

Haar Dalgacık Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Esra Zeynep ŞENSOY^{1*}, Tarık BARAN²

¹Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 80000, Osmaniye

²Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 80000, Osmaniye

¹ <https://orcid.org/0000-0001-8305-6373>

² <https://orcid.org/0000-0003-4977-9951>

*Sorumlu yazar: ezeynepsensoy@osmaniye.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihçesi:

Geliş tarihi: 06.04.2023

Kabul tarihi: 21.07.2023

Online Yayınlanma: 22.01.2024

Anahtar Kelimeler:

Haar dalgacıkları

Diferansiyel denklemler

Sayısal çözüm

Haar matrisleri

Üniform ve üniform olmayan çözüm aralığı

ÖZ

Bu makalede, diferansiyel denklemlerin Haar dalgacık yöntemi ile sayısal çözümü, çözüm aralığının üniform (eşit alt aralıklı) veya üniform olmayan (eşit olmayan alt aralıklı) olmasına göre iki kategoride incelenmiştir. Sayısal çözümün yapıldığı aralıkta artımların üniform olup olmaması Haar dalgacıkları ve integrallerinin hesaplanmasında etkili olmaktadır. Haar dalgacıkları $[0, 1]$ aralığında tanımlanır. $[0, 1]$ aralığından farklı bir aralıktaki bir diferansiyel problem için, çözüm aralığı alt sınır ve üst sınır farkı ve bu farkın kuvvetlerinin kullanılması ile $[0, 1]$ aralığındaki Haar matrislerinin çözüm aralığına taşınabildiği görülmüştür. Böylece farklı bir dönüşüme gerek kalmaz. Üniform olmayan Haar matrisleriyle, çözüm aralığının kritik bölgelerinde hassasiyet artırılabilir. Kesinliği iyileştirmek için, çözüm bölgesinde bir kollokasyon noktası sıklaştırma tekniği geliştirilmiştir. Hem geliştirilen hem de literatürde mevcut olan sıklaştırma teknikleri ile yapılan sayısal çözümler, kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada incelenen diferansiyel denklemler için geliştirilen sıklaştırma yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar ile kesin çözümler arasında yüksek bir uyum gözlemlenmiştir.

Solution of Differential Equations with the Haar Wavelets Method

Research Article

Article History:

Received: 06.04.2023

Accepted: 21.07.2023

Published online: 22.01.2024

Keywords:

Haar wavelets

Differential equations

Numerical solution

Haar matrices

Uniform and non-uniform interval solution

ABSTRACT

In this paper, the numerical solution of differential equations with the Haar wavelet method is examined in two categories according to whether the solution interval is uniform (equal sub-spaced) or non-uniform (unequal sub-spaced). Whether the increments are uniform or not in the range of numerical solution is effective in the calculation of Haar wavelets and their integrals. Haar wavelets are defined in the range $[0, 1]$. For a differential problem is defined in an interval different from the interval $[0, 1]$, it is seen that the matrices defined in the solution interval can be defined by multiplying a coefficient obtained depending on the interval and the powers of this coefficient with the Haar matrices. Thus, there is no need for a different transformation. With non-uniform Haar matrices, the precision can be increased in the critical regions of the solution range. To improve the precision a collocation point increment method was developed in the solution region. Numerical solutions both developed and available in the literature are compared to exact solution. For the examined differential equations in this work, good agreements have been observed between the obtained numerical results that employ developed increment method and the exact solutions.

1. Giriş

Dalgacıklar dönüşümü doğal bilim, mühendislik, astronomi, akustik, nükleer mühendislik, alt bant kodlaması, nörofizyoloji, müzik, manyetik rezonans görüntüleme, konuşma ayırt etme, optik, fraktallar, türbülans, deprem-tahmin, kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesi, görüntü sıkıştırma, sinyal işleme ve radar uygulamaları gibi birçok alandaki uygulamada kullanılmaktadır (Graps, 1995). Dalgacık terimi, küçük bir dalga anlamına gelir. Bu tanım, fonksiyonun sonlu uzunlukta olması ve fonksiyonun salınımlı olması koşulunu ifade eder (Berwal ve ark., 2013). Dalgacıklar, verileri farklı frekans bileşenlerine bölen ve ardından her bileşeni kendi ölçeğine uygun bir ayrıştırma ile inceleyen matematiksel işlevlerdir. Dalgacık analizinde verileri çözümlmek için kullanılan ölçek özel bir rol oynar. Dalgacık algoritmaları, verileri farklı ölçeklerde veya çözünürlüklerde işlemektedir (Graps, 1995). Dalgacık dönüşümünde kullanılacak çok sayıda dalgacık tipi vardır. Haar, Daubechies, Mexican Hat, Symlet, Morlet, Coiflet, Coiflet-Daubechies-Feauveau, Meyer, Shannon, Legendre, Gaussian, Villasenor örnek olarak verilebilecek öne çıkan dalgacık aileleridir (Mehra ve ark., 2009; Lepik ve Hein, 2015).

