Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (CFD), Cilt 37, No. 4 (2016)
ISSN: 1300-1949

Cumhuriyet University Faculty of Science
Science Journal (CSJ), Vol. 37, No. 4 (2016)
ISSN: 1300-1949

http://dx.doi.org/10.17776/csj.11326

Genelleştirilmiş Türevli Yarıasal Halkaların Lie İdealleri Üzerine

Emine KOÇ, Eda DERNEK

[1]Cumhuriyet University, Faculty of Science, Department of Mathematics, 58140 Sivas, Turkey

Received: 12.10.2016; Accepted: 03.11.2016

Özet. R, $2-$torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının bir kare kapalı Lie ideali, $F: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm ve Z, R halkasının merkezi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y + xd(y)$ koşulunu sağlayan bir $d: R \to R$ türevi varsa F dönüşümüne R halkasının d ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş türevi denir. Bu çalışmada F, d türeviyle belirlenmiş bir genelleştirilmiş türev olmak üzere bazı komütatiflik koşulları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarısal halka, Lie

Notes on Lie Ideals with Generalized Derivations in Semiprime Rings

Abstract. Let R be a $2-$ torsion free semiprime ring, U be a square closed Lie ideal of R and Z be the center of R. An additive mapping $F: R \to R$ is called a generalized derivation if there exists a derivation $d: R \to R$ such that $F(xy) = F(x)y + xd(y)$, for all $x, y \in R$. In the present paper, we investigate some commutativity conditions admitting a generalized derivations F with associated derivations d satisfying several conditions.

Keywords: Semiprime rings, Lie

1. GİRİŞ

R bir halka, $d: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ koşulu sağlanıyor ise d dönüşümüne R halkasının bir türevi denir. 1957 yılında E. C. Posner halkalarda türev tanımını vermiş ve bazı koşullar altında bir halkanın değişmeli olmasını türev yardımıyla incelenmesi konusundaki çalışmalara ön kaynak olmuştur. Son 60 yıldır türevler ve halka yapısı arasındaki ilişkiyi inceleyen pek çok çalışma yapılmıştır. Teorinin gelişimiyle beraber daha sonraki yıllarda farklı türev kavramları tanımlanmış, asal halkalarda bu türevlerin sağladığı özellikler incelenmiştir.

1991 yılında M. Bresar tarafından genelleştirilmiş türev tanımı verilmiştir: R bir halka, $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlayan bir $d: R \to R$ türevi varsa f dönüşümüne R halkasının d ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş türevi denir. B. Hvala 1998 de asal halkaların genelleştirilmiş türevlerinin cebirsel özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmadan sonra türevli asal halkalar için elde edilmiş olan bazı sonuçlar genelleştirilmiş türevler için araştırılmıştır. Bu çalışmalar zamanla R asal halkası yerine halkanın ideali ve Lie idealleri üzerinde incelenmiştir. Öte yandan türev yerine $(\sigma, \tau)-$türev, genelleştirilmiş $(\sigma, \tau)-$türev alınarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

* Corresponding author. *Email address:* eminekoc@cumhuriyet.edu.tr

Bir R halkasında $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanı komütatör çarpım olarak adlandırılır ve ve $[x, y]$ ile gösterilir. $xy + yx$ ifadesine ise x ile y nin Jordan çarpımı denir ve xoy ile gösterilir. $\{z \in R | zx = xz, \forall x \in R\}$ kümesine ise R halkasının merkezi denir ve Z ile gösterilir.

X ve Y, R halkasının iki alt kümesi olsun. $[X, Y]$ ile $xy - yx, x \in X, y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir. Buna göre U, R halkasının bir toplamsal alt grubu olmak üzere eğer $[U, R] \subseteq U$ oluyorsa U kümesine R halkasının bir Lie ideali denir.

S, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi, $F: R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere eğer her $x \in S$ için $[F(x), x] = 0$ oluyorsa F dönüşümüne R halkasının S üzerinde bir kommuting (commuting) dönüşümü denir. Benzer şekilde her $x \in S$ için $[F(x), x] \in Z$ sağlanıyorsa F dönüşümüne R halkasının S üzerinde bir merkezil (centralizing) dönüşümü denir.

