SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE
e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received
19-12-2016
Kabul/Accepted
01-04-2017

Doi
10.16984/saufenbilder.279668

(2+1) Boyutlu difüzyon denkleminin eşdeğerlik grupları

Saadet Özer[1]

ÖZ

Bir diferansiyel denklemler grubu keyfi fonksiyonlar, parametreler içeriyorsa, elimizde aynı yapıda diferansiyel denklemler ailesi var demektir. Klasik fiziğin hemen hemen tüm alan denklemleri, içerdiği parametrelerin farklı yapıları için, değişik malzemeleri temsil eder. Eşdeğerlik grupları, verilen bir diferansiyel denklem ailesini değişmez bırakan dönüşüm grupları olarak tanımlanır. Bu nedenle diferansiyel denklem ailelerinin eşdeğerlik grupları, aynı aileye ait, farklı denklemler arası ilişkileri inceleme açısından önemli bir çalışma alanıdır. Bu çalışmada, lineer olmayan difüzyon denklemin eşdeğerlik grupları, Lie grupları uygulaması çerçevesinde incelenmiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eşdeğerlik grupları, Lie grupları, Difüzyon denklemi

Equivalence groups of (2+1) dimensional diffusion equation

ABSTRACT

If a given set of differential equations contain some arbitrary functions, parameters, we have in fact a family of sets of equations of the same structure. Almost all field equations of classical physichs have this property, representing different materials with various paramaters. Equivalence groups are defined as the group of transformations which leave a given family of differential equations invariant. Therefore, equivalence group of family of differential equations is an important area within the framework of the relations between different equations of the same family. In this work the equivalence groups of nonlinear diffusion equation are investigated as application of Lie groups and their results are discussed.

Keywords: Equivalence groups, Lie groups, Diffusion equation

[1] İTÜ Fen Edebiyat Fak. Matematik Mühendisliği Böl., 34469, Istanbul, Turkey

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Keyfi fonksiyon ya da parametre içeren diferansiyel denklemler, aynı yapıdaki diferansiyel denklem ailelerini ifade eder. Klasik fiziğin hemen hemen tüm alan denklemleri farklı malzemelerin davranışları anlamında bu yapıdadır. Bu tarz denklemlerin yapısal özelliklerini incelemede Lie Grupları, değişmez çözümlerin elde edilmesi, denklemlerin sınıflandırılması ve birbirine denk aynı aileden fakat farklı denklemler arasındaki dönüşümlerin belirlenmesi için güçlü algoritmalar üretir. Bilinen anlamı ile simetri grupları bir denklemin çözüm ailelerini sınıflandırmak için kullanılır iken, eşdeğerlik grupları, denklem ailesinin yapısını korumakla birlikte, içindeki keyfi fonksiyonların değişimine izin verdiği için, uygun dönüşümler bulunabildiği takdirde davranışı bilinen bir denklem ile daha karmaşık olan bir diğeri arasında dönüşümlerin mümkün sınıflarını üretir. Eşdeğerlik Grupları hakkında genel bilgi [1-3] kaynaklarında bulunabilir.

Lie`nin klasik değişmezlik yaklaşımının eşdeğerlik dönüşümlerinin gruplarını üretmek için kullanılabileceği fikri ilk Ovsiannikov`a dayanır [4]. Ardından birçok araştırmacı bu fikri uygulamaya koymuş, geliştirmiştir. Yapının üretilmesi için değişik algoritmalar geliştirilmiştir. Bunlar [1,5,6,7] kaynaklarından incelenebilir.