Dalgacıklar konusunda ilk çalışma Alfred Haar'ın çalışmasıdır (Haar, 1910). Haar, çalışmasında sonlu bir aralığın dışında kaybolan, sürekli olarak türevlenmeyen bir yapıyı ortaya koymuştur. $[0, 1]$ aralığında tanımlı bir ortogonal sistemi ortaya koyan bu yapıya Haar dalgacıkları denir. En basit dalgacıklardan olan Haar dalgacı, tekli dikdörtgen basamaklardan (block-pulse) oluşur (Stanković ve Falkowski, 2003). Bu tanımlama ile Haar, problemin sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösterir. Varolüneş'in bildirdiğine göre Levy ise, parçacıkların hareketini modellemede, Haar dalgacıklarının, Fourier temel fonksiyonlarına oranla daha iyi sonuç verdiğini ispatlamıştır (Varolüneş, 2013). Sinyal işleme, fonksiyonların enerjisini hesaplama gibi alanlarda en çok kullanılan dalgacık türü Daubechies dalgacıklarıdır. 1980'lerde Haar fonksiyonunun aslında 1. dereceden Daubechies dalgacı olduğu da gösterilmiştir (Lepik ve Hein, 2014). Haar dalgacıkları sinyal işleme vb. işlemler yanında karmaşık diferansiyel denklemlerin çözümünde de etkin olarak kullanılabilir. Haar dalgacı fonksiyonları topolojik uzayın dışında da sıfır değerini alabilen en basit ortonormal dalgacık türü olarak da tanımlanmaktadır. Haar dalgacı yapısı gereği bazı noktalarda süreksizdir ve bu noktalarda türevler mevcut olmadığından diferansiyel denklem çözümlerinin Haar dalgacığına doğrudan uygulanması mümkün olmamaktadır (Lepik, 2005).

Cattani, süreksizlik problemini, parçalı sabit Haar fonksiyonunu bağ interpolasyonları (spline) ile birleştirerek çözmüştür. Böylece, belirsizliğin olduğu yerlerde çok parçalı eğrilerin oluşturduğu yüksek derecede türevlenebilir sistem ortaya çıkmıştır (Cattani ve Pecoraro, 2000; Cattani, 2004). Chen ve Hsiao (1997) farklı olarak, diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin Haar serisine genişletildiği integral yöntemi kullanmıştır. Bu yöntemde türevli fonksiyonların integrali alınıp, sınır

koşullarının dahil edilmesiyle integral sabitleri hesaplanır. Böylece, diferansiyel denklem doğrusal bir denkleme dönüşür. Cattani (2004), integral aralığının parçalara ayrıldığında, hesaplamadaki karmaşıklığın azaltılabileceğini göstermiştir ve bu yönteme Haar dönüşümü adını vermiştir.

Lepik (2005), çalışmasında adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin Haar dalgacıkları yardımı ile sayısal çözümleri için segmentasyon yöntemini önermiştir. Majak ve ark. (2018) ise, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümleri için yüksek mertebeden Haar dalgacık yöntemi geliştirmişlerdir. Chen ve Hsiao'dan farklı olarak, daha yüksek dereceli fonksiyonların dalgacık açılımı konusunda çalışmalar yapmışlardır. Bu yeni yöntemde, integrasyon sabitlerinin sayısı; problemin mevcut sınır koşulları sayısını aşmaktadır. Bu integrasyon sabitlerini belirlemek için bazı ek koşullar ve kavramlar önermişlerdir. Bu yönteme göre dalgacık genişletme suretiyle yakınsamanın artıp, mutlak hatanın azaldığını göstermişlerdir. Maleknejad ve Mirzaee (2005), rasyonelleştirilmiş Haar dalgacığı ile Fredholm integral denklemlerini çözmüşlerdir. Dalgacığın çözünürlüğünün artması ile kesin sonuca yakınsamanın arttığını belirtmişlerdir. Lepik (2007), Haar dalgacığı yöntemine uzaysal operatörler uygulayarak bazı özel kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde yeni bir yöntem önermiştir. Lepik (2011), diğer bir çalışmasında Poisson denklemi ve Difüzyon denklemi örneklerini kısmi diferansiyel denklem çözümünde Haar dalgacıkları kullanarak hesaplamıştır. Heydari ve ark. (2022), yüksek dereceden adi diferansiyel denklemleri çözmek için problemin başlangıç ve sınır koşullarından bazılarının bilinmediği durumlarda bir çözüm önermişlerdir. Üniorm kollokasyon değerleri ile sisteme dahil olan denklemlerin kendi içinde çözülmesini örneklendirmişlerdir.