1957 yılında E. C. Posner merkezil türeve sahip olan bir asal halkanın değişmeli olduğunu ispatlamıştır. Bu teorem Posner'ın II. Teoremi olarak da adlandırılır. Posner dan sonra pek çok yazar bu konuyla ilgili halkanın uygun bir alt kümesini alarak genelleştirmeler yapmıştır. 1973 de R. Awtar Lie idealler üzerinde merkezil olan türevleri incelemiştir. Aynı teorem 1983 yılında P.H. Lee ve T.K. Lee tarafından U, R asal halkasının bir Lie ideali ve her $u \in U$ için $[d(u), u] \in Z$ koşulu altında $U \subset Z$ olduğu gösterilerek ispatlanmıştır. 2002 yılında N. Rehman tarafından R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan bir Lie ideali ve (f, d) genelleştirilmiş türevi olmak üzere her $u \in U$ için $[f(u), u] = 0$ koşulu altında $U \subset Z$ olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra 2011 yılında ise Ö. Gölbaşı ve E. Koç tarafından bu teorem $u^2 \in U$ koşulu kaldırılarak ispatlanmıştır. 2004 yılında N. Argaç ve E. Albaş tarafından asal halkada genelleştirilmiş türev alınarak incelenmiştir.

S, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi, $F: R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere eğer her $x, y \in S$ için $[F(x), F(y)] = [x, y]$ oluyorsa F dönüşümüne R halkasının S üzerinde bir güçlü komütatifliği koruyan (strong commutativity preserving) dönüşümü veya kısaca SCP denir. Literatürde SCP dönüşümler ve SCP türevler için pek çok çalışma bulunmaktadır. 1993 yılında, M. Bresar tarafından komütatifliği koruyan dönüşüm tanımlamış ve halka üzerinde bu dönüşüm incelenmiştir. H. E. Bell ve M. N. Daif tarafından 1994 yılında U sıfırdan farklı R yarıasal halkasının sağ ideali ve d , U üzerinde bir türev olmak üzere her $x, y \in U$ için $[d(x), d(y)] = [x, y]$ iken $U \subseteq Z$ olduğu ispatlanmıştır. 1996 yılında ise Q. Deng ve M. Ashraf tarafından SCP dönüşümler ele alınmıştır.

1992 yılında M. N. Daif ve H. E. Bell tarafından "d, R yarı-asal halkasının sıfırdan farklı türevi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa I halkanın merkezindedir;

i. $d([x, y]) = \pm[x, y], \ \forall x, y \in I$,

ii. $x, y \in I$ için $d([x, y]) = [x, y]$ veya $d([x, y]) = -[x, y]$."

teoremi ispatlandı. Bu sonuç 2006 yılında N. Argaç tarafından incelendi. 2009 yılında Ö. Gölbaşı ise aynı sonucu bir yarı-asal halkada (f, d) genelleştirilmiş türevi için genelleştirmiştir. 2011 yılında ise Ö. Gölbaşı ve E. Koç tarafından yukarıdaki koşullar Lie idealler üzerinde çalışılmıştır.

Özellikler: $\forall x, y, z \in R$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

ii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

iii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$

iv. $\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

v. $xo(yz) = (xoy)z - y[x, z] = y(xoz) + [x, y]z$

vi. $(xy)oz = x(yoz) - [x, z]y = (xoz)y + x[y, z]$

Not : Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olduğunda $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2$ yazılabileceği için her $u, v \in U$ için $uv + vu \in U$ olur. Ayrıca, $U,$ Lie ideal olduğundan her $u, v \in U$ için $uv - vu = [u, v\,] \in U$ dur. Bu iki durum birlikte düşünülürse her $u, v \in U$ için $2uv \in U$ elde edilir. Makale boyunca R bir 2-torsion free halka olduğu için işlemlerde kolaylık sağlaması açısından her $u, v \in U$ için $2uv \in U$ alınacaktır.

Bu çalışmada yukarıda verilen koşullar genelleştirilmiş türevli bir $2-$torsion free yarıasal halkanın Lie ideali üzerinde incelenecektir.

2. SONUÇLAR

Lemma 2.1: [12, Corollary] R karakteristiği ikiden farklı bir yarı-asal halka, $U \nsubseteq Z(R)$ olacak şekilde U, R halkasının bir Lie ideali ve $a, b \in U$ olsun.

i) Eğer $aUa = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ dır.
ii) Eğer $aU = (0)$(veya $Ua = (0)$) ise bu durumda $a = 0$ dır.
iii) Eğer her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $aUb = (0)$ ise bu durumda $ab = 0$ ve $ba = 0$ dır.

