

Ulusoy, F., Çakıroğlu, E. (2017). Ortaokul öğrencilerinin paralelkenarı ayırt etme biçimleri: Aşırı özelleme ve aşırı genelleme. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17 (1), 457-475.

Geliş Tarihi: 26/08/2016

Kabul Tarihi: 14/02/2017

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN PARALELKENARI AYIRT ETME BİÇİMLERİ: AŞIRI ÖZELLEME VE AŞIRI GENELLEME*

Fadime ULUSOY**
Erdiñ ÇAKIROĞLU***

ÖZET

Bu araştırmanın amacı, ortaokul öğrencilerinin paralelkenarı ayırt etme biçimlerini ve bu süreçte yaşadıkları yanlışları ortaya çıkarmaktır. Bu amaç doğrultusunda, farklı başarı düzeyinde yer alan on sekiz yedinci sınıf öğrencisi ile bireysel klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelerde öğrencilerden sırasıyla sözel ve yazılı olarak paralelkenar tanımını yapması, farklı paralelkenar örnekleri çizmesi ve örnek olan ve olmayan şekiller arasında paralelkenar olan şekilleri belirlemesi istenmiştir. Veriler detaylı bir alan yazın taraması sonrası oluşturulan dört temel tema altında analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, öğrencilerin paralelkenar ile ilgili örnek uzayları üzerinde hiyerarşik olmayan veya kısmi hiyerarşik özellikte olan prototip örneklerin önemli etkileri olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bu etkiyle, öğrenciler paralelkenar örneği olan durumların örnek teşkil etmediğini düşünerek aşırı özelleme hatası sergilemiştir. Diğer taraftan, sonuçlar öğrencilerin paralelkenar örneği olmayan şekillere paralelkenar muamelesi yaptıklarını ve bu nedenle aşırı genelleme hataları sergilediklerini ortaya çıkarmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kavram imajı, kavram tanımı, paralelkenar, prototip örnekler, örnek olmayanlar

MIDDLE SCHOOL STUDENTS' TYPES OF IDENTIFICATION FOR PARALLELOGRAM: UNDERSPECIFICATION AND OVERGENERALIZATION

ABSTRACT

The aim of this study is to reveal middle school students' identification types for parallelogram and to determine their limitations and errors in this process. In line with the purpose, one to one clinical interviews were conducted with eighteen students who were at different achievement levels. In the clinical interviews, students were asked to define parallelogram, construct three different parallelogram examples and to identify parallelograms among figures having examples and non-examples of parallelogram, respectively. The data was analyzed under four main themes that were generated based on the detailed analysis of previous studies. Results revealed that there is a strong influence of non-hierarchical or partial hierarchical and prototypical examples on students' example spaces related to parallelogram. Under this influence, students treated examples of parallelogram as non-examples, which indicated underspecification error. Another remarkable result was that students treated non-examples of parallelogram as examples of that. Hence, students exhibited overgeneralization errors.

Key Words: Concept image, concept definition, parallelogram, prototypical examples, non-examples.

* Bu çalışma, 2016 yılında Trabzon'da düzenlenen 12. Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

** Dr., Kastamonu Üniversitesi., Eğitim Fakültesi, fadimebayik@gmail.com

*** Prof. Dr., ODTÜ, Eğitim Fakültesi, erdinc@metu.edu.tr

1.GİRİŐ

Öğrenciler genel olarak kitaplarda ve derslerde sunulan kavramları sahip oldukları sezgiler ve tecrübeler doğrultusunda içselleştirmektedir. Fakat yapılan araŐtırmalar öğrencilerin yaptıkları eksik veya hatalı içselleŐtirmeler sonucunda matematiksel kavramlarla ilgili yeterli bir kavrayıŐa sahip olamadıklarını ortaya koymaktadır (ör. Burger ve Shaughnessy, 1986; Ubuz ve Üstün, 2004). Özellikle geometrik kavramlarda yaŐanan bu eksik ve hatalı kavrayıŐların nedeni, Tall ve Vinner (1981) tarafından tanımlanan “*kavram imgesi*” ve “*kavram tanımı*” bileŐenleri arasındaki kopukluklar ve zayıf bağlantılar ile iliŐkilendirilmektedir. Tall ve Vinner (1981) kavram imgesini kavrama ait zihinsel resim, özellik ve süreçleri içeren bilişsel yapının tümü olarak tanımlarken, kavram tanımını kavramı ifade etmek için kullanılan kelimeler bütünü olarak tanımlamıştır. Ayrıca kavram imgesi ve kavram tanımını birbiriyle etkileŐim içinde bulunan iki ayrı hücre olarak ele almışlardır. Bu bağlamda, belirtilen iki hücre arasında istenen güçlü etkileŐimin kavramın formal tanımı yardımıyla oluŐan bir kavram imgesinin varlığında oluŐabildiđini öne sürmüŐlerdir. Benzer şekilde, Fischbein (1993) geometrik kavramların “*biçimsel (figural)*” ve “*kavramsal (conceptual)*” olmak üzere çift doğası olduğunu öne sürmüştür. Kavramların biçimsel doğasının onların duruŐu, büyüklüğü gibi uzamsal özellikleriyle ilgili olduğunu; kavramsal doğasının ise onların soyut ve formal yapısıyla ilgili olduğunu belirtmiŐtir.

Geometrik kavramların biçimsel yapılarındaki farklılıklar o kavramın genelde birden çok örneği bulunmasına neden olur. Örneğin, bir üçgenin geniş açılı, dar açılı ve dik açılı birçok örneği mevcuttur. Bu anlamda, bir kavramın örneklerinin tümünü içeren bir yapı meydana gelir ki bu yapı alan yazında o kavrama ait “*örnek uzay (example space)*” olarak tanımlanmaktadır (Zaslavsky ve Peled, 1996; Zaslavsky ve Zodik, 2014). Bir geometrik Şeklin bir kavramın örneklerini içeren örnek uzayda yer almasını belirleyen “*kritik özellikler*” vardır. Geometrik kavramların gerek ve yeter koŐullar altında tanımlanmasını sağlayan bu özelliklere o kavrama ait kritik özellikler denir (Hershkowitz, 1991; Tall ve Vinner, 1981). Örneğin, bir dörtgen tanımında dört kenarlı olma, dört köŐeli olma ve kapalı olma durumları dörtgen için birer kritik özelliktir. Mesela dörtgen “*4 kenarlı olan bir Şekil*” diye tanımlandığında Şekil 1-a’da verilen figür bir dörtgen olmak zorunda kalır veya yine dörtgen “*kenarları doğru parçası olan dört kenarlı Şekil*” diye tanımlandığında ise Şekil 1-b’de görüldüğü gibi kapalı olmayan bir Şeklin dörtgen örnek uzayında yer alması gerekir. Hâlbuki verilen iki Şekil de bir dörtgen örneği değildir.



(a)



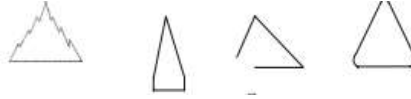
(b)

Şekil 1. (a) “*4 kenarlı olan Şekil*” tanımı örneği (b) “*Kenarları doğru parçası olan dört kenarlı Şekil*” tanımı örneği (Pereira-Menoza, 1993, s. 774)

Kritik özelliklerin önemi yanında, kavramların bazı örneklerindeki biçimsel yönün baskınlığıyla kavram için kritik olmayan özellikler, o kavram için olmazsa olmaz öğeler olarak görülebilmektedir. Bazı araŐtırmacılar bu durumu “*prototip*” örneklere iliŐkilendirmiŐtir (Hershkowitz, 1990). Prototip örnekler kavrama ait uzun özellik listesinde yer alan özelliklerden bazılarını içeren örnekler olarak tanımlanmaktadır. Alan yazındaki çalışmalar, öğrencilerin prototip Şekillerin görsel özelliklerine ve statik

pozisyonlarına alışık oldukları zaman geometrik şekillerin birbiriyle olan ilişkilerini anlamada ve bir kavrama ait olan örneklerin farklı hallerini ayırt etmede sıkıntılar yaşadığını vurgulamaktadır (de Villiers, 1994; Fujita, 2012; Fujita ve Jones, 2006). Örneğin, Okazaki ve Fujita'nın (2007) çalışmasında şekiller tipik çizimleri dışında farklı duruşlarda sergilenerek verilmiştir. Araştırmanın sonucunda ise hem dokuzuncu sınıf öğrencilerin hem de sınıf öğretmeni adaylarının paralelkenar örneklerini tanımda sorun yaşadıklarını belirtmişlerdir. Bu sorunların temelinde sadece prototip şekillerde yer alan ve kritik olmayan özelliklere odaklanılarak yapılan çıkarımlar yatmaktadır. Bu çıkarımlar nedeniyle öğrenciler bir kavram için örnek olan durumları sanki örnek değilmiş gibi görerek “aşırı özelleme” yanlışı yapmaktadır.