Haar dalgacıkları ile diferansiyel denklem çözümünde yaygın olarak kabul gören Lepik ve Hein'in çalışmaları, çözüm aralığının üniform ve üniform olmaması durumuna göre yapılandırılmıştır (Lepik ve Hein, 2014). Problemin çözülemediği veya grafiğine ait pik noktalarındaki sapmalar için üniform olmayan yapıya özel grid noktaları tanımlanmıştır (Lepik, 2008). Ayrıklaştırma işlemi ile diferansiyel denklem çözümünü sayısallaştırmıştır. Majak ve ark. (2015) yaptığı çalışmada, Haar dalgacıkları, parçalı sabit fonksiyon ikililerinden meydana geldikleri için ayrıklaştırmanın kolay olduğunu belirtmiştir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan yola çıkılarak, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde ayrıklaştırmadan faydalanarak, bu çalışmada eşit alt aralıklı ve eşit olmayan alt aralıklı çözümün kesin çözüme yakınsamaya etkisi incelenmiştir. Bu çalışma için Lepik ve Hein (2014) tarafından verilen Haar matrisi algoritmaları kullanılarak diferansiyel denklem çözümleri için bir bilgisayar programı hazırlanmış ve seçilmiş denklemler sayısal olarak çözülmüştür. Problemin sınır değerleri veya bazı pik noktalarındaki sapmalar için sıklaştırma algoritmaları kullanılarak hata oranı düşürülmüştür. Lepik'in vermiş olduğu sıklaştırma algoritmasına ek olarak bu çalışmada oluşturulan yeni bir sıklaştırma algoritmasının da oldukça etkin olduğu örneklerle gösterilmiştir. Üniform Haar matrislerinin çözümde kullanılması durumunda, üst sınır alt sınır farkı ile elde edilen sayının ve kuvvetlerinin matrislerde çarpan olarak kullanıldığında, matrislerin çözüm aralığına genişletilebildiği de görülmüştür. Çalışmada ilk kısımda Haar matrisleri tanıtılacak, daha sonra diferansiyel

denklemlerin Haar matrisleri ile çözümü açıklanacak ve sayısal uygulamalar ve doğrulamalar yapılacaktır. Geliştirilen aralık genişletme ve sıklaştırma algoritmaları literatürdeki sonuçlar ve analitik çözümler ile karşılaştırılarak etkinliği gösterilecektir.

2. Materyal ve Metot

2.1. Haar Dalgacıkları

Haar dalgacık ailesi, A ve B sabit değerler olmak üzere $x \in [A, B]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır (Lepik ve Hein, 2014):

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)), \\ -1 & x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)), \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1)$$

Eşitlik (1)'de yer alan dönüşüm uzayı değişkenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \xi_1(i) &= A + 2k \mu \Delta x, \\ \xi_2(i) &= A + (2k + 1)\mu \Delta x, \\ \xi_3(i) &= A + 2(k + 1)\mu \Delta x, \quad \mu = \frac{M}{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Eşitlikte, J maksimum çözünürlük seviyesini belirtir, M dalgacık aralığının yarı mesafesini gösterir ve $M = 2^J$ olarak kullanılır. $[A, B]$ aralığı $2M$ şeklinde eşit uzunluktaki alt aralıklara bölüldüğünde her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x = \frac{B-A}{2M}$ ile ifade edilir. j ölçek parametresi ($j = 0, 1, \dots, J$), k ise kaydırma parametresidir. k dalgacığın x eksenindeki konumunu belirler ve $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ($m = 2^j$) olarak tanımlanır. Dalgacık numarasını ifade eden i parametresi ise $i = m + k + 1$ eşitliğinden bulunur. Bu eşitlikler $i > 2$ koşulu için geçerlidir. $x \in [A, B]$ aralığında, $i = 1$ olması durumunda ölçek fonksiyonu $h_1(x) = 1$, diğer yerlerde $h_1(x) = 0$ olacaktır. $i = 2$ için, $\xi_1(2) = A$, $\xi_2(2) = 0.5(2A + B)$, $\xi_3(2) = B$ olarak alınır. i .inci dalgacık genişliği aşağıdaki gibidir:

$$\xi_3(i) - \xi_1(i) = 2 \mu \Delta x = (B - A)m^{-1} = (B - A)2^{-j} \quad (3)$$

Haar fonksiyonunda j artırılırsa dalgacıklar arası mesafe kısalmakta, çözünürlük ve yakınsamalar daha belirgin olmaktadır. k , 0 'dan $m - 1$ 'e değişirse, i .dalgacık $\xi_1(i)$ başlangıç noktası $x = A$ 'dan $x = \frac{A+(m-1)B}{m}$ 'ye hareket eder. j ve k parametreleri adım sayısının sıklığını belirler.

Haar dalgacık ailesi, ortogonal fonksiyonlardan oluşur yani aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\int_A^B h_i(x)h_l(x)dx = \begin{cases} (B - A)2^{-j}, & l = i \\ 0, & l \neq i \end{cases} \quad (4)$$

Haar dalgacıklarının integralleri Lepik tarafından analitik olarak aşağıdaki gibi verilir (Lepik, 2005):

$$p_{v,i}(x) = \int_A^x \int_A^x \dots \int_A^x h_i(t)dt^v = \frac{1}{(v-1)! \int_A^x (x-t)^{v-1} h_i(t)dt} \quad (5)$$