Lemma 2.2: [11, Lemma 1] R, $2-$torsion free bir yarıasal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Eğer $[U, U] \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3: R, $2-$torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U \nsubseteq Z$ ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F, d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $\mathrm{d}(U) \subseteq U$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $[F(u), u] \in Z$ ise bu durumda $d(Z \cap [U, U]) = (0)$ dır.

İspat: Hipotezde u yerine $v \in U$ olmak üzere $u + v$ yazılırsa

$$[F(u + v), u + v] = [F(u) + F(v), u + v]$$

$$= [F(u), u] + [F(u), v] + [F(v), u] + [F(v), v] \in Z$$

dir. Burada hipotez kullanılırsa

$$[F(u), v] + [F(v), u] \in Z, \forall u, v \in U \qquad (2.1)$$

olur. (2.1) eşitliğinde u yerine $2uz, z \in Z \cap [U, U]$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa

$$[F(uz), v] + [F(v), uz] \in Z, \forall u, v \in U$$

elde edilir. Komütatör özellikleri ve F dönüşümünün genelleştirilmiş türev olduğu kullanılırsa

$$[F(uz), v] + [F(v), uz] = [F(u)z + ud(z), v] + [F(v), uz]$$

$$= [F(u), v]z + F(u)[z, v] + [u, v]d(z)$$
$$+u[d(z), v] + [F(v), u]z + u[F(v), z]$$
$$= ([F(u), v] + [F(v), u])z + F(u)[z, v] + [u, v]d(z)$$
$$+u[d(z), v] + u[F(v), z] \in Z$$

bulunur. Ayrıca $z \in Z$ olduğundan $d(z) \in Z$ dir. Yukarıdaki ifadede (2.1) eşitliğini, $z \in Z$ ve $d(z) \in Z$ olduğunu kullanılırsa

$$[u, v]d(z) \in Z, \ \forall u, v \in U \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu ifade $r \in R$ ile komüte edilirse

$$0 = \big[[u, v]d(z), r\big] = \big[[u, v], r\big]d(z) + [u, v][d(z), r]$$

olur. Tekrar $d(z) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$\big[[u, v], r\big]d(z) = 0, \forall u, v \in U, \forall r \in R \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.3) eşitliğinde v yerine $2vu$ yazılır ve halkanın $2-$ torsion free olması kullanılarak

$$\big[[u, vu], r\big]d(z) = 0, \forall u, v \in U, \forall r \in R$$

bulunur. Komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$$0 = \big[[u, vu], r\big]d(z)$$
$$= [v[u, u] + [u, v]u, r]d(z)$$
$$= \big[[u, v], r\big]ud(z) + [u, v][u, r]d(z)$$

elde edilir. $d(z) \in Z$ olduğundan

$$0 = \big[[u, v], r\big]d(z)u + [u, v][u, r]d(z)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte (2.3) ifadesi kullanılırsa

$$[u, v][u, r]d(z) = 0, \forall u, v \in U, \forall r \in R \tag{2.4}$$

olur. (2.4) eşitliğinde r yerine rv yazılırsa

$$0 = [u, v][u, rv]d(z)$$
$$= [u, v]r[u, v]d(z) + [u, v][u, r]vd(z)$$

olur. $d(z) \in Z$ olduğundan

$$0 = [u, v]r[u, v]d(z) + [u, v][u, r]d(z)v$$

elde edilir. (2.4) eşitliği kullanılırsa

$$[u, v]r[u, v]d(z) = 0, \forall u, v \in U, r \in R$$

bulunur. Bu eşitlik soldan $d(z)$ ile çarpılırsa

$$d(z)[u,v]r[u,v]d(z) = 0, \forall u,v \in U, r \in R$$

olur. $d(z) \in Z$ olduğundan

$$[u,v]d(z)r[u,v]d(z) = 0, \forall u,v \in U, r \in R$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$[u,v]d(z)R[u,v]d(z) = (0), \forall u,v \in U$$

bulunur. R yarıasal halka olduğundan

$[u,v]d(z) = 0, \forall u,v \in U$

olur. Yani

$$[U,U]d(z) = (0), \forall z \in Z \cap [U,U]$$

elde edilir. $z \in [U,U]$ olduğundan $d(z) \in [U,U]$ dur. Ayrıca $[U,U]$ bir Lie idealdir. $U \nsubseteq Z$ ve *Lemma 2.2* kullanılırsa $[U,U] \nsubseteq Z$ dir. *Lemma 2.1 (ii)* den $d(Z \cap [U,U]) = (0)$ elde edilir. Sonuç olarak F, U üzerinde merkezil dönüşüm ise $d(Z \cap [U,U]) = (0)$ elde edilir.