Son yıllarda öğrencilerin geometrik cisimleri nasıl ayırt ettiğine yönelik çalışmalarda eğilimin sadece öğrencilerin prototip anlayışlarını ortaya çıkarmak değil onların bir kavram için örnek olmayanları (non-examples) belirlerken nasıl bir yol izlediklerini anlama yönündedir. Örneğin, Tsamir, Tirosh ve Levenson (2008) yaptıkları çalışmada okul öncesi 65 çocuğun üçgen örneklerini ve üçgen için örnek olmayan şekilleri nasıl ayırt ettiğini incelediği çalışmada öğrencilere üçgen için örnek olan ve örnek olmayan birçok şekli içeren bir ölçme aracı tasarlanmıştır. Bu ölçme aracındaki şekilleri, sezgisel örnekler (intuitive examples), sezgisel olmayan örnekler (non-intuitive examples), sezgisel örnek olmayan şekiller (intuitive non-examples) ve sezgisel olmayan-örnek olmayan şekiller (non-intuitive non-examples) olarak gruplamışlardır. Elde ettikleri sonuçlar, sezgisel olmayan-örnek olmayan şekilleri çocukların birer üçgen örneği gibi algıladıkları için üçgenin sahip olması gereken kritik özellikleri tam olarak bilemediklerini ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin üçgen olmadığı halde üçgen olarak algıladıkları şekil örnekleri durumu daha açık hale getirme adına Şekil 2’de sunulmuştur.



Şekil 2. Sezgisel olmayan ve üçgen örneği olmayan şekiller (Tsamir ve diğerleri, s. 86)

Benzer çalışmalar farklı kavramlar için de yapılmıştır (Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai ve Tabach, 2015; Ulusoy, 2015; 2016). Bu bağlamda, Ulusoy (2015) nitel araştırma deseni içinde 13 ortaokul öğrencisinin yamuk örneği olan ve olmayan şekilleri nasıl ayırt ettikleri incelemiştir. Yine, Tsamir ve diğerleri (2015) okul öncesi grubu çocukların üçgen, çember ve silindire yönelik kavram imajlarını ve kavram tanımlarını ele almıştır. Öğrencilerin örnek olmayan durumlara örnek gibi davranarak “aşırı genelleme” hatasına düştükleri sonucu bu çalışmalarla da desteklenmiştir.

Geometri öğrenme alanı genel olarak birbirine bağlı alt ve üst kavramlardan oluşmaktadır. Örneğin, bir öğrenci köşe ve kenar kavramlarını bilmeden bir üçgenin ne anlam ifade ettiğini anlamayabilir. Benzer şekilde diklik kavramını bilmeden bir üçgenin alanını hesaplamak veya geometrik cisimlerin özelliklerini belirlemek mümkün olmayabilir. Kavramlar arası ilişkiler düşünüldüğünde, dörtgenler kapsayıcı sınıf ilişkileri açısından hiyerarşik bir yapıya sahiptir. Bu nedenle, birçok araştırmacı tarafından öğrencilerin ve hizmet öncesi veya hizmet grubu öğretmenlerinin bu hiyerarşik yapıyı nasıl anladığı ya da özellikle paralelkenarı nasıl tanımladıklarına yönelik yapılan çalışmaların sayısı son yıllarda artış göstermiştir (Cansız-Aktaş, 2016; Fujita, 2012; Özdemir-Erdoğan ve Dur, 2014; Türnüklü, 2014; Türnüklü, Gündoğdu-Alaylı ve Aktaş,

2013). Fakat yapılan çalışmalar genel olarak bireylerin bir şeklin örnek olan durumlarını nasıl anladıklarını incelemeye yönelik hazırlanmıştır. Çünkü çalışmalarda genel olarak bireylerden dörtgenlerin tanımını yapmaları, çizmeleri veya dörtgen ilişkileriyle ilgili bildikleri durumları söylemeleri istenmiştir. Hâlbuki, ğrencilerin örnek olmayan şekilleri ayırt ederken nasıl yaklaşım sergiledikleri onların o kavrama ait örnek uzaylarının sınırlarını ve bu sınırlar içinde muhafaza edilen doğruları veya yanlışları anlama adına çok önemlidir. Bu sınırların açık bir biçimde ortaya çıkarılması hlihazırda bulunan ğretim programı ve kitapların yenilenmesinden üniversitede verilen hizmet öncesi ğretim programlarının içeriklerinin zenginleştirilmesine kadar birçok açıdan katkı sağlayabilir. Mesela dörtgenler arasında paralelkenar kavramı hiyerarşik ilişkileri içinde en çok barındıran kavramdır. Çünkü dörtgenler arasındaki kapsayıcı ilişkiler düşünüldüğünde dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare de aynı zamanda bir paralelkenar örneğidir. Ayrıca paralelkenar kavramı hem diğer alt kavramların anlaşılması hem de st geometrik kavramların anlaşılması açısından önem taşımaktadır. Alan yazında yapılan çalışmaları ve kavramın önemini göz önünde bulundurarak, bu çalışmada ortaokul ğrencilerinin sadece örnek olan durumları değil örnek olmayan durumları da nasıl ayırt ettiklerine yönelik bilgi sunmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, şu iki soruya cevap aranmıştır: Ortaokul ğrencileri örnek olan ve olmayan şekiller arasından paralelkenarı ayırt ederken ne tür yaklaşımlar sergilemektedir? Öğrencilerin paralelkenar ayırt etme sürecinde ortaya çıkan kısıtlılıklar ve yanılığlar nelerdir?

2. YÖNTEM

Nitel bir araştırma türü olan olgubilim yaklaşımı, farkında olunan ama derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olunmayan olgulara odaklanmayı hedefleyen bir araştırma yöntemidir (Yıldırım ve şimsek, 2006). Ayrıca, olgubilim deseninde, yaygın uygulamaları ortaya çıkarmak ve katılımcılar tarafından oluşturulan anlamları tanımlamak ve açıklamak amaçlanır (Annells, 2006). Bu çalışmada öğrencilerin paralelkenarı ayırt etme biçimlerinin doğası derinlemesine araştırılmak ve açıklanmak istendiği için çalışma metodolojik olarak olgubilim desenine göre tasarlanmıştır.

2.1. Katılımcılar

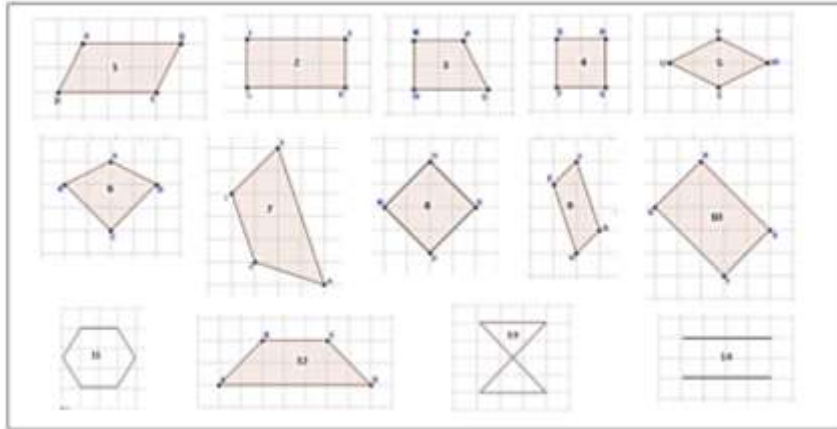
Öncelikle araştırmacıya yakın olan bir ilköğretim okulunda bulunan iki yedinci sınıf, hem matematik öğretmenlerin ders anlatış biçimlerini anlamak hem de öğrencilerin karakteristik özelliklerini belirlemek için dört ders saati boyunca gözlemlenmiştir. Gözlemler doğrultusunda alınan notlar ve öğrencilerin matematik not ortalamaları listelendikten sonra, öğrencilerin konuşkanlık ve matematik başarısı ile ilgili iki sınıfın matematik öğretmeninden görüşleri alınmıştır. Elde edilen önbilgiler işığında yedinci sınıfta öğrenim gören toplamda 47 ğrenci arasından farklı matematik başarı düzeyinde bulunan 18 ğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Katılımcıların matematik başarıları iki döneme ait matematik karne notları göz önünde bulundurularak gruplanmıştır. İki döneme ait matematik notları 5-5, 5-4 veya 4-5 olan öğrenciler matematik başarı düzeyi yüksek olarak gruplanmıştır. Bu grupta bulunan ğrenciler S1, S2, S3, S4, S5, S6 ve S7 olarak isimlendirilmiştir. Diğer taraftan, iki dönemlik matematik notları, 4-4, 3-4 veya 4-3 olan öğrenciler ise orta düzeyde matematik başarısına sahip olarak gruplanmıştır. Bu grupta S8, S9, S10, S11, S12 ve S13 ile isimlendirilen altı ğrenci yer almıştır. Son olarak, iki dönem matematik notları, 3-3, 3-2, 2-3 veya 2-2 olan öğrenciler ise düşük

matematik başarılı öğrenciler olarak gruplandırılmıştır. Bu grupta, S14, S15, S16, S17 ve S18 olarak isimlendirilen beş öğrenci yer almıştır.