$v = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, 2M$

Burada A problem aralığının başlangıç değerini, t türev değişkenini, v ise Haar dalgacık ailesini ifade eder. Eşitlik (1) dikkate alınarak, yüksek dereceden türevlerin integralinin alınması ile Eşitlik (6)

oluşturulur. Eşitliklerin sınır koşulları ile integral sabitleri bulunur. Diferansiyel denklem çözümlerinde ihtiyaç duyulan Haar dalgacıklarının integralleri aşağıdaki gibi belirlenebilir (Lepik ve Hein, 2014):

$$p_{\alpha,i}(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi_1(i) \\ \frac{1}{\alpha!} [x - \xi_1(i)]^\alpha, & x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)] \\ \frac{1}{\alpha!} \{ [x - \xi_1(i)]^\alpha - 2[x - \xi_2(i)]^\alpha \}, & x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)] \\ \frac{1}{\alpha!} \{ [x - \xi_1(i)]^\alpha - 2[x - \xi_2(i)]^\alpha + [x - \xi_3(i)]^\alpha \}, & x > \xi_3(i) \end{cases} \quad (6)$$

Bu eşitlikler $i > 1$ durumu için geçerlidir. $i = 1$ durumunda, $\xi_1 = A$, $\xi_2 = \xi_3 = B$ olur ve Eşitlik (6) kullanılarak $i = 1$ durumu yazılabilir:

$$p_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\alpha!} (x - A)^\alpha \quad (7)$$

Haar dalgacıklarının integralleri $p_{\alpha,i}(x)$ vektörlerini, bu vektörler de $2M \times 2M$ boyutlu \mathbf{P} matrislerini oluşturur. Diferansiyel denklem çözümlerinde Haar matrisi ise \mathbf{H} ($2M \times 2M$) ile gösterilir (Lepik, 2005). $x \in [A, B]$ aralığında integrali alınabilen $f = f(x)$ fonksiyonunun Haar dalgacıkları ile ifadesi $f(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$ şeklindedir. Burada a_i , Haar dalgacık katsayılarıdır. Bu eşitlik matris formunda aşağıdaki verilebilir:

$$\mathbf{f} = \mathbf{aH} \quad (8)$$

Burada, $\mathbf{a} = (a_i)$ ve $\mathbf{f} = (f_i)$ ise $2M$ boyutlu satır vektörleridir. Eşitlik (8)'in matris formundaki çözümü için öncelikle, hesaplamalarla katsayı vektörü \mathbf{a} aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathbf{a} = \mathbf{fH}^{-1} \quad (9)$$

Eşitlikte \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{H} Haar matrisinin tersidir. Hesaplanan \mathbf{a} vektörü, Eşitlik (8)'de yerine yazılarak fonksiyonun ifadesi elde edilir.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Haar dalgacıkları ayrık formda elde edilmelidir. Ayrıklaştırma için, kollokasyon metodu yaygın olarak kullanılan yöntemdir (Lepik ve Hein, 2014). Değer hesaplanacak noktalar sabit aralıklarla (uniform grid) kullanılacaksa aralıklar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{x}_l = A + l\Delta x \quad l = 0, 1, \dots, 2M \quad (10)$$

Kollokasyon noktaları ise, iki grid noktasının Haar grafiğindeki basamakların orta noktası olarak tanımlanır:

$$x_l = 0.5 (\tilde{x}_{l-1} + \tilde{x}_l) \quad l = 1, \dots, 2M \quad (11)$$

$h_i(x)$ Haar dalgacığı, $p_{\alpha,i}(x)$ integralleri ve $p_{\alpha,1}(x)$ özel koşulu eşitliklerinde (Eşitlikler 1, 6, 7) x yerine x_l yazılması ile ilgili noktalarda tanımlı Haar matrisleri elde edilir. Her biri $2M \times 2M$ boyutlu H, P_1, P_2, \dots, P_v matrisleri oluşturulmuş olur. Ayrıklaştırma ile matrisler $H(i, l) = h_i(x_l)$, $P_v(i, l) = p_{vi}(x_l)$, ($v = 1, 2, \dots$) olarak yazılır (Lepik ve Hein, 2014).

Diferansiyel denklemlerin Haar dalgacı ile ayrıklaştırılması ile Eşitlik (8)'in ayrık formu, x_l kollokasyon noktaları olmak üzere $\hat{f}(x_l) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l)$ ile ifade edilir. Eşitlik (8)'den bulunan a vektörü, yerine yazıldığında, J çözünürlük seviyesi için $f(x)$ fonksiyonunun dalgacık yaklaşımı elde edilmiş olur. $\hat{f}(x_l)$, $f(x)$ 'in yaklaşık ifadesidir. Bu durumda hata fonksiyonu Δ_J ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Delta_J = \Delta x \sum_{l=1}^{2M} [f(x_l) - \hat{f}(x_l)]^2 \quad (12)$$

Haar dalgacıları, parçalı sabit fonksiyonlar grubuna ait olduğu için eğer fonksiyon yeterince düzgünse, parçalı sabit fonksiyon için yakınsama hızı olan $O(M^{-2})$ ifadesi Haar dalgacıları için de geçerli kabul edilebilir. Dolayısıyla, adım noktalarının sayısının iki katına çıkarılmasıyla hatanın kabaca dört kat azalması beklenir (Lepik ve Hein, 2014).