Teorem 2.4: R, $2-$ torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U \nsubseteq Z$ ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F,d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $d(U) \subseteq U$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $F(u) \circ u \in Z$ ise, bu durumda $d(Z \cap [U,U]) = (0)$ dır.

İspat: Hipotezde u yerine $v \in U$ olmak üzere $u+v$ yazılırsa

$$F(u+v) \circ (u+v) = \big(F(u) + F(v)\big) \circ (u+v)$$

$$= F(u) \circ u + F(u) \circ v + F(v) \circ u + F(v) \circ v \in Z$$

elde edilir. Bu ifadede hipotez kullanılırsa

$$F(u) \circ v + F(v) \circ u \in Z, \forall u,v \in U \tag{2.5}$$

olur. (2.5) eşitliğinde v yerine $2vz, z \in Z \cap [U,U]$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanırsa her $u,v \in U$ için

$$F(u) \circ vz + F(vz) \circ u \in Z$$

bulunur. Jordan çarpım özellikleri ve F dönüşümünün genelleştirilmiş türev olduğu kullanılırsa

$$F(u) \circ vz + F(vz) \circ u = F(u) \circ vz + \big(F(v)z + vd(z)\big) \circ u$$

$$= F(u) \circ vz + F(v)z \circ u + vd(z) \circ u$$

$$= (F(u) \circ v)z - v[F(u),z] + (F(v) \circ u)z$$

$$+ F(v)[z,u] + (v \circ u)d(z) + v[d(z),u] \in Z$$

elde edilir. $z \in Z$ olduğundan $d(z) \in Z$ dir. $d(z) \in Z$ ve $z \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$(F(u) \circ v)z + (F(v) \circ u)z + (v \circ u)d(z) \in Z$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$(F(u) \circ v + F(v) \circ u)z + (v \circ u)d(z) \in Z, \forall\, u, v \in U$$

elde edilir. (2.5) ifadesi kullanılırsa

$$(v \circ u)d(z) \in Z, \forall u, v \in U \qquad (2.6)$$

bulunur. Son ifade $r \in R$ ile komüte edilirse

$$[(v \circ u)d(z), r] = [v \circ u, r]d(z) + (v \circ u)[d(z), r] = 0$$

olur. Burada $d(z) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$[v \circ u, r]d(z) = 0, \forall u, v \in U, \forall r \in R \qquad (2.7)$$

elde edilir. (2.7) eşitliğinde u yerine $2vu$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa

$$[(v \circ vu), r]d(z) = 0, \forall u, v \in U, \forall r \in R$$

bulunur. Jordan ve komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$$0 = [(v \circ vu), r]d(z) = [v(v \circ u) + [v, v]u, r]d(z)$$

$$= [v(v \circ u), r]d(z)$$

$$= [v, r](v \circ u)d(z) + v[v \circ u, r]d(z)$$

olur. (2.7) eşitliği kullanılırsa

$$[v, r](v \circ u)d(z) = 0, \forall u, v \in U, \forall r \in R \qquad (2.8)$$

bulunur. (2.8) eşitliğinde u yerine $2uw, w \in U$ yazılır ve halkanın $2-$ torsion free olması kullanılırsa

$$[v, r](v \circ uw)d(z) = 0, \forall u, v, w \in U, r \in R$$

bulunur. Komütatör ve Jordan çarpım özellikleri kullanılırsa

$$0 = [v, r](v \circ uw)d(z)$$

$$= [v, r](v \circ u)wd(z) - [v, r]u[v, w]d(z)$$

olur. Tekrar bu eşitlikte $d(z) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$[v, r](v \circ u)d(z)w - [v, r]u[v, w]d(z) = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte (2.8) eşitliği kullanılırsa