2.2. Veri toplama araçları

Öğrencilerin bir matematik kavramıyla ilgili sahip olduğu kavram imajları ve örnek uzaylarının sınırları onların bir şekli nasıl ayırt ettiğini belirleyen önemli faktörlerdir (Levenson, Tirosh ve Tsamir, 2011). Bu nedenle, öğrencilerin bir kavramın örneklerini belirmesine yönelik hazırlanacak bir ölçme aracının örnek uzay açısından zengin ve detaylı olması önerilmektedir. Bu bağlamda, veri toplama araçları hazırlanmadan önce, ulusal ve uluslararası alan yazında dörtgenler ve temel geometrik kavramlarla ilgili yapılan çalışmalar ve bu çalışmalarda kullanılan veri toplama araçları dikkatle incelenmiştir. Öğrencilerin ayırt etme becerilerinin daha iyi anlaşılması için öncelikle onların kavram imajı ve kavram tanımını ortaya çıkaracak bir ölçme aracı hazırlanmıştır. Bu ölçme aracı, paralelkenarın yazılı ve sözlü olarak tanımlanmasını ve birbirinden farklı en az üç paralelkenar örneğini kareli kâğıt üzerinde çizilmesini gerektiren bir nitelikte tasarlanmıştır. Kareli kâğıt kullanımındaki temel amaç, öğrencilerin paralelkenar ile ilgili kritik olan ve kritik olmayan özellikleri nasıl sorguladıklarını net olarak gözlemlemektir. Ayrıca, değişen ortaokul matematik ders programında temel geometrik kavramların öğretimiyle ilgili kazanımlarda kareli veya noktalı kâğıt kullanılması veya kullandırılmasına yönelik öneriler göz önünde bulundurulmuştur (MEB, 2013).

Diğer taraftan, öğrencilerin paralelkenar örneklerini birçok örnek arasından nasıl ayırt ettiğini anlama adına ikinci bir veri toplama aracı daha tasarlanmıştır. Bu araçta, öğrencilerin hangi şekilleri bir paralelkenar örneği olarak alırken hangi şekilleri bir paralelkenar örneği olarak görmediklerini belirlemek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, Şekil 3'te görüldüğü gibi kareli kâğıt üzerinde Geogebra programında çizilmiş 14 şekil hazırlanmıştır.



Şekil 3. Paralelkenar belirleme dokümanı

Ölçme aracında kullanılacak geometrik şekilleri belirlerken paralelkenara örnek olan şekillerin yanı sıra paralelkenar için örnek olmayan şekillere de yer verilmiştir. Ayrıca bu şekiller oluşturulurken şekillerin prototip olup olmama durumları da göz önünde bulundurulmuştur. Şekil 3'te verilen paralelkenar belirleme dokümanındaki yedi şekil birer paralelkenar örneği iken, kalan yedi şekil paralelkenar örneği olmayacak şekilde

seçilmiştir. Paralelkenar örneklerinin belirlenmesinde daha önce bu ve benzer kavramlarla ilgili hazırlanan veri toplama araçları detaylı bir şekilde incelenmiştir (ör. Fujita, 2012; Tsamir ve diğeri, 2008). Bu inceleme sonunda, Fujita'nın (2012) paralelkenarın hiyerarşik ilişkiler açısından nasıl anlaşıldığı hedeflediği çalışmada yer alan örneklerin bir kısmından yararlanılmıştır. Böylece, örnek teşkil eden şekillerde bir şeklin prototip olan ve olmayan örneğine yer verilmiştir. Örneğin, paralelkenar şeklinin ilk akla gelen hali genellikle 1 no.lu şekildir. Oysa, 9 no.lu şeklin yönelimi ve kenar uzunlukları 1 no.lu şekle benzemediği için bu şekil prototip olmayan bir paralelkenar örneğidir. Hem prototip şekillere hem de prototip olmayan şekillere yer vererek prototip şekil algısının paralelkenar belirleme üzerindeki rolünü anlamak hedeflenmiştir. Diğeri taraftan, kare, eşkenar dörtgen ve dikdörtgen örneklerine de ölçme aracında yer verilmiştir. Çünkü kapsayıcı dörtgen tanımlarına göre kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen de birer paralelkenar örneğidir. Okullarda öğrencilere dörtgenler kapsayıcı tanım çerçevesinde öğretildiğinden öğrencilerin dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkileri nasıl anladığını belirlemek de onların paralelkenar ayırt etme biçimlerini anlama adına önem taşımaktadır. Bu nedenle, öğrencilerin dörtgenlerin hiyerarşik ilişkisiyle ilgili düşüncelerinin paralelkenar belirlemedeki rolünü anlamak için ölçme aracında kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgene de yer verilmiştir.

Alan yazında, bir kavram için örnek olmayan şekiller öğrencilerin sezgilerini ve sezgilerinden kaynaklanan hatalarını anlama adına önemli bir kaynak olarak görülmektedir. Daha önce bahsedildiği gibi, Tsamir ve diğeri (2008) üçgenlerle ilgili yaptıkları çalışma için hazırladıkları ölçme aracında üçgen için örnek olmayan birçok şekle yer vermiştir. Bir başka çalışmalarında da Tsamir ve diğeri (2015), öğretmenlerin üçgen, çember ve silindire ilgili kavram imajlarını ve kavram tanımlarını belirlemek için hazırladıkları veri toplama aracında üçgen, çember ve silindirin örnek şekillerinin yanı sıra örnek olmayan şekillerine yer vermişlerdir. Benzer şekilde, Ulusoy (2015), öğrencilerin yamuk şekillerini nasıl belirlediklerini anlamak için yamuk olan ve olmayan şekilleri içeren bir ölçme aracı tasarlamıştır. Alan yazında yer alan önemli çalışmalardan yola çıkarak, paralelkenar belirleme dokümanında sadece paralelkenarın hiyerarşik ve/veya prototip olup olmama bağlamındaki örneklerine değil paralelkenar örneği olmayan şekillere de aynı yoğunlukta yer verilmiştir. Örnek olmayan durumlar için özellikle paralel kenarlara sahip olan ama paralelkenar olmayan şekiller tercih edilmiştir. Bu bağlamda 3, 7 ve 12 no.lu yamuk şekilleri, 11 no.lu düzgün altıgen, 14 no.lu paralel iki doğru parçası ve 13 no.lu içbükey çokgen şekli ölçme aracında yer almıştır. Bu tip şekillerin öğrencilerin örnek uzaylarında paralelkenar için örnek olmayan şekillerin neler olduğunu anlamaya yardımcı olacağı düşünülmüştür. Paralelkenar belirleme ile ilgili ölçme aracı farklı sınıflarda ve sınıf düzeylerinde bulunan matematik başarıları düşük dört öğrenci ile pilot bir uygulamaya tabii tutulmuştur. Pilot çalışmalar ışığında, öğrencilerin paralelkenar ile ilgili düşünülenden farklı algılara sahip olabileceği düşünülerek ölçme aracına 11, 13 ve 14 no.lu şekiller eklenmiştir. Ayrıca iki matematik öğretmenden ölçme aracındaki örnek olan ve olmayan şekillerle ilgili görüşleri alınmıştır. Sonuç olarak, paralelkenar belirleme dokümanı Şekil 3'teki son halini almıştır.

2.3. Verilerin Toplanması

Olgu bilim çalışmalarında başlıca veri toplama aracı görüşmelerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Görüşme türleri arasında yer alan klinik görüşmeler, matematik eğitimcileri tarafından öğrencilerin belli matematik kavramlarına yönelik var olan bilgilerini veya

problem çözme süreçlerini derinlemesine anlama adına sıklıkla kullanılmaktadır (Maher, Sigley ve Davis, 2014). Bu anlamda, araştırmanın amacı ve metodolojik yapısı düşünülerek öğrencilerle klinik bireysel görüşmeler yapılması uygun bulunmuştur. Bireysel klinik görüşmeler, ortalama 45 dakika sürmüştür. Her öğrenciden ilk olarak paralelkenarı hem sözel hem de yazılı olarak tanımlaması istenmiştir. Ardından, her bir öğrenciye kareli kâğıt, renkli kalemler ve cetvel verilmiştir. Öğrencilerden bu malzemeleri kullanarak en az üç farklı paralelkenar örneği çizmesi istenmiştir. Öğrenci paralelkenar çizimlerini bitirdikten sonra, öğrenciye çizdiği şekillerin neden farklı olduğunu düşündüğü sorulmuştur. Ek olarak, eğer öğrenci çizim sırasında kararsızlık veya zorluk yaşamışsa bu durumların nedenlerine yönelik sonda sorulara yer verilmiştir. Daha sonra, her bir öğrenciye Şekil 3'te yer alan paralelkenar belirleme aracı verilmiştir. Öğrencilerden dokümanda gördükleri şekillerin hangilerinin paralelkenar olduğunu ve hangilerinin paralelkenar olmadığını belirlemeleri istenmiştir. Kararsız kaldıkları şekiller olursa onları da kâğıda not almaları önerilmiştir. Öğrenciler paralelkenar belirleme sürecini tamamlayınca her birine karar verme süreçlerinin detayını anlamak için sıralanan sorular sorulmuştur: Paralelkenar olan şekilleri belirlerken neye dikkat ettin? Paralelkenar olmayan şekilleri nasıl anladın? Bazen şekillerin paralelkenar olup olmadığına kâğıdı çevirip karar verdin, neden böyle bir yol izledin? Bazı şekillerde çok kararsız kaldın, bunun nedeni nedir? Görüşmelerin tümü hem ses kaydına hem de video kaydına alınmıştır. Ayrıca katılımcılarla yapılan görüşmeler sırasında, birinci araştırmacı katılımcının paralelkenar tanımını, çizimi ve seçimlerine yönelik hatırlatıcı kısa notlar almıştır.