2.1.1. Çözüm Aralığının Düzenlenmesi

Dalgacık analizinde $x \in [A, B]$ aralığı genellikle eşit uzunlukta düzgün alt aralıklara ayrılır. Eşit uzunluktaki alt aralıklar için en temel kavram Haar dalgacık için $A = 0$ ve $B = 1$ olduğu durumdur. Çözüm aralığı sınırlarının farklı değerlerde olması durumunda problem formülasyonu düzenlenerek sınırlar $[0, 1]$ aralığına taşınır. Bu çalışmada literatürden farklı olarak, sınırlar formülasyon esnasında düzenlenmek yerine asıl aralıkta problemin tanımlanması için, \mathbf{P} integral matrisleri Eşitlik (13)'teki gibi elde edilen bir katsayı ile çarpılarak matrisler istenilen aralığa taşınır. Bu işlem sayısal olduğu için sınırların çözümden önce analitik işlemlerle çözüm aralığının taşınmasına göre daha hızlı ve zahmetsizdir. Yapılan işlem basit bir skaler, matris çarpımı olduğu için hassasiyet kaybı oluşmamaktadır. Çözümde eşit olmayan alt aralıklar kullanılırsa Haar matrisleri otomatik olarak bu aralıklarda türetildiğinden ayrıca matrislerin bu çarpıma ihtiyacı olmaz.

$$\gamma = (B - A)^\alpha \mathbf{P} \quad (13)$$

Eşitlik (13)'teki α parametresi, ilgili \mathbf{P} integral matrisine ait integral derecesini ifade etmektedir.

2.1.2. Üniorm Haar Dalgacıları

$x \in [A, B]$ aralığı eşit uzunluklu alt aralıklara ayrıldığında, bu tip seriye üniform Haar dalgacıları adı verilir. Üniform Haar dalgacıları ile çalışmak işlem ve hesap kolaylığı sağlar. Ancak çözümün kararsız, asimptotik vb. durumlarında iyi hassasiyet vermez.

2.1.3. Üniorm Olmayan Haar Dalgacıları

Haar dalgacık serisine açılan fonksiyonlarda problem sınır değer veya başlangıç değer problemi değilse, sınır şartları türev ifadelerine bağlı ise, tekillik (singularity) veya $x \in [A, B]$ aralığında sonsuz durum söz konusu ise üniform yaklaşımla hassas çözüme ulaşmak mümkün değildir. Çünkü fonksiyonların süreksiz olduğu noktalarda türevleri mevcut değildir. Bu tip problemlere; sınır değer problemleri, zayıf tekil integral denklemler, süreksizlikler ve sistemin ani değiştiği problemler örnek

olarak verilebilir. Bu tür durumlarda ani değişen bölgelerde veya belli bir aralıkta daha hassas çözüm istenen bölgelerde kollokasyon noktalarının artırılması gerekir. Belirli aralıkta sıklaştırma yapılmasıyla kesin çözüme yakınsama elde edilir (Lepik ve Hein, 2014).

$x \in [A, B]$ aralığı, her bir aralığın eşit olup olmadığı fark etmeksizin istenilen biçimde $2M$ alt aralığa ayrılır. $l = 0, 1, \dots, 2M - 1$ için $\tilde{x}(0) = A$, $\tilde{x}(2M) = B$, $\tilde{x}(l + 1) > \tilde{x}(l)$.

i dalgacık sayısı olmak üzere Haar dalgacık ailesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)], \\ -c_i & x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)], \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (14)$$

Eşitlik (14)'te yer alan değişkenler

$$\begin{aligned} \xi_1(i) &= x(2k\mu) \\ \xi_2(i) &= x[(2k + 1)\mu] \\ \xi_3(i) &= x[2(k + 1)\mu], \quad \mu = \frac{M}{m} \end{aligned} \quad (15)$$

olmak üzere, c_i katsayıları aşağıdaki koşuldan hesaplanır:

$$\int_A^B h_i(x) dx = 0 \quad (16)$$

$$c_i = \frac{\xi_2(i) - \xi_1(i)}{\xi_3(i) - \xi_2(i)} \quad (17)$$

Bu eşitlikler $i > 2$ için geçerlidir. $i = 1$ ve $i = 2$ durumunda $\xi_1(1) = A$, $\xi_2(1) = \xi_3(1) = B$, $\xi_1(2) = A$, $\xi_2(2) = \tilde{x}(M)$, $\xi_3(2) = B$ geçerlidir. Alt aralıklara bağlı olarak değişen sıklaştırma ile Eşitlik (14)'ün α defa integralinin alınması sonucu $p_{\alpha,i}(x)$ vektörleri aşağıdaki gibi elde edilir (Lepik ve Hein, 2014).

$$p_{\alpha,i}(x) = \begin{cases} 0 & x < \xi_1(i) \\ \frac{1}{\alpha!} [x - \xi_1(i)]^\alpha & x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)] \\ \frac{1}{\alpha!} \{ [x - \xi_1(i)]^\alpha - (1 + c_i) [x - \xi_2(i)]^\alpha \} & x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)] \\ \frac{1}{\alpha!} \{ [x - \xi_1(i)]^\alpha - (1 + c_i) [x - \xi_2(i)]^\alpha + c_i [x - \xi_3(i)]^\alpha \} & x > \xi_3(i) \end{cases} \quad (18)$$