Bu çalışmada (2+1) boyutlu lineer olmayan difüzyon denklemi ele alınmıştır. Difüzyon denklemleri matematiksel fiziğin birçok alanında geniş uygulamaya sahip olmaları nedeni ile birçok alandan araştırmacı tarafından ele alınmış ve yaklaşık çözümler ya da sayısal çözümler dışında, Lie grupları analizi alanında da ilgi görmüştür. Bu alanda ilk çalışma olarak Lie`nin çalışması [8] referans verilebilir. 1 boyutlu lineer olmayan difüzyon denklemleri üzerine ilk çalışma ise Ovsiannikov`a dayanır [9]. Değişik difüzyon denklemlerinin simetri dönüşümleri, sınıflandırma analizi ve kesin çözümler üzerine şu referanslar incelenebilir: [10-16]. Ayrıca, bu çalışma çerçevesinde ele almadığımız fakat eşdeğerlik grupları ile üretilen diferansiyel değişmezler üzerine okuyucu ilgi duyar ise [17-21] çalışmalarına göz atabilir.

Bu çalışmanın amacı

$$u_t - f(u,u_x)_x - g\big(u,u_y\big)_y = 0$$

denkleminin eşdeğerlik dönüşümlerinin grup yapısını belirlemektir. Burada u bağımlı değişkeni, (x,y,t) bağımsız değişkenleri temsil etmektedir. Eşdeğerlik gruplarının üreteçlerini belirlemek için, klasik yöntem yerine, 2. bölümde ayrıntılı özeti verilen Özer ve Şuhubi`nin [3, 25] çalışmalarında elde ettikleri izovektör yöntemi olarak adlandırılan, geometrik yaklaşım kullanılmıştır. Yöntem, sonsuz küçük üreteçlerin belirleyici denklemlerinin açık çözümlerini verdiği için, gereksiz bazı ek denklemler ile uğraşmamak adına avantajlıdır.

Okuyucuya kolaylık olması açısından belirtmek isteriz ki, çalışmanın 2. bölümünde genel bilgiler ile dönüşüm gruplarını elde etmek için kullanılan yöntemin özeti verilmiş, 3. bölümde dönüşüm gruplarının üreteçleri elde edilmiş, dönüşümün yapısal özellikleri belirlenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER (PRELIMINARIES)

2.1. Eşdeğerlik Grupları (Equivalence Groups)

Özellikle doğa yasalarını modelleyen diferansiyel denklem takımları, modelledikleri ortamın fiziksel özelliklerini yansıtan bazı keyfi fonksiyon ya da parametreler barındırırlar. Bu denklemleri, yapısal olarak aynı olup, esas olarak birbirlerinden parametre ile ayrıldıklarından, diferansiyel denklem aileleri olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 1:

x_i ler n adet bağımsız değişkeni, u_α lar N adet bağımlı değişkeni, ϕ_k lar ise, bağımlı, bağımsız değişkenler ve onların türevlerine bağlı, m adet keyfi fonksiyonu temsil edecek şekilde

$$\mathcal{F}\big(x_i, u_{\alpha(p)}, \phi_{k(q)}(x_i, u_{\alpha(p)})\big) = 0$$

denklemi bir diferansiyel denklem ailesi olarak adlandırılır. Burada $i = 1,2,\ldots,n$, $\alpha = 1,2,\ldots N$, $k = 1,2,\ldots.m$ dir ve $u_{\alpha(p)}$, bağımlı değişkenler ve onların keyfi mertebeden türevlerinin değişkenler grubunu ifade etmektedir. $\phi_{k(q)}$ ile ϕ_k düzgün fonksiyonu ve onun hem x_i lere hem de $u_{\alpha(p)}$lere göre kısmi türevleri temsil edilmektedir.

Tanım 2:

$\mathcal{F}\big(x_i, u_{\alpha(p)}, \phi_{k(q)}(x_i, u_{\alpha(p)})\big) = 0$ ile verilen bir diferansiyel denklem ailesi için, $\mathcal{E}$ ile temsil edilen eşdeğerlik grubu, diferansiyel denklemin yapısını koruyan, fakat onu $\mathcal{F}\big(\bar{x}_i, \bar{u}_{\alpha(\bar{p})}, \bar{\phi}_{k(\bar{q})}(\bar{x}_i, \bar{u}_{\alpha(\bar{p})})\big) = 0$ denklemine dönüştüren, bağımlı, bağımsız değişkenler ve onların türevlerinin dönüşüm grubu olarak tanımlanır.