2.4. Verilerin Analizi

Olgubilim çalışmalarında yapılan içerik analizlerinde verilerin kavramsallaştırılması ve ele alınan olguyu tanımlayabilecek temaların ortaya çıkarılmasını gerektirir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Buradan yola çıkarak, bu çalışmada tematik bir analiz yöntemi izlenmiştir. Öncelikle, katılımcıların süreçlerine yönelik alınan notlar her bir katılımcı için bir Excel dokümanına yazılmıştır. Ardından, videoda yer alan tüm veriler bilgisayar ortamında yazılı hale getirilmiştir. Veriler yazılı hale getirildikten sonra, öğrencilerin Şekil 3'te yaptığı paralelkenar seçimler, tabloya aktarılmıştır. Bu tabloda hangi öğrencinin hangi şekilleri paralelkenar olarak gördüğü hangi şekilleri paralelkenar olarak görmediği ile ilgili geometrik şekillerin kısa adları ve numaraları bulunan bilgilere yer verilmiştir. Ardından, benzer seçimler gruplanmıştır ve bir kod adı verilmiştir. Tüm taslak kodlar oluşturulduktan sonra bu kodların hangi temalar altında toplanabileceği incelenmiştir. Kod ve temaların isimlendirilip son halini alması için, ilgili alan yazındaki çalışmalar tekrar kontrol edilmiştir. Bulunan çalışmalar arasında, Fujita (2012) dokuzuncu sınıf öğrencilerinin ve sınıf öğretmeni adaylarının paralelkenar muhakeme tiplerini hiyerarşik, kısmi prototip, prototip ve paralelkenar ile ilgili bilgi sahibi olmama diye gruplamıştır. Bu çalışmada da öğrencilerin zihnindeki paralelkenar örnekleri, prototiplik ve hiyerarşik olmayan örnekler ile örnek olmayan şekillerin etkisinde kalabileceği için paralelkenar ayırt etme biçimleri prototiplik ve hiyerarşik ilişkiler bağlamında Fujita (2012)'nin çalışmasındaki gruplamada bazı değişiklikler yapılarak oluşturulmuştur. Öğrencilerin paralelkenar ayırt etme biçimleri Tablo 1'deki gibi son halini almıştır. Bu bağlamda, öğrencilerin dörtgenler arasındaki sınıf ilişkisini dikkate alarak yaptıkları tanılamalar Tip 1-Hiyerarşik yaklaşım grubuna dâhil edilmiştir. Bu gruptaki bir öğrenci paralelkenara ek olarak dikdörtgen, kare ve eşkenar dörtgeni de bir

paralelkenar olarak algılar ve örnek olmayan durumların bir paralelkenar olmadığının farkında olur. Diğer yandan, dörtgenler arasında kısmi hiyerarşik ilişkilerin kurulduğu ve hiçbir örnek olmayan durumun seçilmediği ayırt etme biçimi de Tip 2-kısmi hiyerarşik yaklaşım olarak isimlendirilmiştir. Bu gruptaki herhangi bir ğrenci, 1 ve 9 no.lu Şekilleri seçer fakat ek olarak 2-4-5-8-10'dan en az ikisini seçer. Bu yaklaşımdaki öğrenciler paralelkenar rneği olan bazı Şekilleri bir paralelkenar rneği olarak görmedikleri için aşırı özelleme hatası sergiler. Dörtgenler arasındaki sınıf ilişkisi dikkate alınmadan yapılan ayırt etme biçimi ise Tip3-Hiyerarşik olmayan yaklaşım olarak isimlendirilmiştir. Bu yaklaşımda öğrenciler sadece 1-9 veya 1-9-10 no.lu Şekilleri paralelkenar rneği olarak ayırt eder. 10 no.lu Şekil prototip Şekil algısı olan öğrencilerde görülebilir. Son olarak, örnek olmayan Şekillerin de dâhil olduğu paralelkenar tanılaması yapan öğrencilerin ayırt etme biçimi Tip 4- rnek olmayanlara dayalı yaklaşım olarak ele alınmıştır. Bu yaklaşımda, öğrenciler paralelkenar örnekleri içinden yaptıkları seçimlere ek olarak paralelkenar için örnek olmayan 3-6-7-11-12-13-14 arasından da seçimler yaparlar. Ayrıca farklı paralelkenar rneği olarak altıgen, paralel doğru parçaları izebilirler. Bu grup öğrencileri paralelkenar olmayan Şekillere paralelkenar muamelesi yaptığı için aşırı genelleme hatası sergiler. Veri analizi sırasında, öğrencilerin yaptığı paralelkenar tanımları ve örnek paralelkenar çizimleri onların paralelkenarı ayırt etme biçimlerini daha net ortaya koymak ve veriyi zenginleştirerek desteklemek adına yeri geldikçe kullanılmıştır. Ayrıca olgubilim çalışmalarının doğasına uygun olarak sonuçlar betimsel bir anlatımla sunulmuş ve doğrudan alıntılara sık sık yer verilmiştir. Sonuç olarak, elde edilen tüm bulgular ne sürülen temalar çerçevesinde açıklanmış ve yorumlanmıştır.

Tablo 1.*Verilerin Tematik Analizinde Kullanılan Bileşenler*

Paralelkenar ayırt etme biçimleri	Hata tipi	Muhtemel seçimler
Tip 1 Hiyerarşik yaklaşım	Hatasız	1-2-4-5-8-9-10'un hepsi ve 3-6-7-11-12-13-14'un hiçbiri
Tip 2 Kısmi hiyerarşik yaklaşım	Aşırı zelleme	1-9 'a ek olarak 2-4-5-8-10'dan en az ikisi ve 3-6-7-11-12-13-14'un hiçbiri
Tip 3 Hiyerarşik olmayan yaklaşım	Aşırı zelleme	1-9 veya 1-9-10 ile 3-6-7-11-12-13-14'un hiçbiri
Tip 4 rnek olmayan Şekillere dayalı yaklaşım	Aşırı genelleme	1-2-4-5-8-9-10 arasından yapılan seçimler ve 3-6-7-11-12-13-14 içerisinden seçimler

Araştırmada geçerlik ve güvenirliği sağlamak için birçok strateji geliştirilmiştir. İ güvenirliği (inandırıcılık) arttırmak için veriler iki araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Kodlayıcılar arası güvenirlik (interrater reliability) hesaplaması için Miles ve Huberman'ın (1994) nerdiği güvenirlik formülü [Güvenirlik = Görüş Birliği/(Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)] kullanılmış, hesaplama sonucunda araştırmanın güvenirliğinin %95'in üzerinde olduğu belirlenmiştir. Ayrıca birinci araştırmacı tek hakem güvenirliği sağlama adına aynı veriyi belli aralıklarla  kez kodlamıştır. Son iki kodlamada %100 güvenirlik sağlanmıştır. Diğer taraftan, birinci araştırmacının ikamet ettiği yere yakın bir okul seçilerek öğrencilerle uzun süreli etkileşim firsatı yakalanmıştır ve yine i geçerliği arttırmak için öğrencilere cevapları teyit ettirilmiştir. Dış geçerliği (aktarılabirlik)

sağlamak için amaçlı örneklem tekniğini kullanılmış ve veri toplama aracı ve veri toplama süreçleri tüm detayıyla aktarılmaya çalışılmıştır.

3. BULGULAR

Araştırma kapsamında elde edilen veriler incelendiğinde, öğrencilerin paralelkenarı ayırt etme biçimlerini yansıtan bir gruplama oluşturulmuştur. Bu gruplama, Tablo 2’de özet halinde verilmiştir. Bu tabloya göre, temelde dört tip ayırt etme biçimi tespit edilmiştir. Ayrıca her bir ayırt etme biçiminin eğer yanlış veya eksik ise hangi hata türüyle ilgili olduğuna ve hangi öğrencilerin hangi ayırt etme türüne girdiğine dair bilgilere de tabloda yer verilmiştir. Öğrencilerin paralelkenar ayırt etme biçimleri ile ilgili detaylar ayrı alt başlıklar altında detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Tablo 2.

