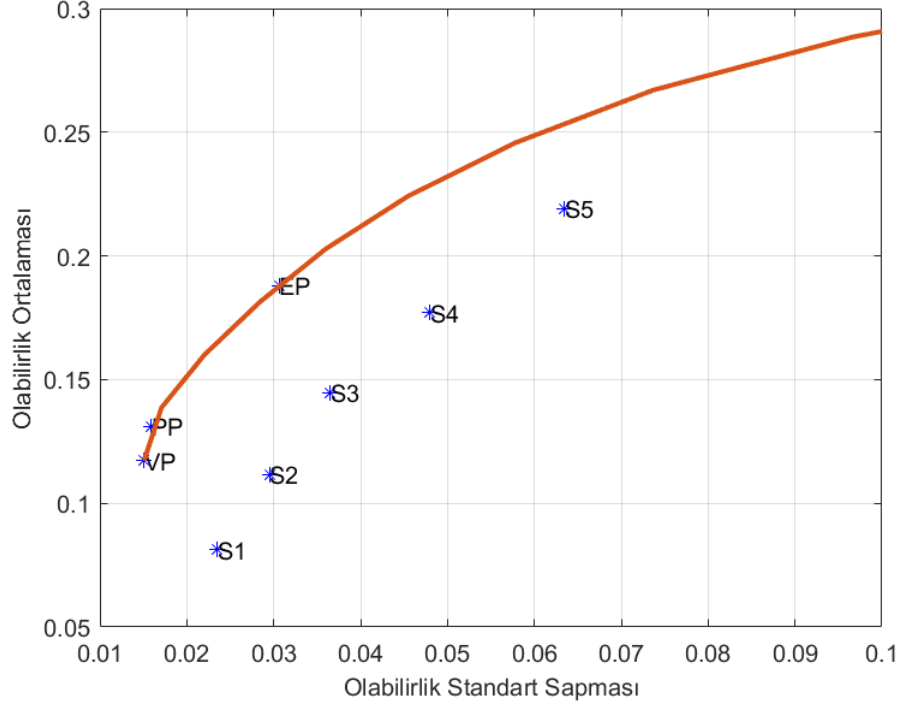
Varlıklar	Ol. Ort.	Ol. Std. S.	Performans	Ol. Çarpıklığı
S1	0,0813	<b>0,0235</b>	3,4574	<b>0,2340</b>
S2	0,1118	0,0295	3,7881	0,1525
S3	0,1448	0,0365	<b>3,9658</b>	0,1233
S4	0,1770	0,048	3,6875	0,1250
S5	<b>0,2193</b>	0,0635	3,4528	0,1181

Ortogonal olabilirlik OV modelinde; VP, PP ve  $\pi=100$  iken EP Tablo 3’teki gibi bulunmuştur. Görüldüğü üzere sadece EP’de bir varlığın (S1) kısa pozisyonu vardır ve olabilirlik OV modelindeki durumun aksine etkin portföyler iyi çeşitlendirilmiştir.

Tablo 3. Ortogonal olabilirlik OV modelinde bazı özel etkin portföyler.

Varlıklar	VP	PP	EP
S1	0,4122	0,2855	-0,2411
S2	0,2616	0,2492	0,1975
S3	0,1709	0,2108	0,3767
S4	0,0988	0,1491	0,3578
S5	0,0565	0,1055	0,3092

Ortogonal olabilirlik OV modelinin, yaklaşık etkin sınırının bir parçası Şekil 3'te gösterilmiştir. Kısa pozisyon bulundurmama kısıdı olmadığından bu eğri sınırsızdır.



Şekil 3. Ortogonal olabilirlik OV modelinin etkin sınırı.

Görüldüğü üzere olabilirlik OV modelinde etkin portföy olan S1, S2, S3, S4 ve S5; bu modelde etkin portföy değildir. Başka bir deyişle rasyonel bir yatırımcı bu modeli kullandığında Tablo 3'teki gibi çeşitlendirilmiş etkin portföy oluşturmalıdır.

Ortogonal OV modelindeki bazı özel etkin portföylerin metrikleri Tablo 4'te verilmiştir. Burada en iyi değerler yine koyu olarak gösterilmiştir.

Tablo 4. Ortogonal olabilirlik OV modelinde bazı özel etkin portföylerin metrikleri.

Portföy	Ol. Ort.	Ol. Std. S.	Performans	Ol. Çarpıklığı
VP	0,1173	<b>0,0151</b>	7,7763	<b>0,1636</b>
PP	0,1311	0,0159	<b>8,2189</b>	0,1496
EP	<b>0,1881</b>	0,0306	6,1504	0,0922

Tablo 4'te görüldüğü üzere ilgili üç etkin portföyün getirilerinin olabilirlik dağılımları sağa çarpıktır. Ayrıca Tablo 4'teki performans değerleri ile Tablo 2'deki performans değerleri arasında büyük farklar vardır. Başka bir deyişle olabilirlik OV etkin portföy olan S1, S2, S3, S4 ve S5'in performansları, yetersiz çeşitlendirme nedeniyle ortogonal olabilirlik OV modelinde oldukça düşüktür.