$$[v, r]u[v, w]d(z) = 0, \forall u, v, w \in U, \forall r \in R$$

olur. Elde edilen eşitlikte r yerine w yazılırsa

$$[v, w]u[v, w]d(z) = 0, \forall u, v, w \in U$$

bulunur. Son eşitlik soldan $d(z)$ ile çarpılırsa

$$d(z)[v,w]u[v,w]d(z)=0, \forall u,v,w \in U$$

elde edilir. $d(z) \in Z$ olduğundan

$$[v,w]d(z)U[v,w]d(z)=(0), \forall v,w \in U$$

olur. Buradan $\big(2[v,w]d(z)\big)U(2[v,w]d(z))=(0), \forall v,w \in U$

olduğu görülür. *Lemma 2.1 (i)* den yararlanılırsa

$$[v,w]d(z)=0, \forall v,w \in U$$

elde edilir. Yani

$$[U,U]d(z)=(0), \forall z \in Z \cap [U,U]$$

olur. $z \in [U,U]$ olduğundan $d(z) \in [U,U]$ dur. Ayrıca $[U,U]$ bir Lie idealdir. $U \nsubseteq Z$ ve *Lemma 2.2* kullanılırsa $[U,U] \nsubseteq Z$ dir. *Lemma 2.1 (ii)* den $d(Z \cap [U,U])=(0)$ elde edilir. Sonuç olarak F,U üzerinde ters-merkezil dönüşüm ise $d(Z \cap [U,U])=(0)$ dır.

Teorem 2.5: R, $2-$torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U \nsubseteq Z$ ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F,d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $\mathrm{d}(U) \subseteq U$ olsun. Eğer her $u,v \in U$ için $[F(u),F(v)]-[u,v] \in Z$ ise bu durumda $d(Z \cap [U,U]\,)=(0)$ dır.

İspat: Hipotezde v yerine $2vz,\ z \in Z \cap [U,U]$ yazılır ve halkanın $2-$ torsion free olması kullanılırsa

$$[F(u),F(vz)]-[u,vz] \in Z, \forall\, u,v \in U$$

elde edilir. Komütatör özellikleri ve F dönüşümünün genelleştirilmiş türev olduğu kullanılırsa

$[F(u),F(v)z+vd(z)]-[u,vz]$

$=[F(u),F(v)z]+[F(u),vd(z)]-[u,vz]$

$=[F(u),F(v)]z+F(v)[F(u),z]+[F(u),v]d(z)$

$\quad +v[F(u),d(z)]-[u,v]z-v[u,z]$

$=([F(u),F(v)]-[u,v])z+[F(u),v]d(z)$

$\quad +v[F(u),d(z)]+F(v)[F(u),z]-v[u,z] \in Z$

olur. $z \in Z$ iken $d(z) \in Z$ olduğundan

$$([F(u),F(v)]-[u,v])z+[F(u),v]d(z) \in Z, \forall u,v \in U$$

bulunur. Burada hipotez kullanılırsa

$$[F(u),v]d(z) \in Z, \forall u,v \in U \tag{2.9}$$

olur. Son ifade $r \in R$ ile komüte edilirse

$0=[[F(u),v]d(z),r]$

$= [[F(u),v],r]d(z) + [F(u),v][d(z),r]$

bulunur. $d(z) \in Z$ olduğundan

$$\big[[F(u),v],r\big]d(z) = 0, \forall u,v \in U, r \in R \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) eşitliğinde v yerine $2vw, w \in U$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılarak

$$\big[[F(u),vw],r\big]d(z) = 0, \forall u,v,w \in U, r \in R$$

bulunur. Komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$0 = [[F(u),vw],r]d(z)$

$= [[F(u),v]w + v[F(u),w],r]d(z)$

$= \big[[F(u),v],r\big]wd(z) + [F(u),v][w,r]d(z)$

$+[v,r][F(u),w]d(z) + v[[F(u),w],r]d(z)$

olur. Burada $d(z) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$0 = \big[[F(u),v],r\big]d(z)w + [F(u),v][w,r]d(z)$