Bu çalışmada ele alınacak olan (2+1) boyutlu lineer olmayan difüzyon denklemi,

$$u_t - f(u,u_x)_x - g(u,u_y)_y = 0 \tag{1}$$

uygun eşdeğerlik dönüşümleri altında

$$\bar{u}_{\bar{t}} - \bar{f}(\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}})_{\bar{x}} - \bar{g}(\bar{u},\bar{u}_{\bar{y}})_{\bar{y}} = 0$$

denklemine dönüşür.

2.2. Yöntem (Method)

Bu çalışmada kullanılan yöntem, Harrsion ve Estabrook`un [22] geliştirdiği, esasen Cartan`ın [23] diferansiyel denklemlerin dış formlar aracılığı ile yazılması fikrine dayanan geometrik bir yaklaşımdır. Yöntem, daha sonra Edelen [24] tarafından denklik denklemlerinin simetri dönüşümleri için genişletilmiş ve Özer [3] birinci mertebe denklik denklemlerine, Şuhubi [25], ikinci mertebe denklik denklemlerine genişletmiş ve son olarak yine Şuhubi tarafından keyfi mertebe denklik denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümlerinin üretilmesi için yapılandırılmış, genel sonuçlar elde edilmiştir.

İkinci mertebe denklik denklemleri, genel formu ile,

$$\frac{\partial \Sigma^i(x^j,u,u_{,j})}{\partial x^i} + \Sigma(x^j,u,u_{,j}) = 0, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{2}$$

şeklinde verilir. Burada x^i bağımsız değişkenleri, u bağımlı değişkeni, Σ^i ve Σ ise bahsi geçen keyfi fonksiyonları (parametreleri) temsil etmektedir. Denklik denklemleri, klasik fiziğin hemen hemen tüm denklemlerini uygun eşlemeler altında temsil edebilmesi açısından geniş uygulama alanına sahiptir.

M ; koordinat örtüsü (x^i) olan n boyutlu katman olsun. Graf uzayını, yerel olarak $K = M \times \mathbb{R}$ şeklinde, koordinat örtüsü, (x^i, u) olan $(n+1)$ boyutlu bir katman olarak tanımlayabiliriz. Eşdeğerlik gruplarını yapılandırabilmek için K katmanına

$$v_i = u_{,i}$$

ile tanımlanan değişken ile, Σ^i , Σ ve bunların fonksiyonel bağlılıklarını göz önüne alabilmek için bağlı oldukları değişkenlere göre türevlerinin:

$$s_j^i = \frac{\partial \Sigma^i}{\partial x^j}, \sigma^i = \frac{\partial \Sigma^i}{\partial u}, s^{ij} = \frac{\partial \Sigma^i}{\partial v^j},$$

$$t_i = \frac{\partial \Sigma}{\partial x^i}, \qquad \tau = \frac{\partial \Sigma}{\partial u}, \quad t^i = \frac{\partial \Sigma}{\partial v^i} \tag{3}$$

bağımsız değişkenler gibi eklenmesi gerekir. Böylelikle oluşturulan genişletilmiş katmanın koordinat örtüsü

$$\overline{K} = \{x^i, u, v_i, \Sigma^i, \Sigma, s_j^i, \sigma^i, s^{ij}, t_i, \tau, t^i\}$$

olacaktır. Bu katmanın teğet uzayında bir vektör alanı

$$\begin{aligned} V = {} & X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + U \frac{\partial}{\partial u} + V_i \frac{\partial}{\partial v_i} + S^i \frac{\partial}{\partial \Sigma^i} \\ & + \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial \Sigma} + S_j^i \frac{\partial}{\partial s_j^i} + \mathcal{S}^i \frac{\partial}{\partial \sigma^i} + S^{ij} \frac{\partial}{\partial s^{ij}} + T_i \frac{\partial}{\partial t_i} \\ & + \mathcal{T} \frac{\partial}{\partial \tau} + T^i \frac{\partial}{\partial t^i} \end{aligned} \tag{4}$$

şeklinde yazılır ve (2) ile verilen; ikinci mertebe denklik denkleminin izovektör alanı olarak adlandırılır. Eşdeğerlik dönüşümleri grupları ise, aşağıda verilen teorem aracılığı ile tanımlanır.