Sayısal çözümde kullanılmak üzere kollokasyon noktaları ile sıklaştırma yapmak çözüme yakınsama sağlar. Lepik (2008)'in verdiği sıklaştırma algoritmaları şöyledir:

$$\begin{aligned} x(l) &= l\Delta x_1 & l &= 1, \dots, \frac{M}{2} \\ x\left(l + \frac{M}{2}\right) &= x_* + l\Delta x_2 & l &= 1, \dots, M \\ x\left(l + \frac{3M}{2}\right) &= x_{**} + l\Delta x_3 & l &= 1, \dots, \frac{M}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

Lepik, ara bölgelerde çalışması için Δx_i ara mesafelerini önermiştir. Burada $\Delta x_1, \Delta x_2$ ve Δx_3 arasındaki mesafeler ile özel olarak seçilen x_* ve x_{**} değerleri problemin çözüm aralığında eşit olmayan alt aralıklar oluşturup sıklaştırma yaparak üniform olmayan durumun sebep olduğu

çözüksüzlüğün veya çözümdeki ani sıçramalara yakınsama sağlar. Eşitlik (19)'da x_l kollokasyon noktaları olmak üzere, Eşitlik (8) yeniden düzenlenirse;

$$Y^n = aH$$

Burada Y çözümün vektörü, $Y(l) = y[x_c(l)]$ 'dir. Problemde yer alan en yüksek türevli ifadenin Haar fonksiyonu olduğu kabulüne göre, n .dereceden türev sonucu elde edilecek eşitliklerde görülen X_c vektörü $x_c(l)$ kollokasyon noktalarından oluşan bileşenlerdir.

Lepik (2005), üst sınır noktalarında geçerli olmak üzere q ifadeleri ile gösterilen ikinci bir sıklaştırma algoritması önermiştir. $q < 1$ için $\Delta x_l = q\Delta x_{l-1}$ alt aralık uzunlukları koşulu vardır ($l = 1, \dots, 2M$). Elde edilen alt aralıkların uzunlukları toplamı aşağıda tanımlanmıştır:

$$\Delta x_l(1 + q + q^2 + \dots + q^{2M-1}) = 1 \quad (20)$$

Eşitlik (20)'deki geometrik seri toplamı ile sıklaştırma alt aralığı aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\Delta x_l = \frac{1-q}{1-q^{2M}} \quad (21)$$

Bu yönteme göre grid noktaları gösterimi şöyledir:

$$\tilde{x}_l = \frac{1-q^l}{1-q^{2M}}, \quad l = 0, 1, \dots, 2M \quad (22)$$

Lepik tarafında verilen algoritmadan farklı olarak bu çalışmada, kollokasyon noktalarını istenilen aralıkta yoğunlaştırmak için bir algoritma geliştirilmiştir. İlk önce sıklaştırmanın istendiği aralık ve aralıkta kaç kollokasyon noktası kullanılacağı sorgulanır. Bu veriler sırasıyla; $x_{ara-baş}$, $x_{ara-bit}$, M_{nokta} , aralık başlangıç noktası, bitiş noktası ve aralıktaki nokta sayısıdır. Çözümlemelerde toplam $2M$ adet çözüm noktalarından M adedinin istenilen hassasiyet için yeterli olduğu görülmüştür. Sıklaştırma aralığında en fazla $2M - 2$ adet nokta kullanılabilir. Kalan noktalar, problemin sıklaştırma aralığı dışında kalan bölgeler için ayrılmıştır. Doğal olarak sıklaştırma bölgesi dışında kalan bölge için daha fazla nokta kullanmak çözüm açısından önemlidir. İleride sayısal uygulamalardan görüleceği üzere çözümde ani değişimlerin ve tutarsız bölgelerin olduğu kısımlarda sıklaştırma yapmak gereklidir.

Çözüm aralığı $[A, B]$ olan bir problemde, kollokasyon noktaları $2M$ adet olmak üzere aşağıdaki gibi çözüm bölgesine dağıtılabilir:

$$\begin{aligned} x_1(l) &= l\Delta x_1 & l &= 1, \dots, \frac{M}{2}, & x_1(l) &\in [A, x_{ara-baş}] \\ x_2(l) &= x_1\left(\frac{M}{2}\right) + l\Delta x_2 & l &= 1, \dots, M, & x_2(l) &\in [x_{ara-baş}, x_{ara-bit}] \\ x_3(l) &= x_2(M) + l\Delta x_3 & l &= 1, \dots, \frac{M}{2}, & x_3(l) &\in [x_{ara-bit}, B] \end{aligned} \quad (23)$$

Eşitlik (23)'te $\Delta x_1 = \frac{x_{ara-baş} - A}{\frac{M}{2}}$, $\Delta x_2 = \frac{x_{ara-bit} - x_{ara-baş}}{M}$, $\Delta x_3 = \frac{B - x_{ara-bit}}{\frac{M}{2}}$ şeklindedir.

Geliştirilen algoritma ile bu sıklaştırma, Lepik sıklaştırmalarından farklı olarak istenilen hassasiyete daha fazla yaklaştırılabilir.