$+[v,r][F(u),w]d(z) + v\big[[F(u),w],r\big]d(z)$

elde edilir. Son eşitlikte (2.10) eşitliği kullanılırsa

$0 = [F(u),v][w,r]d(z) + [v,r][F(u),w]d(z)$

bulunur. Son eşitlikte r yerine $F(u)$ yazılırsa

$0 = [F(u),v][w,F(u)]d(z) + [v,F(u)][F(u),w]d(z)$

$= -[F(u),v][F(u),w]d(z) - [F(u),v][F(u),w]d(z)$

$= -2[F(u),v][F(u),w]d(z)$

olur. $R, 2-$bükülmez yarıasal halka olduğundan

$$[F(u),v][F(u),w]d(z) = 0, \forall u,v,w \in U \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) eşitliğinde v yerine $2vx, x \in U$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa $[F(u),vx][F(u),w]d(z) = 0$ elde edilir. Komütatör çarpım özellikleri kullanılarak

$$[F(u),v]x[F(u),w]d(z) + v[F(u),x][F(u),w]d(z) = 0$$

bulunur. (2.11) eşitliği kullanılırsa

$$[F(u),v]x[F(u),w]d(z) = 0, \forall u,v,w,x \in U$$

olur. Son eşitlikte w yerine v yazılırsa

$$[F(u),v]U[F(u),v]d(z) = (0), \forall u,v \in U$$

elde edilir. Bu eşitlik soldan $d(z)$ ile çarpılırsa

$$d(z)[F(u),v]U[F(u),v]d(z)=(0),\forall u,v\in U$$

olur. Burada $d(z)\in Z$ olduğu kullanılırsa

$$[F(u),v]d(z)U[F(u),v]d(z)=(0),\forall u,v\in U$$

bulunur. Bu ise $\big(2[F(u),v]d(z)\big)U\big(2[F(u),v]d(z)\big)=(0),\forall u,v\in U$

olması demektir. Bu eşitliğe *Lemma 2.1 (i)* uygulanırsa

$$[F(u),v]d(z)=0,\forall u,v\in U \tag{2.12}$$

olur. (2.12) eşitliğinde u yerine $2uw, w\in U$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılarak

$$[F(uw),v]d(z)=0,\forall u,v,w\in U$$

olduğu bulunur. Komütatör özellikleri ve F dönüşümünün genelleştirilmiş türev olduğu kullanılırsa

$0=[F(u)w+ud(w),v]d(z)$

$=[F(u)w,v]d(z)+[ud(w),v]d(z)$

$=[F(u),v]wd(z)+F(u)[w,v]d(z)+[u,v]d(w)d(z)+u[d(w),v]d(z)$

elde edilir. Burada $d(z)\in Z$ olduğu kullanılırsa

$0=[F(u),v]d(z)w+F(u)[w,v]d(z)+[u,v]d(w)d(z)+u[d(w),v]d(z)$

olur. Yukarıdaki eşitlikte (2.12) eşitliği kullanılırsa

$0=F(u)[w,v]d(z)+[u,v]d(w)d(z)+u[d(w),v]d(z)$

bulunur. Son eşitlikte w yerine z yazılırsa

$0=F(u)[z,v]d(z)+[u,v]d(z)d(z)+u[d(z),v]d(z)$

elde edilir. Burada $z\in Z$ ve $d(z)\in Z$ olduğu kullanılırsa

$$[u,v]d(z)d(z)=0,\forall u,v\in U$$

olur. $d(z)\in Z$ olduğu kullanılırsa

$$d(z)[u,v]d(z)=0,\forall u,v\in U$$

olur. Yani

$$d(z)\,[U,U]d(z)=(0),\forall z\in Z\cap[U,U]$$

olur. $d(z)\in[U,U]$, $[U,U]$ Lie ideal ve $[U,U]\nsubseteq Z$ olduğundan *Lemma 2.1 (i)* kullanılırsa $d(Z\cap[U,U])=(0)$ elde edilir.

Sonuç 2.6: R, $2-$torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U\nsubseteq Z$ ve her $u\in U$ için $u^2\in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F,d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $d(U)\subseteq U$ olsun. Eğer F, U üzerinde bir SCP dönüşüm ise bu durumda $d(Z\cap[U,U]\,)=(0)$ dır.

İspat: Hipotezden

$$[F(u), F(v)] = [u, v], \ \ \forall u, v \in U$$

dır. Bu durumda $[F(u), F(v)] - [u, v] = 0 \in Z$ bulunur. *Teorem 2.5* kullanılırsa $d(Z \cap [U, U]\ ) = (0)$ elde edilir.