Teorem: [1]

M^m türetilebilir katmanı üzerinde bir V vektör alanı

$$V = v^i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , p = \varphi(\boldsymbol{x})$$

ile verilmektedir. Bir $\gamma: I \to M$ eğrisi ancak ve ancak $x^i(t)$ koordinat fonksiyonları $\mathbb{R}^m$ de

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(\boldsymbol{x}(t)), \quad i = 1,2,\dots,m$$

adi türevli denklem takımının bir çözümü ise V vektör alanının bir integral eğrisidir.

Bu halde (2) ile verilen 2. mertebe denklik denkleminin eşdeğerlik dönüşümleri, (4) izovektör alanı bileşenleri ile,

$$\frac{d\,\bar{x}^i}{d\epsilon} = X^i, \quad \frac{d\,\bar{u}}{d\epsilon} = U, \quad \frac{d\,\bar{\Sigma}^i}{d\epsilon} = S^i, \quad \frac{d\,\bar{\Sigma}}{d\epsilon} = \mathcal{S}$$

adi türevli denklem takımının,

$$\bar{x}^i(0) = x^i, \; \bar{u}(0) = u, \; \bar{\Sigma}^i(0) = \Sigma^i, \; \bar{\Sigma}(0) = \Sigma$$

başlangıç koşulları altında çözülmesi ile elde edilir.

(4) ile verilen izovektör alanının katsayıları, belirleyici denklemlerinin kesin çözümleri elde edilerek Şuhubi [25] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$X^i = -\phi^i(x^j,u), \qquad U = U(x^j,u),$$
$$V_i = D_i U + (D_i \phi^j) v_j \,,$$

$$S^i = \left(w + \frac{\partial\phi^j}{\partial u}v_j\right)\Sigma^i - \left(D_j\phi^i\right)\Sigma^j + \alpha^{ij}v_j + \beta^i$$
$$\mathcal{S} = \left(w + \frac{\partial\phi^i}{\partial u}\,v_i\right)\Sigma + D_i S^i \tag{5}$$

Burada $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + v_i\frac{\partial}{\partial u}$, $\alpha^{ij} = -\alpha^{ji}$ dir.

Ayrıca, (4) izovektör alanında eşdeğerlik yapılanması için keyfi fonksiyonların fonksiyonel bağlılıklarını göz önüne almak için eklenen ek bileşenlere ait katsayılar ise,

$$\begin{aligned}
S_j^i &= \frac{\partial F^i}{\partial x^j} + \frac{\partial F^i}{\partial \Sigma^k}s_j^k + \frac{\partial F^i}{\partial \Sigma}t_j,\\
\mathcal{S}^i &= \frac{\partial F^i}{\partial u} + \frac{\partial F^i}{\partial \Sigma^k}\sigma^k + \frac{\partial F^i}{\partial \Sigma}\tau,\\
S^{ij} &= \frac{\partial F^i}{\partial v^j} + \frac{\partial F^i}{\partial \Sigma^k}s^{kj} + \frac{\partial F^i}{\partial \Sigma}t^j,\\
T_i &= \frac{\partial G}{\partial x^i} + \frac{\partial G}{\partial \Sigma^j}s_i^j + \frac{\partial G}{\partial \Sigma}t_i,\\
\mathcal{T} &= \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial \Sigma^j}\sigma^j + \frac{\partial G}{\partial \Sigma}\tau,\\
T^i &= \frac{\partial G}{\partial v^i} + \frac{\partial G}{\partial \Sigma^j}s^{ji} + \frac{\partial G}{\partial \Sigma}t^i,\\
F^i &= -s_j^i X^j - \sigma^i U - s^{ij}V_j + S^i,\\
G &= -t_i X^i - \tau U - t^i V_i + \mathcal{S}
\end{aligned} \tag{6}$$

olarak elde edilmiştir. Bir sonraki kısımda, (1) ile verilen (2+1) boyutlu difüzyon denkleminin eşdeğerlik dönüşümlerinin grupları, burada verilen (5) ve (6) denklemleri kullanılarak belirlenecektir.