Öğrencilerin Paralelkenar Ayırt Etme Biçimleri

Paralelkenar Ayırt Etme Biçimleri	Hata tipi	Öğrenciler
Tip 1 Hiyerarşik yaklaşım	Hatasız	S6-S10
Tip 2 Kısmi hiyerarşik yaklaşım	Aşırı özelleme	S3-S4-S5-S7-S8-S12
Tip 3 Hiyerarşik olmayan yaklaşım	Aşırı özelleme	S1-S2-S11-S15
Tip 4 Örnek olmayanlara dayalı yaklaşım	Aşırı genelleme	S9-S13-S14-S16-S17-S18

3.1. Paralelkenar Ayırt Etmede Hiyerarşik Yaklaşım

Tablo 2’de görüldüğü üzere, sadece iki öğrenci (S6 ve S10) paralelkenar ayırt etme adına yaptıkları seçimlerde dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkilere odaklanmıştır. Diğer bir deyişle, bu iki öğrenci tüm eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare örneklerini de birer paralelkenar örneği olarak ele almıştır. Şekil 3’te verilen yamuk, altıgen ve paralel doğru parçalarının paralelkenar için bir örnek teşkil etmediğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin şekilleri nasıl ayırt ettikleri aşağıdaki veri kesitlerinde sunulmuştur.

1 no.lu şekil bildiğimiz paralelkenar şeklidir. Çünkü kenarları uzatırsak bir kesişme olmaz. 2 no.lu şekil de aynı şekilde kenarlarını uzatırsak kesişmez. Fakat 3 no.lu şekil [paralelkenar] olmaz. Çünkü [MN] ve [PQ] kenarlarını uzattığımızda kesişir. Onlar birbirine paralel olmuyor... Paralelkenar dört kenarlı bir şekil olduğundan dört kenarlı olmayan şekiller zaten paralelkenar olmaz (S6, yüksek düzey öğrenci).

Karşılıklı kenarları paralel ve birbirine eşit olmasına dikkat ederek seçimlerimi yapıyorum... 7 ve 12 no.lu şekillerde karşılıklı kenarları birbirine paralel değil ve [kenar] uzunlukları eşit değil. 11 ve 13’te paralel kenarlar var ama altı kenarlı. 14 no.lu şekil ise paralel doğrular. Ben paralelkenarı dört kenarı olması gerekir diye biliyorum (S10, orta düzey öğrenci).

Öğrencilerin açıklamalarını incelediğimizde, (i) dört kenarlı olma, (ii) kapalı şekil olma ve (iii) karşılıklı kenarlarının birbirine paralel olması gibi paralelkenarın sahip olması gereken kritik özellikleri göz önünde bulundurdıkları görülmüştür. Bu gruptaki öğrenciler, kritik özelliklerle ilgili farkındalıkları sayesinde paralelkenar için örnek olmayan şekilleri kolaylıkla ayırt edebilmişlerdir. Bu öğrenciler paralelkenarı sırasıyla şu

şekilde tanımlamıştır: “Dört kenarı bulunan karşılıklı kenarı birbiriyle kesişmeyen çokgendir (S6, yüksek düzey öğrenci)” ve “Karşılıklı kenarları birbirine paralel ve eşit olan dört kenarlı bir şekildir (S10, orta düzey öğrenci)”. Her ne kadar matematiksel anlamda tüm gerek ve yeter koşulları sağlayan ve içeriğinde uygun matematiksel dil barındıran tanımlar sunmasalar da, bu öğrencilerin yaptıkları paralelkenar tanımları da onların paralelkenar şeklinin kritik özelliklerinin farkında olduklarını göstermiştir.

3.2. Paralelkenar Ayırt Etmede Kısmi Hiyerarşik Yaklaşımlar

Elde edilen veriler, genel olarak başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin (S3-S4-S5-S7-S8-S12) dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkileri kısmi açıdan düşünerek bir şeklin paralelkenar örneği olup olmadığına karar verdiğini göstermiştir. Bu öğrenciler, genel olarak eşkenar dörtgeni bir paralelkenar örneği olarak görürken dikdörtgen ve kareyi bir paralelkenar örneği olarak kabul etmemiştir. Özel olarak, Tip 2 ayırt etme grubuna dahil edilen öğrencilerden S3-S5-S7-S12 ölçme aracındaki 1-5-9 no.lu şekilleri bir paralelkenar örneği olarak göstermiştir. Tip 2 ayırt etme grubuna giren bir öğrencinin paralelkenar ayırt etme sürecini daha net gösterebilmek için görüşme verileri aşağıda sunulmuştur.

Araştırmacı: Paralelkenar olan şekilleri nasıl belirlediğini açıklar mısın?

S5: Mesela 1 nolu şekil paralelkenardır çünkü AB kenarı ile DC kenarı birbirlerine paraleldir. Aynı şekilde BC kenarı ile de AD kenarı birbirine paraleldir. 1, 5 ve 9 nolu şekiller için aynı yolu izledim.

Araştırmacı: Peki, paralelkenar olmayan şekillere nasıl karar verdin? Mesela 2 nolu şekil neden bir paralelkenar olmadı?

S5: Çünkü burada kenarları paraleldir ve bir dörtgendir ama her açısı 90° olduğu için paralelkenar olmaz. Mesela 4 nolu şekil de bir karedir. Yine tüm kenarları paralel ama tüm açıları 90° olduğu için [paralelkenar] olmaz.

Araştırmacı: Paralelkenar olması için kenarların paralel olması yetmez mi?

S5: Karşılıklı açıları da eşit olacak. Tüm açılarının eşit olmaması gerekiyor.

Araştırmacı: Kareyi göstererek bunların karşılıklı açıları eşit değil mi?

S5: Ama birbirinden farklı olacak. Derste öğretmen de [1 nolu şekli göstererek] böyle çizdi. Defterime öyle çizdiğimi hatırlıyorum.

Yukarıdaki görüşme verisinde de görüldüğü gibi araştırmacı öğrenciye paralelkenar olan şekilleri nasıl belirlediğini sorduğunda, öğrencinin verdiği cevap onun paralelkenar için önemli olan kritik özelliklere odaklandığını göstermektedir. Fakat aynı şekilde paralelkenar olmayan şekilleri nasıl ayırt ettiği sorulduğunda öğrencinin paralelkenarın prototip görüntüsünde yer alan açıların durumunu göz önünde bulundurarak dikdörtgeni ve kareyi bir paralelkenar kabul etmediği görülmektedir. Çünkü dikdörtgen ve karede tipik bir paralelkenar örneğinden farklı olarak tüm açıları 90 derecedir. Bu da öğrencinin kavram imgesine etki eden prototip şekillerin kritik olmayan özelliklerinin geometrik şekilleri ayırt etmede aşırı özelleme hatasına neden olduğunu göstermektedir. Öğrencinin açıklamalarından da görüldüğü gibi bu hatanın nedeni öğretmenlerin derslerde genel olarak tipik örnekleri vermeleri olabilir.

Diğer taraftan, yine Tip 2 ayırt etme grubunda yer alan ve paralelkenar şekillerini kısmi hiyerarşik bir yaklaşımla belirleyen iki öğrenci (S4 ve S8), örnek uzaylarında yer alan prototip şekillerin etkisi altında seçimler yapmıştır. Bu öğrenciler, ölçme aracındaki 1-5-8-9-10 no.lu şekilleri paralelkenar olarak belirlemişlerdir. Yani, bu öğrenciler prototip bir

kare örneği olan 4 no.lu şekli bir paralelkenar örneği olarak düşünmezken, dönmüş kare olan 8 no.lu şekli bir eşkenar dörtgen örneğine benzeterek paralelkenar örneği olarak almıştır. Benzer şekilde, Şekil 3'te yer alan 10 no.lu dönmüş dikdörtgen şeklini bir paralelkenar örneği olarak alırken, 2 no.lu prototip dikdörtgen şeklini paralelkenar şekil grubuna dâhil etmemiştir. Hatta bu öğrencilerin yaptığı paralelkenar tanımları da onların paralelkenarı kısmi hiyerarşik bir yaklaşımla ayırt ettiklerini net bir biçimde ortaya koymuştur. Mesela, S4 paralelkenarı şu şekilde tanımlamıştır: “*Paralelkenar deyince aklıma kare ve dikdörtgenin uçlarında bastırılmış bir şekilde yamultulmuş hali geliyor (S4, Yüksek başarı düzeyi)*”. Öğrencinin yaptığı bu tanım aslında paralelkenarın prototip şeklinin görsel imgesine dayanan bir tarifdir. Bu tariften de kolaylıkla anlaşılıyor ki öğrenci eşkenar dörtgen örneğinde ve kare ile dikdörtgenin dönmüş olan örneklerinde o istediği “*bastırılmış/yamultulmuş olma*” durumuna odaklanmıştır. Böylece, bu öğrenciler paralelkenarları örnek olan ve olmayan şekiller arasından prototip şekillerin etkisi altında kısmi hiyerarşik bir yaklaşımla ayırt etmişlerdir.