Bu çalışmada önerilen sıklaştırma algoritması Eşitlik (19) ile verilen algoritmanın geliştirilmiş halidir. Bununla birlikte iki bölgede sıklaştırma algoritması da ayrıca geliştirilmiş ancak sonuçlarda anlamlı

bir iyileşme sağlamamıştır. Bu iyileşmenin çözünürlüğün çok artırılması ile ortaya çıkacağı öngörülebilir.

2.2. Haar Dalgacıkları ile Diferansiyel Denklem Çözümü

Haar dalgacıkları cinsinden n . Derece bir diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{\nu}^n A_{\nu}(x)y^{(\nu)}(x) = f(x), \quad x \in [\alpha, \beta] \quad (24)$$

n . dereceden doğrusal adi diferansiyel denklem için başlangıç koşulları ise $y^{(\nu)}(A) = y_0^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n - 1$) olarak tanımlanmıştır (Lepik, 2009a). Eşitlik (24)'te $A_{\nu}(x)$ ve $f(x)$ probleme ait bilinen fonksiyonlar, $y_0^{(\nu)}$ ise başlangıç koşulunda verilen sabit değerdir. Haar dalgacığı çözümü için en yüksek dereceden türevli ifadenin (Eşitlik 25), $n - \nu$ defa integrali alınır.

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) \quad (25)$$

$$y^{(\nu)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i p_{n-\nu,i}(x) + Z_{\nu}(x), \quad Z_{\nu}(x) = \sum_{\sigma=0}^{n-\nu-1} \frac{1}{\sigma!} (x-A)^{\sigma} y_0^{(\nu+\sigma)} \quad (26)$$

Burada a_i dalgacık katsayılarıdır. Kollokasyon noktaları için x yerine x_l kullanılır. Eşitlik (8) ve (9)'daki adımlar izlenerek a_i katsayıları bulunur. $\nu = 0$ varsayılarak istenilen fonksiyon $y = y(x)$ elde edilir (Lepik, 2009a).

2.2.1. Haar Dalgacıklarının Yakınsaklığı

Haar dalgacıkları ile çözülen denklemin, gerçek değerle ne kadar tutarlı sonuç verdiğini hata oranı belirler. $y = y_{ex}(x)$ kesin çözüm olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır (Lepik, 2009a).

$$\delta_{ex} = \max_l \left| \frac{y(x_l)}{y_{ex}(x_l)} - 1 \right| \quad \text{Yerel hata} \quad (27)$$

$$\sigma_{ex} = \left\| y - \frac{y_{ex}}{2M} \right\| \quad \text{Genel hata} \quad (28)$$

3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde kesin çözümü olan ve literatürden seçilen diferansiyel denklem çözümleri Haar dalgacık yöntemi ile çözülmüş ve elde edilen bulgular verilmiştir. Hesaplamalar MATLAB (2020b) kullanılarak yapılmıştır. Analitik ve sembolik işlemlerdeki tanımlamalar ve hesap kolaylığı sebebiyle MATLAB kullanımı öne çıkmaktadır.

Uygulama 1. $y^{(6)}(x) + y(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\right)x \sin\left(\frac{1}{2}\right)x$, $x \in [0, \pi]$ denklemini için başlangıç değerleri $y_0 = 1$, $y_0' = -1$, $y_0'' = 0.3$, $y_0''' = 0$, $y_0^{IV} = 0$, $y_0^V = 1$ olarak verilen denklem Lepik'in (Lepik,

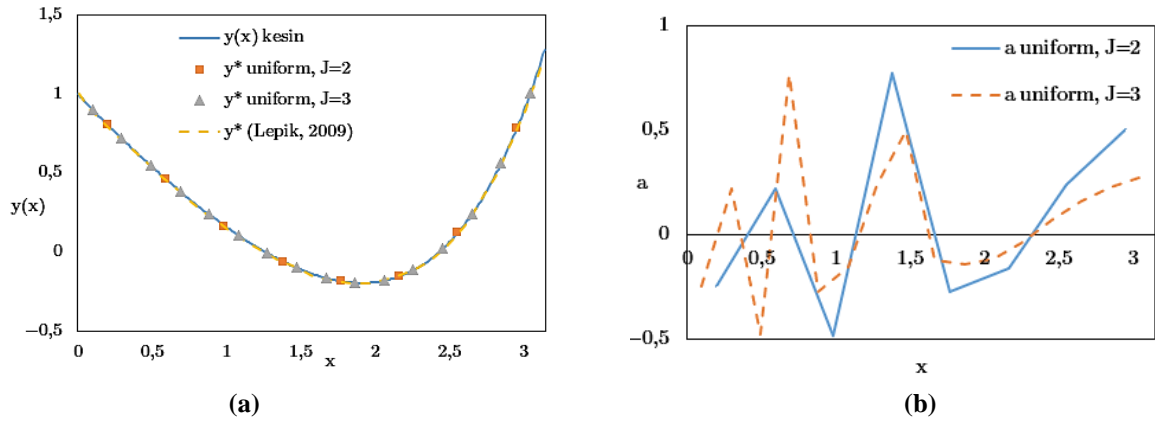
2009a) çalışmasında yer almaktadır. Bu çalışmaya katkı olarak sunulan Eşitlik (13)'ten yararlanılarak, Haar dalgacıkları ile çözüm aşamaları ve sonuçları aşağıda yer almaktadır.