3. (2+1) BOYUTLU DİFÜZYON DENKLEMİNİN EŞDEĞERLİK GRUPLARI (EQUIVALENCE GROUPS FOR (2+1) DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION)

Bu çalışma kapsamında ele alınacak olan (1) ile verilen

$$u_t - f(u,u_x)_x - g\left(u,u_y\right)_y = 0$$

(2+1) boyutlu lineer olmayan difüzyon denklemini, (2) ile verilen denklik denklemi ile eşleyebilmek için aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

$$\begin{aligned}
&x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = t,\\
&v_1 = u_x,\ \ v_2 = u_y,\ \ v_3 = u_t,\\
&\Sigma^1 = f,\ \ \Sigma^2 = g,\ \ \Sigma^3 = 0,\ \ \Sigma = -v_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Dolayısıyla (4) ile verilen vektör alanı, (1) denklemi için

$$V = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + T\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial u} + V_1\frac{\partial}{\partial v_1}$$
$$+V_2\frac{\partial}{\partial v_2} + V_3\frac{\partial}{\partial v_3} + S^1\frac{\partial}{\partial f} + S^2\frac{\partial}{\partial g} + \cdots \tag{8}$$

olarak yazılır. (3) ile açık yapısı verilerek katmana eklenen ek değişkenler, (7) denklikleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma^1 = f_u,\quad \sigma^2 = g_u,\quad s^{11} = f_{u_x},\quad s^{22} = g_{u_y},\ \ t^3 = -1 \tag{9}$$

Öte yandan sıfıra denk olan bileşenler ise,

$$s_1^1 = s_2^1 = s_3^1 = s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = \sigma^3 = s^{12} = s^{13} = s^{21} = s^{23} = t_1 = t_2 = t_3 = \tau = 0 \tag{10}$$

olacaktır. Açıkça görülür ki (7) denklileri nedeni ile, (4) ve (8) izovektör alanları arasında

$$S^3 = 0,\quad \mathcal{S} = -V_3 \tag{11}$$

ilişkileri vardır. Öte yandan (10) ile verilen ek bileşenlerin sıfır olması onların izovektör alanı üzerindeki katsayılarının sıfır olmasına neden olacaktır. Yani kısaca ifade etmek gerekirse, (11) kısıtlarına ek olarak,

$$S_1^1 = S_2^1 = S_3^1 = S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathcal{S}^3 = S^{12} = S^{13} = S^{21} = S^{23} = T_1 = T_2 = T_3 = \mathcal{T} = 0 \tag{12}$$

kısıtları gelecektir. (11) ve (12) denklemleri, vektör alanının katsayıları için elde edilmiş olan (5) ve (6) eşitlikleri kullanılarak çözülecek ve eşdeğerlik gruplarını veren ilişkileri üretecektir.

$S^3 = 0$ denklemi (5) eşitliği kullanılarak ele alınırsa,

$$T_x\,\Sigma^1 + T_u v_1\Sigma^1 + T_y\Sigma^2 + T_u v_2\Sigma^2 + \alpha^{31}v_1 + \alpha^{32}v_2 + \alpha^{33}v_3 + \beta_3 = 0$$

denklemini verir. Genişletilmiş katmanın koordinatlarının birer bağımsız değişken olduğu hatırlanacak olur ise, yukarıdaki denklem bunlar cinsinden bir polinom yapısındadır. Özdeş olarak sıfıra eşit olması, tüm değişkenlerin katsayılarının sıfıra eşit olması ile mümkün olacağından