3.3. Paralelkenar Ayırt Etmede Hiyerarşik Olmayan Yaklaşımlar

Tablo 2’de görüldüğü üzere farklı matematik başarı gruplarında bulunan dört öğrenci (S1, S2, S11, S15) paralelkenarı ayırt etmede hiyerarşik olmayan bir yaklaşım sergilemiştir. Diğer bir deyişle, bu dört öğrenci paralelkenar kümesinin dikdörtgen, kare ve eşkenar dörtgeni kapsayamayacağını düşünmüştür. Özel olarak, S2 ve S15 Şekil 3’te sadece 1 ve 9 no.lu şekilleri paralelkenar örneği olarak ayırt ederken, S1 ve S11 ise prototip şekillerin etkisi altında 1, 9 ve 10 no.lu şekilleri paralelkenar olduğu sonucuna varmıştır. Tip 3 ayırt etme grubuna dahil olan ve prototip şekil algısıyla paralelkenarı belirleyen bir kişinin paralelkenar şekillerini nasıl ayırt ettiği aşağıda sunulmuştur.

Paralelkenar denen şekilde kenarları birbirine paralel olarak düşünmemiz gerekiyor. Paralelkenarın belli bir şekli var zaten. Ona göre seçimler yapacağım. 1 olur, 2 olmaz çünkü açıları dik. 3 yamuk zaten [kenarları] birbirine paralel olmuyor. 4 kare zaten olmaz açıları yüzünden. 5 bir eşkenar dörtgen. Aslında bu olabilir. Yine de bundan pek emin olamadım. 6’da paralel kenarlar yok. 7 yamuk şekli olmaz. 8 den de çok emin olamadım. Fakat 5 ile 8 sanırım paralelkenar olmaz. Çünkü paralelkenarda sadece karşılıklı kenarları eşit olması gerekir. 10 da bir paralelkenardır. 11, 12, 13, 14 zaten olmaz. Onlar 1 nolu şekle hiç benzemiyor (S1, yüksek düzey öğrenci)

S1’in yaptığı açıklamalardan açıkça görülüyor ki öğrenci prototip bir paralelkenar şekline odaklanarak tüm şekilleri paralelkenar olup olmama açısından incelemiştir. Sonuç olarak, bir şeklin sahip olması gereken kritik özellikler ve formal kapsayıcı tanımlarda yer alan gerek ve yeter koşulları düşünmeden yapılan seçimler, öğrencileri kritik olmayan özelliklere odaklanarak prototip şekillere dayalı çıkarımlar yapmaya ve paralelkenarı bu yönde ayırt etmeye sürüklemiştir. Diğer taraftan, paralelkenarı prototip şekil imgelerinin etkisi altında kalmadan hiyerarşik olmayan bir yaklaşımla ayırt eden iki öğrenciden birinin yaptığı açıklamalara da aşağıdaki veri kesitinde yer verilmiştir.

1 nolu şekilde [karşılıklı kenarları kastederek] bu doğru parçaları ve bu doğru parçaları aynı yöndeler. 3 zaten olmaz. 2 ve 4 nolu şekilde de karşılıklı kenarlar paralel ama şekillerin eğik durması lazımdı. 5 bildiğimiz eşkenar dörtgen. 8 olmaz kenarları eşit uzunlukta. 9 olur. Ama 10 bir dikdörtgen olduğu için olmaz. Geriye kalanlar zaten paralelkenar olmaz (S11, orta düzey öğrenci).

3.4. Paralelkenar Ayırt Etmede rnek Olmayanlara Dayalı Yaklaşımlar

Düşük başarılı öğrencilerin büyük bir bölümü paralelkenar ayırt etmede örnek olmayan şekillere paralelkenar örneği muamelesi yapmıştır. Yani, toplamda altı öğrenci (S9, S13, S14, S16, S17, S18) paralelkenar olmayan yamuk, altıgen ve paralel doğru parçalarının de birer paralelkenar olduğunu düşünmüştür. Bu öğrencilerden S17 ve S18 paralelkenarı dört kenarı olan ve içinde paralel kenarlar barındıran bir şekil olarak algıladığından Şekil 3'te yer alan 1-2-3-4-5-7-8-9-10-12 no.lu şekilleri paralelkenar olarak almışlardır. Diğer bir deyişle, bu öğrencilerin paralelkenara ait örnek uzaylarında en az bir çift karşılıklı kenarı birbirine paralel olan dörtgenler yer almıştır. Bu öğrenciler paralelkenarı ayırt ederken her ne kadar gerek koşullara dikkat etseler de yeter koşulları sağlamayan şekilleri de paralelkenar olarak değerlendirmişler ve aşırı genelleme hataları yapmışlardır.

Diğer yandan, S9, S13, S14 ve S16 ise paralelkenarı sadece paralel kenarlara sahip olan bir şekil olarak düşündüğü için Şekil 3'te yer alan örneklerden 6 no.lu şekil hariç tümünü paralelkenar olarak seçmiştir. Bu öğrencilerin bazılarının paralelkenarı nasıl ayırt ettikleri aşağıda sunulmuştur.

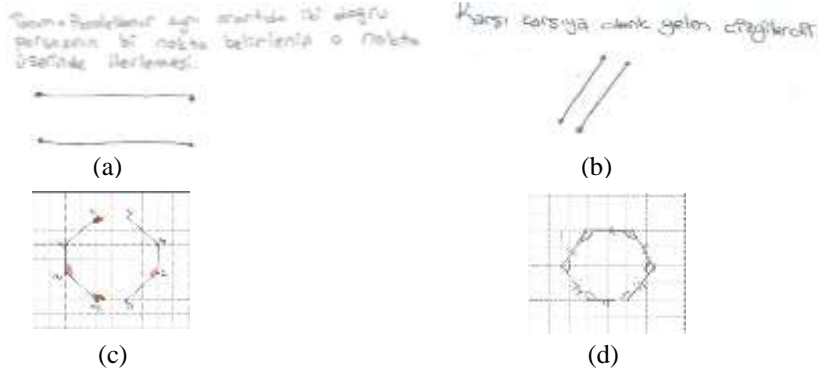
Araştırmacı: Paralelkenar seçimlerini neye göre yaptın?

S9: Aslında ben 7 nolu şekilde biraz takıldım. [IJ] ile [JK] paralel ama diğer iki kenar paralel olmuyor. İki tane paralel olması yeter mi yoksa bir tane olsa olur mu diye düşündüm. Ama sonuçta paralelkenar diyor. Paralelkenarının olması yeter diye düşündüm. 6 nolu şekilde hiç paralelkenar yok. O yüzden olmaz dedim.

Araştırmacı: Peki 11, 13 ve 14'ün paralelkenar olduğunu nasıl anladın?

S9: Aslında onlar öğretmenimizin bize çizdiği şekle pek benzemiyor ama hepsinin paralel kenarları var. Paralel kenarı olduğundan onlar da paralelkenar olur.

Yukarıdaki görüşme verisi açıkça göstermiştir ki öğrenci her ne kadar yamuk şekillerinin birer paralelkenar örneği olup olmaması durumunda kararsızlık yaşasa da öğrencinin paralelkenar ile ilgili sahip olduğu örnek uzayda sadece paralel kenarlara sahip olan her şeklin bir paralelkenar örneği olarak değerlendirildiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin paralelkenar için örnek olmayan şekilleri de paralelkenar olarak ayırt ettikleri yönündeki bulgular tanımları ve çizimleriyle de desteklenmiştir (bkz. Şekil 4). Daha iyi açıklamak gerekirse, Şekil 4-a ve Şekil 4-b'de görüldüğü üzere S9 ve S13 paralelkenarı iki doğru parçasıyla ilişkilendirmiş ve uygun olmayan bir matematiksel dil kullanarak paralelkenara ait hatalı tanım yapmışlardır. Ayrıca paralelkenar olarak akıllarına ilk gelen şekil iki paralel doğru parçası olmuştur. Benzer şekilde, öğrencilerin örnek olmayan şekillere dayalı paralelkenar ayırt etme durumunu destekleyen verilere S14 ve S15'in yaptığı çizimlerde de rastlanmıştır. Çünkü öğrencilerden en az üç farklı paralelkenar örneği üretmeleri istendiğinde Şekil 4-c deki gibi sekizgen veya Şekil 4-d'deki gibi altıgen şekilleri oluşturma eğilimi göstermişlerdir. Sonuç olarak, bu grupta bulunan öğrencilerin paralellik kavramına ilişkin bilgileri olsa da paralelkenarın dört kenarı olan kapalı bir dörtgen olma durumuna dair yeterli bilgileri olmadığı tespit edilmiştir.