## **Sonuçlar**

Bu çalışmada portföy teorisinin temellerinden olan çeşitlendirme ilkesini dikkate alan bir ortogonal olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Bu modelde varlık getirilerinin olabilirlik dağılımlarının üçgensel bulanık sayılarla verildiği varsayılmıştır. Ayrıca üçgensel bulanık sayılar için olabilirlik çarpıklığı tanımlanarak bu model ile elde edilen etkin portföylerin olabilirlik dağılımlarının simetrik veya sağa çarpık olması sağlanmıştır. Bu modelin analitik çözümü, portföyde kısa pozisyon bulundurmama kısıdı ve risksiz varlık yokken elde edilmiştir. Ayrıca bu model kesin konveks kuadratik minimizasyon problemi ile verildiğinden, tüm durumlarda literatürdeki bilinen algoritmalarla çözülebilir. Dolayısıyla olabilirlik OV modeli gibi önerilen modelin kullanım kolaylığı vardır. İlerideki çalışmalarda, önerilen modele senaryo analizinin entegre edilmesi planlanmaktadır.

## **Çıkar Çatışması Beyanı**

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

## **Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti**

Yazar makaleye %100 oranında katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

## **Kaynakça**

- Ali MY., Sultana A., Khan AFMK. Comparison of fuzzy multiplication operation on triangular fuzzy number. *IOSR Journal of Mathematics* 2016; 12(4-I): 35-41.
- Carlsson C., Fullér R., Majlender P. A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy Sets and Systems* 2002; 131(1): 13-21.
- Corazza M., Nardelli C. Possibilistic mean–variance portfolios versus probabilistic ones: the winner is. *Decisions in Economics and Finance* 2019; 42(1): 51-75.
- Fullér R., Mezei J., Várlaki P. An improved index of interactivity for fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems* 2011; 165(1), 50-60.
- Gill PE., Wong E. Methods for convex and general quadratic programming. *Mathematical Programming Computation* 2015; 7(1): 71-112.
- Goldfarb D., Iyengar G. Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research* 2003; 28(1): 1-38.
- Gong X., Min L., Yu C.. Multi-period portfolio selection under the coherent fuzzy environment with dynamic risk-tolerance and expected-return levels. *Applied Soft Computing* 2022; 114: 108104.
- Göktaş F., Duran A. A new possibilistic mean-variance model based on the principal components analysis: an application on the Turkish Holding Stocks. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing* 2019; 32(5-6): 455-476.
- Göktaş F., Duran A. Olabilirlik ortalama–varyans modelinin matematiksel analizi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 2020; 22(1): 80-91.

- Gupta P., Mehlawat MK., Yadav S., Kumar A. Intuitionistic fuzzy optimistic and pessimistic multi-period portfolio optimization models. *Soft Computing* 2020; 24(16): 11931-11956.
- Li X., Guo S., Yu L. Skewness of fuzzy numbers and its applications in portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 2015; 23(6): 2135-2143.
- Markowitz H. Portfolio selection. *The Journal of Finance* 1952; 7(1): 77-91.
- Pasha E., Saeidifar A., Asady B. The percentiles of fuzzy numbers and their applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 2009; 6(1): 27-44.
- Tanaka H., Guo P. Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. *European Journal of Operational Research* 1999; 114(1): 115-126.
- Tanaka H., Guo P., Türksen IB. Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems* 2000; 111(3): 387-397.
- Taş O., Kahraman C., Güran CB. A scenario based linear fuzzy approach in portfolio selection problem: application in the Istanbul Stock Exchange. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing* 2016; 26(3-5): 269-294.
- Tütüncü RH., Koenig M. Robust asset allocation. *Annals of Operations Research* 2004; 132(1): 157-187.
- Yang XY., Chen SD., Liu WL., Zhang, Y. A multi-period fuzzy portfolio optimization model with short selling constraints. *International Journal of Fuzzy Systems* 2022; 24(6): 2798–2812.
- Zhang WG. Possibilistic mean–standard deviation models to portfolio selection for bounded assets. *Applied Mathematics and Computation* 2007; 189(2): 1614-1623.
- Zhang WG., Wang YL., Chen ZP., Nie ZK. Possibilistic mean-variance models and efficient frontiers for portfolio selection problem. *Information Sciences* 2007; 177(13): 2787–2801.
- Zhang WG., Zhang XL., Xiao WL. Portfolio selection under possibilistic mean–variance utility and a SMO algorithm. *European Journal of Operational Research* 2009; 197(2): 693-700.