Teorem 2.7: R, $2-$toraion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U \nsubseteq Z$ ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F, d), R nin bir genelleştirilmiş türevi ve $d(U) \subseteq U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $F(u \circ v) - [u, v] \in Z$ ise bu durumda $d(Z \cap [U, U]) = (0)$ dır.

İspat: Hipotezde v yerine $2vz, z \in Z \cap [U, U]$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa

$$F(u \circ vz) - [u, vz] \in Z, \forall u, v \in U$$

olur. Jordan ve komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$$F\big((u \circ v)z - v[u, z]\big) - [u, v]z - v[u, z] \in Z, \forall u, v \in U$$

elde edilir. Burada $z \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$F\big((u \circ v)z\big) - [u, v]z \in Z, \forall u, v \in U$$

bulunur. Burada F dönüşümünün genelleştirilmiş türev olduğu kullanılırsa

$$F(u \circ v)z + (u \circ v)d(z) - [u, v]z \in Z, \forall u, v \in U$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$(F(u \circ v) - [u, v])z + (u \circ v)d(z) \in Z, \forall u, v \in U$$

elde edilir. Son ifade hipotez ve $z \in Z$ olduğu kullanılarak düzenlenirse

$$(u \circ v)d(z) \in Z, \forall u, v \in U$$

olur. Elde edilen ifade *Teorem 2.4* ün ispatındaki (2.6) ile aynıdır. Böylece Teorem 2.4 ün ispatındaki benzer işlemler tekrarlanarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 2.8: R, $2-$ torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U \nsubseteq Z$ ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F, d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $d(U) \subseteq U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $F([u, v]) - (u \circ v) \in Z$ ise bu durumda $d(Z \cap [U, U]) = (0)$ dır.

İspat: Hipotezde v yerine $2vz, z \in Z \cap [U, U]$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa

$$F([u, vz]) - u \circ vz \in Z, \forall u, v \in U$$

olur. Jordan ve komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$$F([u, v]z + v[u, z]) - (u \circ v)z - v[u, z] \in Z, \forall u, v \in U$$

elde edilir. Burada $z \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$F([u, v])z + [u, v]d(z) - (u \circ v)z \in Z, \forall u, v \in U$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$(F([u,v])-(u\circ v))z-[u,v]d(z)\in Z,\forall u,v\in U$$

elde edilir. Son eşitlikte hipotez kullanılırsa

$$[u,v]d(z)\in Z,\forall u,v\in U$$

bulunur. Bu ifade *Teorem 2.3* nin ispatındaki (2.2) ile aynıdır. Benzer işlemler tekrarlanırsa $d(Z\cap[U,U])=(0)$ elde edilir.

Teorem 2.9: R, $2-$ torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U\nsubseteq Z$ ve her $u\in U$ için $u^2\in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F,d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $d(U)\subseteq U$ olsun. Eğer her $u,v\in U$ $F([u,v])-(F(u)\circ v)-[d(v),u]\in Z$ ise bu durumda $d(Z\cap[U,U])=(0)$ dır.

İspat: Hipotezde v yerine $2vz, z\in Z\cap[U,U]$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa

$$F([u,vz])-(F(u)\circ vz)-[d(vz),u]\in Z,\forall u,v\in U$$

olur. Yani

$$(F([u,v]z+v[u,z])-(F(u)\circ vz)-[d(v)z+vd(z),u]\in Z$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $z\in Z$ olduğu kullanılırsa

$$(F([u,v]z)-(F(u)\circ vz)-[d(v)z+vd(z),u]\in Z$$

bulunur. Jordan ve komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$F([u,v])z+[u,v]d(z)-(F(u)\circ v)z+v[F(u),z]-[d(v),u]z-d(v)[z,u]-[v,u]d(z)-v[d(z),u]\in Z$

bulunur. Son eşitlikte $z\in Z$ ve $d(z)\in Z$ olduğu kullanılırsa

$F([u,v])z+[u,v]d(z)-(F(u)\circ v)z-[d(v),u]z-[v,u]d(z)$

$=(F([u,v])-F(u)\circ v-[d(v),u])z+[u,v]d(z)+[u,v]d(z)\in Z$

elde edilir. Hipotez kullanılırsa

$$2[u,v]d(z)\in Z,\forall u,v\in U$$

bulunur. R, $2-$torsion free yarıasal halka olduğundan

$$[u,v]d(z)\in Z,\forall u,v\in U$$

olur. Bu ifade *Teorem 2.3* nin ispatındaki (2.2) ile aynıdır. Benzer işlemler tekrarlanırsa $d(Z\cap[U,U])=(0)$ elde edilir.