$$T_x = T_u = T_y = \alpha^{31} = \alpha^{32} = \alpha^{33} = \beta_3 = 0$$

olması gerekir. Bu halde diferansiyel denklemin izovektör alanı (8) in bileşenlerinden

$$T = T(t) \tag{13}$$

olacaktır. Benzer şekilde ele alınan $S^{12} = 0$ denklemi ile izovektör alanının Y ve X bileşenleri üzerine

$$Y_x = Y_u = 0,\quad X_y = X_u = 0,\quad \alpha^{12} = 0$$

kısıtları elde edilir. Öte yandan (11) denklemi; $\mathcal{S} + V_3 = 0$ aşağıdaki ilişkileri verir:

$$X_{xx} = -w_x,\qquad Y_{yy} = -w_y,$$

$$X_t = \alpha_x^{11} + \beta_u^1,\ Y_t = \alpha_y^{22} + \beta_u^2,$$
$$U_t = \beta_x^1 + \beta_y^2,\quad \alpha_u^{11} = \alpha_u^{22} = 0$$
$$w = U_u + \dot{T},\quad w_u = 0.$$

Son iki denklem esasen

$$U_{uu} = 0$$

olması gerektiğini gösterir. İzovektör alanı üzerindeki $S_1^1 = 0$ kısıtı ile, vektör alanının, bağımlı değişkenin dönüşümüne yön veren U bileşeni üzerinde

$$U_x = 0,\quad U_u = w - X_x$$

bağıntılarına ek

$$X_{xx} = 0,\quad w_x = 0,\qquad X_t = 0$$

olması gerektiği görülür. Burada işlemlerin ayrıntılarına, işlem kalabalığı ile okuyucuyu boğmamak adına daha fazla girilmeyecek ve direk benzer işlemlerin tüm ek kısıtlar üzerine uygulanması ile elde edilen sonuç yapı verilecektir.

Kısaca, (1) ile verilen difüzyon denkleminin izovektör alanı (8)`in bileşenleri aşağıdaki gibi belirlenir.:

$$X = a_1 x + a_2,\ Y = a_1 y + a_3,\ T = a_1 t + a_4,$$
$$U = c_1 u + c_2, \tag{14}$$
$$S^1 = c_1 \mathrm{f} + \mathrm{a}_5 u_x + a_6,\ S^2 = c_1 g + a_7 u_y + a_8\ .$$

Öte yandan ek bileşenlerden v_1, v_2, v_3 ün katsayıları ise

$$V_1 = (c_1 + a_1)u_x,\ V_2 = (c_1 + a_1)u_y,$$
$$V_3 = (c_1 + a_1)u_t \tag{15}$$

olarak belirlenir.

Lemma1:

$u_t - f(u, u_x)_x - g(u, u_y)_y = 0$ yapısındaki (2+1) boyutlu difüzyon denkleminin eşdeğerlik dönüşümleri on parametreli grup yapısındadır.

İspat:

(14) ve (15) izovektör alanı bileşenlerinden açıkça görüleceği üzere eşdeğerlik dönüşümleri grubunun sonsuz küçük operatörleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$X_1 = \partial_x,\qquad X_2 = \partial_y,\qquad X_3 = \partial_t,$$
$$X_4 = \partial_u,\quad X_5 = \partial_f,\qquad X_6 = \partial_g$$
$$X_7 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t,$$
$$X_8 = u\partial_u + f\partial_f + g\partial_g,\qquad X_9 = u_x\partial_f,$$
$$X_{10} = u_y\partial_g. \tag{16}$$

Bu ise on parametreli grup yapısındadır.

Lemma2:

Difüzyon denkleminin eşdeğerlik grubunun operatörleri on parametreli bir Ɛ dönüşüm grubu oluşturur.