Şekil 4. (a) S9'un paralelkenarı tanımlaması ve çizimi (b) S13'ün paralelkenarı tanımlaması ve çizimi (c) S14'ün paralelkenarı örneği (d) S15'in paralelkenarı örneği

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Farklı başarı düzeylerinde bulunan ortaokul öğrencileriyle yapılan bu nitel araştırma, öğrencilerin paralelkenarı farklı biçimlerde ayırt ettiklerini ortaya çıkarmıştır. Sonuçlar, kısıtlı sayıda öğrencinin arzu edilen ve Tip 1 olarak isimlendirilen hiyerarşik yaklaşımla paralelkenar şekillerini eksiksiz ve hatasız ayırt ettiğini göstermiştir. Diğer taraftan, matematik başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin çoğunlukla Tip 2 olarak isimlendirilen kısmi hiyerarşik bir yaklaşımla paralelkenarı diğer şekiller arasından ayırt ettiği tespit edilmiştir. Bu gruptaki öğrenciler eşkenar dörtgeni bir paralelkenar örneği olarak alırken kare ve dikdörtgeni bir paralelkenar örneği olarak değerlendirmemiştir. Bu durumun alan yazında belirtilen “*ortak bilişsel yollar*” (common cognitive paths) olarak isimlendirilen durumla ilişkili olduğu düşünülmektedir. Vinner ve Herskowitz (1980), “*ortak bilişsel yol*” kavramını birçok öğrencinin benzer şekilleri tanıırken izlediği yolu gösteren istatistiksel bir metot olarak tanımlamaktadır. Bu bağlamda, dörtgenlerin hiyerarşik ilişkilerini birçok sınıf düzeyinde nasıl anladığının araştırıldığı ulusal ve uluslararası çalışmalar da katılımcıların eşkenar dörtgeni bir paralelkenar olarak algıladığı için paralelkenar/eşkenar dörtgen ortak bilişsel yol kullanımını tespit etmişlerdir. Örneğin, Okazaki ve Fujita (2007) 234 dokuzuncu sınıf Japon öğrenci ve 111 İskoç sınıf öğretmeni adayıyla yaptıkları çalışmada dörtgenlerin hiyerarşik yapısının anlaşılması bakımından paralelkenar/eşkenar dörtgen ortak algısına yönelik bilişsel yol izlendiğini ortaya koymuştur. Benzer sonuçlara, ulusal alan yazında Türnüklü'nün (2014) 68 ilköğretim matematik öğretmeniyle yaptığı çalışmada da ulaşılmıştır. Buradan yola çıkarsak Türkiye'de ilköğretim matematik öğretmen adaylarında görülen ortak bilişsel yolun aynı şekilde ortaokul öğrencilerde de görülmesi aslında çok beklendik bir durum olarak karşımıza çıkmıştır. Ayrıca sonuçlar her başarı düzeyinden bazı öğrencilerin Tip 3 olarak isimlendirilen hiyerarşik olmayan bir yaklaşımla paralelkenarları ayırt ettiğini göstermiştir. Bu öğrenciler “*paralelkenar eğik durması gerekir*” ve “*paralelkenarda kenarlar birbirine dik olmaz*” veya “*paralelkenarın tüm kenarları eşit olmaz*” gibi yargılarla kareyi, dikdörtgeni ve eşkenar dörtgeni paralelkenar olarak görmemiştir.

Diğer bir beklendik sonuç da yarı hiyerarşik ve hiyerarşik olmayan paralelkenar ayırt etme yaklaşımına etki eden prototip şekil algılarının tespit edilmiş olmasıdır. Öğrencilerin paralelkenar kavramına yönelik prototip şekillerin baskın olduğu kısıtlı

kavram imajları onların paralelkenar ile ilgili örnek uzaylarında prototip şekilleri kolay ulaşılabilir örnekler durumuna getirmiştir (Zaslavsky ve Zodik, 2014). Bu durum nedeniyle de öğrenciler dönmüş bir kare örneğini eşkenar dörtgen olarak, yine dönmüş bir dikdörtgen örneğini ise paralelkenar olarak kabul ederken, aynı şekillerin dönmemiş hallerinin kesinlikle bir paralelkenar rneği teşkil etmediğini belirtmiştir. Elde edilen bu sonuçlar “*kritik olmayan özelliklere bağlı muhakeme*” ile ilişkilendirilmiştir (Fujita, 2012; Tsamir ve arkadaşları, 2008). Bu durum aslında öğrencilere sunulan kitaplar ve öğretmenlerin ders işlerken kullandıkları örneklerle ilgili olabilir. Çünkü konu ile ilgili yapılan ulusal çalışmalar ilköğretim matematik ğretmenlerinin ve sınıf ğretmenlerinin de dörtgenlere yönelik örnek uzaylarında prototip ekil yoğunluklu olduğunu göstermektedir (zdemir-Erdoğan ve Dur, 2014; Türnüklü, Gündoğdu-Alaylı ve Akkaş, 2013). Ayrıca, daha güçlü bir kanıt olarak, Türnüklü (2014) ilköğretim matematik ğretmen adaylarının dörtgenlerin öğretimine yönelik hazırladıkları ders planlarında genellikle prototip şekillere yer verdiklerini ortaya çıkarmıştır. Genel olarak araştırmacılar, öğrencilerin kavramlarla ilgili sahip oldukları kısıtlı algılarının onların bir şeklin kritik özelliklerini sorgulamadan görsel veya bazı kritik olmayan özelliklere odaklandığı sonucuna varmıştır. Elde edilen bu sonuç, Fischbein’in (1993) ve Tall ve Vinner’in (1981) kavramın tanınmasında biçimsel ynn kavramsal yönden daha baskın olduğuna dair görüşünü güçlü bir şekilde desteklemiştir.

Öğrenciler bir geometri kavramıyla ilgili sadece hiyerarşik veya prototiplik açısından kısıtlı bir örnek uzaya sahip olmayabilir. Bu bağlamda, matematik başarı düzeyi düşük olan öğrencilerin paralelkenarı ayırt ederken paralelkenar için örnek olmayan şekillere paralelkenar muamelesi yaptıklarını gösteren sonuçlar bu çalışmada ulaşılan en zgn sonuçlar olmuştur. Çünkü elde edilen sonuçlar, örnek olmayan şekillerin öğrencilerin paralelkenar ile ilgili örnek uzayında sezgisel olarak bir rnekmiş gibi algılandığını ortaya çıkarmıştır. Daha detaylı açıklamak gerekirse, sonuçlar öğrencilerin paralelkenarın kritik özellikleri arasında yer alan kapalılık ve bir dörtgen olma durumlarını sezgisel olarak bilseler bile geometrik şekillerde sadece karşılıklı bir çift paralelkenar bulunmasını yeterli görerek yamukları paralelkenar kabul etmişlerdir. Diğer taraftan, bazı öğrenciler de paralelkenar durumunu sadece paralel kenarları olan herhangi bir ekle indirgeyerek içbükey, dışbükey altıgene veya birbirine paralel iki doğru parçasına dahi paralelkenar muamelesi yapmıştır. Bu durum Türkçe kelimelerin söz dlimsel benzerlikleri ve anlamsal farklılıklarıyla ilgili olabilir. Çünkü ğrenciler “*paralelkenar*” kavramından ziyade “*paralel kenarlar*” kavramına odaklanmıştır. Bu söz dzimsel benzerlikten yola çıkarak paralel kenarları olan şekilleri paralelkenar rneği görmüş olabilirler. Böylece, ğrencilerin kullandığı dilsel muhakeme onların paralelkenarı ayırt ederken yanlış bir yargıya varmalarına yol açmış olabilir. Öğrencilerin paralellik ve diklik ile ilgili örnek uzaylarını araştırıldığı bir çalışmada da benzer sonuçlara varılmıştır (Ulusoy, 2016). Sonuçlar, ğrencilerin “*dikeylik*” ile “*dik keşişme*” kavramlarını dilsel benzerlik nedeniyle karıştırdıklarını göstermiştir. Benzer bir sonuca da dörtgenler içindeki yamuk kavramının ayırt edilmesi sürecinde rastlanmıştır (Ulusoy, 2015). Araştırmacı, ğrencilerin günlük kullanımda yer alan “*yamuk*” kelimesi ile bir dörtgen olan yamuğun karıştırarak dörtten fazla kenarı olan tüm çokgenleri ve kenarları doğru parçalarından oluşmayan şekilleri yamuk olarak ayırt ettikleri sonucuna varmıştır. Bu gibi çalışmalardan yola çıkıldığında, matematiksel ve günlük dil kullanımının öğrencilerin kavramlarla ilgili algılarında ne gibi etkilere yol atığının daha detaylı çalışmalarla ortaya çıkarılması önerilebilir. Sonuç olarak, bu araştırmada, öğrencilerin örnek olmayan durumları neye göre bir paralelkenar rneği olarak gördüklerini net bir

şekilde ortaya çıkarmıştır. Böylece öğrencilerin yaptığı aşırı genelleme hataları tespit edilmiştir.