Teorem 2.10: R, $2-$ torsion free bir yarıasal halka, U, R halkasının $U\nsubseteq Z$ ve her $u\in U$ için $u^2\in U$ olacak şekilde bir Lie ideali, (F,d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ve $d(U)\subseteq U$ olsun. Eğer her $u,v\in U$ için $[F(u),F(v)]-(u\circ v)\in Z,\forall u,v\in U$ ise $d(Z\cap[U,U])=(0)$ dır.

İspat: Hipotezde v yerine $2vz, z\in Z\cap[U,U]$ yazılır ve halkanın $2-$torsion free olması kullanılırsa

$$[F(u),F(vz)]-(u\circ vz)\in Z,\forall u,v\in U$$

olur. Yukarıdaki eşitlik düzenlenirse

$$[F(u), F(v)z + vd(z)] - (u \circ vz) \in Z, \forall u, v \in U$$

elde edilir. Jordan ve komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$[F(u), F(v)]z + F(v)[F(u), z] + [F(u), v]d(z)$

$+v[F(u), d(z)] - (u \circ v)z + v[u, z] \in Z$

olur. $z \in Z$ ve $d(z) \in Z$ olduğundan

$$([F(u), F(v)] - (u \circ v))z + [F(u), v]d(z) \in Z$$

elde edilir. Hipotez kullanılırsa

$$[F(u), v]d(z) \in Z, \forall u, v \in U$$

bulunur. Bu ifade *Teorem 2.5* ün ispatındaki (2.9) ile aynıdır. Böylece *Teorem 2.5* ispatındaki benzer işlemler tekrarlanarak istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

1. N. Argaç ve E. Albaş, Generalized derivations of prime rings: Algebra Coll., 11 (3), 2004, 399-410.
2. N. Argaç, On prime and semiprime rings with derivations: Algebra Coll., 13 (3), 2006, 371-380.
3. R. Awtar, Lie and Jordan structure in prime rings with derivations: Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1), 1973, 67-74.
4. H. E. Bell, M. N. Daif, On commutativity and strong commutativity preserving maps: Canad. Math. Bull. 37 (4), 1994, 337-343.
5. M. Bresar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations: Glasgow Math. J. 33, 1991, 89-93.
6. M. Bresar, Centralizing mappings and derivations in prime rings: J. Algebra 156, 1993, 385-394.
7. M. N. Daif, H. E. Bell, Remarks on derivations on semiprime rings: Internat J. Math. and Math. Sci., 15 (1), 1992, 205-206.
8. Q. Deng, M. Ashraf, On strong commutativity preserving mappings: Results Math., 30 (3-4), 1996, 259-263.
9. Ö. Gölbaşı, E. Koç, Generalized derivations on Lie ideals in prime rings: Turk. J. Math., 35, 2011, 23-28.
10. Ö. Gölbaşı, On commutativity of semiprime rings with generalized derivation: Indian Journal of Pure and Appl. Math., 40 (3), 2009, 191-199.

I. N. Herstein, On the Lie structure of an assosiative ring: Journal of Algebra, 14, 1970, 561-571.

11. M. Hongan, N. Rehman, R. M. Al-Omary, Lie ideals and Jordan triple derivations in rings: Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **125**, 2011, 147–156.
12. B. Hvala, Generalized derivations in rings: Comm. Algebra, 26 (4), 1998, 1147-1166.
13. P. H. Lee, T. K. Lee, On derivations of prime rings: Chines J. Math., 9 (2), 1981, 107-110.
14. P. H. Lee, T. K. Lee, Lie ideals of prime rings with derivations: Bull. Inst. of Math. Academia Sinica II, 1983, 75-79.
15. E. C. Posner, Derivations in prime rings: Proc Amer. Math. Soc. 8, 1957, 1093-1100.
16. N. U. Rehman, On commutativity of rings with generalized derivations: Math. J. of Okayama Univ., 44, 2002, 43-49.