İspat:

Difüzyon denkleminin eşdeğerlik gruplarının (16) ile verilen sonsuz küçük operatörleri Bölüm 2.2. de verilen Teorem 1 aracılığı ile ele alınır ise, adi türevli denklem grubunun başlangıç koşulları altında integrasyonu ile

$$x = \lambda x' + \kappa_1,\qquad y = \lambda\, y' + \kappa_2,\qquad t = \lambda t' + \kappa_3,$$
$$u = \beta u' + \kappa_4,$$
$$u_x = \beta\lambda\, u'_{x'},\ \ u_y = \beta\lambda\, u'_{y'},\ \ u_t = \beta\lambda\, u'_{t'}$$
$$f = \beta f' + \gamma_1\, u'_{x'} + \kappa_5,$$
$$g = \beta g' + \gamma_2\, u'_{y'} + \kappa_6$$

şeklinde bir dönüşüm grubu elde edilir. Burada ilkesel olarak $\lambda, \beta > 0$ alınır.

Öte yandan, esasen açıktır ki bu eşdeğerlik grubu, $\kappa_i,\ i = 1,2,\dots,6$ gözlenebilen 6 ayrık yaprağa sahiptir. Kabul edilebilir tüm eşdeğerlik dönüşümlerinin (1) denklemi ile ifade edilen (2+1) boyutlu difüzyon denkleminin keyfi fonksiyonları olan f ve g nin yapısını

$$f'(u, u_x) = f(\beta u + \alpha, \theta u_x) + \gamma u_x + p$$
$$g'(u, u_x) = g(\beta u + \alpha, \theta u_y) + \gamma u_y + r$$

şeklinde dönüştüreceği açıktır. Burada geçen parametrelerin yukarıda kullanılan parametreler ile aynı olması gerekmemektedir. Dolayısı ile difüzyon denklemindeki temel yapının korunacağı açıktır.

(1) denklemi ile verilen (2+1) boyutlu difüzyon denkleminin komütatör şeması Tablo 1 de verilmiştir. Burada kalın çizgiler, yarı-dolaysız toplam yapısını göstermektedir.

Tablo 1. Difüzyon denkleminin eşdeğerlik gruplarının komütatör tablosu (Table1. Commutator table for the groups of equivalence transformations)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	0	0	0	0	0	0	$-X_1$	0	0	0
X_2	0	0	0	0	0	0	$-X_2$	0	0	0
X_3	0	0	0	0	0	0	$-X_3$	0	0	0
X_4	0	0	0	0	0	0	0	$-X_4$	0	0
X_5	0	0	0	0	0	0	0	$-X_5$	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0	0	$-X_6$	0	0
X_7	X_1	X_2	X_3	0	0	0	0	0	$-X_9$	$-X_{10}$
X_8	0	0	0	X_4	X_5	X_6	0	0	0	0
X_9	0	0	0	0	0	0	X_9	0	0	0
X_{10}	0	0	0	0	0	0	X_{10}	0	0	0

4. SONUÇ VE YORUMLAR (CONCLUSION AND REMARKS).

Çalışma kapsamında, (1) ile verilen lineer olmayan (2+1) boyutlu difüzyon denklemin eşdeğerlik dönüşümlerinin grupları incelenmiş, eşdeğerlik dönüşümleri açık olarak elde edilmiş ve dönüşüm gruplarının üreteçleri bulunmuştur. Problemin eşdeğerlik cebrinin yapısına baz oluşturması için komütatör tablosu çıkartılmıştır.

Problem difüzyon denkleminin daha genel fonksiyonel bağlılıkları ve yüksek mertebeler için benzer şekilde ele alınabilir. Elde edilen eşdeğerlik dönüşümleri ve problemin çözüm aşamasındaki adımlar, daha genel bir yapının, örneğin homojen ile homojen olmayan, ya da lineer ile lineer olmayan denklemler arasında ilişkiler çıkarabileceği sonucu ile yorumlanabilir. Zira 2. bölümde incelenen kısıtların daraltılması ile izovektör alanı bileşenleri olan X ve Y nin yapısının daha genel bir hal alacağı öngörülebilir.

REFERENCES

[1] E. S. Şuhubi, *Dış Form Analizi*, Türkiye Bilimler Akademisi, Türkiye, 2008.