Öğrencilerin prototip ve hiyerarşik olmayan algılarını gidermenin taşıdığı önem tabii ki göz ardı edilemez. Fakat onların bir kavramla ilgili örnek uzaylarını örnek teşkil etmediği halde örnek olarak gördükleri şekillerden arındırmanın çok daha önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü bu arındırma işlemi, öğrencilerin sahip olduğu yanlış kavrayışları ve zihinlerindeki aşırı genellemelere dayalı hatalı kavram imajlarını gidermeye yardım ederek onların bir kavrama ait kritik özelliklerle ilgili farkındalıklarını arttırmalarını sağlayabilir. Bu bağlamda, üniversitedeki matematik eğitimcileri geometri öğretimine yönelik ele aldıkları derslerde bir kavramın örnek teşkil etmeyen durumlarının öğretim sürecinde nasıl kullanılabileceğini tartışabilirler (Clements, Swaminathan, Hannibal ve Sarama, 1999). Çünkü sezgisel olan (intuitive) ve sezgisel olmayan (non-intuitive) örnek olmayan şekillerin (non-examples) öğretmen eğitiminde kullanılması, öğrencilerin zihnindeki prototiplik etkisini azaltmak ve ilgili kavrama ait olan örnek uzaylarını zenginleştirme açısından önerilmektedir (Wilson, 1986). Diğer yandan, bu araştırma sonuçları öğrencilerin paralelkenarı ayırt etme süreçlerinde yaşadıkları aşırı özelleme ve aşırı genelleme hatalarını gösteren katalog bir bilgi sunmuştur. Bu bilgiler, bu konu üzerinde öğrencilerin yaşadığı problemleri gidererek onların kavrama yönelik örnek uzaylarını zenginleştirecek öğretimsel deney veya tasarım tabanlı araştırma yapmak isteyen araştırmacılara yol gösterebilir. Örneğin, paralelkenar belirleme ile ilgili ölçme aracı kullanılarak öğrencilerin bir öğretimsel deney öncesi ve sonrası kavrayışları tespit edilebilir veya hangi öğrencinin ne tip bir ayırt etme yaklaşımı sergilediği o öğrenciye uygulanacak öğretimsel deneylerin içeriğini belirleyebilir.

KAYNAKÇA

- Annells, M. (2006). Triangulation of qualitative approaches: hermeneutical phenomenology and grounded theory. *Journal of Advanced Nursing*, 56(1), 55-61.
- Burger, W., & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 31-48.
- Cansiz-Aktaş, M. (2016). Turkish high school students' definitions for parallelograms: appropriate or inappropriate?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 583-596.
- Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212. doi:10.2307/749610.
- De Villers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689>.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 60-72.
- Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' knowledge of parallelograms. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26(2), 25-30.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.
- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry: Theory, research and practical perspectives*. Boston: Sense Publishers.
- Maher, C. A., & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 102-109). Netherlands: Springer. DOI 10.1007/978-94-007-4978-8
- Milli Eğitim Bakanlığı [Ministry of National Education] (MoNE) (2013). *Ortaokul matematik dersi* (5, 6, 7, ve 8. Sınıflar) öğretim programı, Ankara, Turkey: Author.
- Miles, M. B., & Huberman, M. (1994). Data management and analysis methods. In K. D. Denzin., & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 428-444). California: SAGE.
- Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41-48). Seoul: PME.
- Özdemir-Erdogan E. , & Dur Z. (2014). Preservice mathematics teachers' personal figural concepts and classifications about quadrilaterals. *Australian Journal of Teacher Education*, 39(6), 106 – 133.
- Pereira-Mendoza, L. (1993). What Is a Quadrilateral?. *Mathematics Teacher*, 86(9), 774-776.

- Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81–95.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, 47(3), 497-509.
- Ubuz, B., & Üstün, I. (2004). Figural and conceptual aspects in identifying polygons, *Eurasian Journal of Educational Research*, 16, 15-26.
- Ulusoy, F. (2016). The role of learners' example generation and determination of two parallel and perpendicular line segments. In Csíkós, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 299–306. Szeged, Hungary: PME.
- Ulusoy, F. (2015). A meta-classification for students' selections of quadrilaterals: the case of trapezoid. In K. Krainer ., & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 598-607). Charles University in Prague: Faculty of Education and ERME.
- Türnüklü, E. B. (2014). Construction of inclusion relations of quadrilaterals: Analysis of pre-service elementary mathematics teachers' lesson plans. *Education and Science*, 39(173), 198-208.
- Türnüklü, E., Alaylı, F. G., & Akkaş, E. N. (2013). Investigation of prospective primary mathematics teachers' perceptions and images for quadrilaterals. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 13(2), 1225-1232.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. *Proceedings of the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 177-184, Berkeley: CA.
- Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(2), 130-139.
- Yıldırım, A., & Simsek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6.basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 67–78.
- Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2014). Example-generation as indicator and catalyst of mathematical and pedagogical understandings. Y. Li, E. A. Silver., & S. Li (Eds.), *Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices* (pp. 525-546), New York: Springer International Publishing.

EXTENDED ABSTRACT

1. Introduction

Among quadrilaterals, parallelogram is crucial in terms of comprehending relationship between quadrilaterals. Studies indicate that learners generally have difficulties when defining and explaining hierarchical relations among quadrilaterals in terms of parallelogram due to prototypical and non-hierarchical understandings (Cansız-Aktaş, 2016; Fujita, 2012; Türnükli, 2014; Türnükli et al., 2013; Özdemir-Erdoğan, & Dur, 2014). Parallelogram has different examples because rhombuses, squares, and rectangles are also examples of parallelogram based on its inclusive definition. In aforementioned studies, researchers generally focused on how learners understand hierarchical relations between parallelogram and square, rhombus, and rectangle. However, in recent years, mathematics educators suggest that focusing on not only example but also non-example is valuable to detect all details of the limitations in students' examples spaces in order to develop effective examples and tasks when teaching mathematical concepts (Zaslavsky, & Zodik, 2014). Thus, they have begun to see identification tasks involving a set of examples and non-examples of a concept in order to get more details about students' comprehension about specific mathematical concepts (Tsamir et al., 2008; Tsamir et al., 2015; Ulusoy, 2015, 2016). In a similar vein, this study aimed to understand how middle school students identify parallelograms among many examples and non-examples.

2. Method

In this phenomenological study, participants were eighteen seventh grade students having different mathematics achievement levels in a public middle school. Studies dealing with concept formation highlight the role of carefully selected examples and non-examples in supporting the distinction between critical and non-critical features and the formation of rich concept images and example spaces. In the present study, it was made a great effort in preparation of examples and non-examples in the tasks by considering the previous studies. In this regard, we prepared *parallelogram identification task* in which there are seven examples of parallelogram and seven non-examples of parallelogram (see figure 3). Thus, we collected data via individual clinical interviews and *parallelogram identification task*. In the interviews, students were firstly asked to define parallelogram and to construct at least three different parallelogram examples on a grid paper. This process was useful to understand how students generate definitions and examples of parallelogram. Then, they were asked to identify the examples of parallelograms in the parallelogram identification task. The data was analyzed by classifying students' responses according to codes and themes that were constructed by the researchers based on the previous literature and the current data. More specifically, we coded learners' identifications of parallelogram based on four categories. In the first category, we grouped learners' hierarchical identifications. In the second category, we grouped learners' partial hierarchical identifications. In the third one, we categorized learners' non-hierarchical identifications. Finally, we grouped learners' identification based on non-examples.

3. Findings, Discussion and Results

Middle school students' identification types were grouped in the following categories: identifications based on (i) hierarchical examples, (ii) partial-hierarchical examples, (iii) non-hierarchical examples, and (iv) non-examples. A few students identified figures

based on hierarchical approach treated only prototypical hierarchical parallelograms as an example. Hence, they considered inclusive relations among quadrilaterals and they selected rhombuses, rectangles, and squares as the examples of parallelogram. On the other hand, some students using partial hierarchical approach identified figures under the influence of common cognitive paths. As a result, they considered that rhombus is a parallelogram, but rectangle and square are not examples of parallelogram due to equal measurement of angles or equal length of sides. Furthermore, some students identified figures based on non-hierarchical approach. For this reason, they solely focused on prototypical and non-hierarchical examples of parallelograms. Such results support the results of some national studies (Cansız-Aktaş, 2016; Türnüklü, 2014; Türnüklü et al., 2013; Özdemir-Erdoğan, & Dur, 2014) and international studies (Fujita, 2012; Okazaki & Fujita, 2007). At this point, in order to prevent the formation of learners' prototypical concept images, we recommend that teachers need to focus on the definitions by giving examples and non-examples (e.g. quadrilateral with one pair of parallel sides or a regular hexagon) of the parallelogram.

Most importantly, students using an identification approach based on non-examples considered two parallel line segments or convex and concave hexagons as the examples of parallelogram. As a result, they made overgeneralization errors. At this point, we recognized that mathematical language could influence on students' overgeneralization errors because students generally reference the meaning of "*paralelkenar*" in Turkish ordinary language instead of its conceptual meaning. In Turkish language, "*paralelkenar*" corresponds with "*parallelogram*" and it is formed by combinations of the words of "*paralel-parallel*" and "*kenar-the side*". Because of the combinations of words "*paralel*" and "*kenar*" in "*paralelkenar*", students conceptualized parallelogram considering linguistics structure of Turkish language instead of considering its conceptual properties. In this sense, it is recommended that further studies are needed to investigate the possible effects of linguistic factors on identifications of geometric concepts. As an implication, it is recommended that the catalogue proposed in this study can be utilized in prospective teacher education programs to explain students' identification types of parallelogram. In this sense, educators can give opportunities prospective teachers to analyze students' example spaces. Hence, they have a chance to expand and enrich their understanding about students' mathematical thinking and they can develop effective ways to purify students' overgeneralization and underspecification errors.