[2] F. Oliveri and M.P Speciale, "Equivalence transformations of quasilinear first order systems and reduction to autonomous and homogeneous form", *Acta applicandae mathematicae*, vol. 122, no. 1, pp. 447–460, 2012.

[3] S Özer and E.S. Şuhubi, "Equivalence transformations for first order balance equations." *International journal of engineering science*, vol. 42, no. 11, pp. 1305-1324, 2004.

[4] L.V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York, USA, 2014.

[5] P.J Olver, *Applications of Lie groups to differential equations,* vol. 107, Springer Science & Business Media, 2000.

[6] N.K. Ibragimov, *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations,* volume 197, *Wiley Chichester,* 1999.

[7] I. Lisle, "Equivalence transformations for classes of differential equations", Ph.D dissertation, Dept. of Mathematics, University of British Columbia, 1992.

[8] S. Lie, "Über integralinvarianten und ihre verwertung für die theorie der differentialgleichungen, *leipz. Berichte*, vol. 49, pp. 369–410, 1897.

[9] L.V. Ovsiannikov, "Group relations of the equation of non-linear heat conductivity", *In Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 125, pp. 492–495, 1959.

[10] C. Bihlo, E.D. Santos, A. Bihlo, and R.O. Popovych, "Enhanced preliminary group classification of a class of generalized diffusion equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 16, no. 9 pp. 3622-3638, 2011.

[11] R. Zhdanov and V. Lahno, "Group classification of the general second-order evolution equation: semi-simple invariance groups."*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 19 pp. 5083, 2007.

[12] A.H. Bokhari, A. Y. Al Dweik, A. H. Kara, and F. D. Zaman, "A symmetry analysis of some classes of evolutionary nonlinear (2+ 1)-diffusion equations with variable diffusivity", *Nonlinear Dynamics*, vol. 62, no. 1-2, pp. 127-138, 2010.

[13] N.M Ivanova, C. Sophocleous and R. Tracina, "Lie group analysis of two dimensional variable-coefficient burgers equation", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, vol. 61, no. 5, pp. 793–809, 2010.

[14] M.S. Bruzon, M.L. Gandarias, M. Torrisi and R. Tracina, "On some applications of transformation groups to a class of nonlinear dispersive equations", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 13, no. 3, pp. 1139–1151, 2012.

[15] M. Torrisi and R. Tracina, "Equivalence transformations and symmetries for a heat conduction model", *International journal of non-linear mechanics*, vol. 33, no. 3, pp. 473–487, 1998.

[16] V. Romano and M. Torrisi, "Application of weak equivalence transformations to a group analysis of a drift-diffusion model", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 32, no. 45, pp. 7953, 1999.

[17] M. Torrisi and R. Tracina, "Second-order differential invariants of a family of diffusion equations", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol.38, no. 34, pp. 7519, 2005.

[18] M.L. Gandarias, M. Torrisi and R. Tracina, "On some differential invariants for a family

of diffusion equations", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 30, pp. 8803, 2007.

[19] N.H Ibragimov and C. Sophocleous, "Differential invariants of the one dimensional quasi-linear second-order evolution equation", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 12, no. 7, pp. 1133–1145, 2007.

[20] M. Torrisi and R. Tracina, "Exact solutions of a reaction–diffusion system for proteus mirabilis bacterial colonies", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 12, no. 3, pp. 1865–1874, 2011.

[21] C. Tsaousi, R. Tracina and C. Sophocleous, "Differential invariants for third order evolution equations" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 20, no. 2, pp. 352–359, 2015.

[22] B.K. Harrison and F.B. Estabrook, "Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems", *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 4, pp. 653-666. 1971.

[23] É. Cartan, "*Les systemes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques,* Hermann, Paris, 1971.

[24] D. Edelen, "*Applied exterior calculus"*, Courier Corporation, GB., 1985.

[25] E.S. Şuhubi, "Explicit determination of isovector fields of equivalence groups for balance equations of arbitrary order part II", *International journal of engineering science*, vol. 43, no. 1, pp.1–15, 2005.