Problem aralıklarına ait kollokasyon noktaları hesaplanır. Diferansiyel denklemi ifade eden Eşitlik (24)'e göre bu denklemin en yüksek dereceden Haar fonksiyonunun gösterimi

$$y^{(6)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_i) \quad \text{Eşitlik (24) ile belirlenir. Eşitlik (25)'e göre } y(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i p_{6,i}(x) +$$

$$\sum_{\sigma=0}^6 \frac{1}{\sigma!} (x-0)^\sigma y_0^{(\sigma)} \quad \text{işlemleri yapılır. Eşitlik (9)'daki gibi bilinmeyen } \mathbf{a} \text{ vektörlerini bulmak için}$$

Eşitlik (9)'un sağ tarafında yer alan Haar integral matrisleri aralığının düzenlenmesi gerekir. Sınırların dönüştürülmesi yerine, problem formülasyonunda yapılan bu değişiklik; integral matrislerini, fonksiyonun yer aldığı derecenin katsayı çarpanı olarak kullanılması ile işlemleri genelleştirmeyi amaçlar. Bu örnek için problem çözümünde yer alan 6.dereceden Haar integral matrisi için düzenleme $(\pi-0)^6 P_6$ olacaktır. Eşitlik (9)'un sağ tarafının bu düzenleme ile çözülmesi ile diferansiyel denkleme ait sonuç aşağıdaki gibidir. Bu örnek üniform aralıklı olarak çözülmüştür.



Şekil 1. (a) $J = 2$ ve $J = 3$ için diferansiyel denklem çözümü, (b) $J = 2$ ve $J = 3$ değerlerine karşılık a katsayılarındaki değişim

Çözünürlük seviyesini ifade eden J parametresi arttıkça denklem çözümde kullanılan kollokasyon nokta sayısı da artar. Böylece sayısal sonuçlar kesin çözüme daha fazla yakınsar. Eşitlik (27) ve (28) ile denklemin kesin çözümüne ait hata oranları hesaplanmıştır.

Tablo 1. $J = 2$ ve $J = 3$ için hata oranları

	Yerel Hata	Genel Hata
$J = 2$	0,119644	0,004674
$J = 3$	0,03489	0,00085

Şekil 1(b), a 'daki değişim ile hata oranları arasındaki ilişkiyi gösterir. a 'ların sifıra yakınsaması hatanın azaldığının göstergesidir. Şekil 1(b)'den görüldüğü gibi, J çözünürlük değerlerinin artmasıyla Haar fonksiyonundaki a katsayı vektöründeki değerler sifıra yakınsamaktadır. Bu durumda Şekil

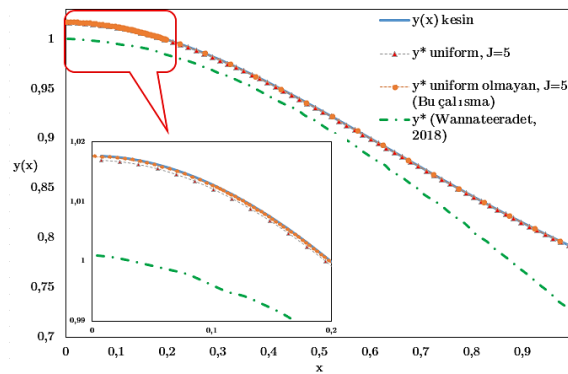
1(a)'da görülen karşılaştırmalı grafiklerinden görüldüğü gibi, Haar çözümleri kesin çözüme daha fazla yakınsar. Tablo 1'de verilen hata oranları çözünürlükteki (J) artışın hata oranında büyük oranda azalmaya yol açtığını sayısal olarak ortaya çıkartmaktadır.

Uygulama 2. $y''(x) + y'(x) + y(x) = \sin x$ için $[0, 1]$ çözüm aralığında sınır değerler $y'(0) = 0$, $y(0,2) = 1$ olarak verilen denklem Wannateeradet'in (2018) çalışmasından alınmıştır. Üniform ve üniform olmayan aralıklara J çözünürlük değerleri 3, 5, 7 ve 9 alınarak hesaplamalar yapılmıştır. Üniform olmayan hesaplamada sıklaştırma noktaları problemde verilen sınır şartları $(0, 0,2)$ aralığında ve sayıları en fazla $\frac{2m}{2} - 2$ kadarı bu aralıkta kalacak şekilde çözülmüştür. Tablo 2'de yer alan sonuçlara göre sıklaştırma yapılması durumunda hata oranlarının azaldığı görülür. Haar çözümünde uygulanan sıklaştırma ile kesin çözüm sonuçlarına, Wannateeradet tarafından verilen sonuçlardan daha iyi bir yakınsama elde edilmiştir.

Tablo 2. $J = 3, 5, 7$ ve 9 için sıklaştırma kullanılmadığında ve sıklaştırma varken hata oranları

	Yerel Hata		Genel Hata	
	Sıklaştırma olmadan ($\times 10^{-7}$)	Sıklaştırma varken ($\times 10^{-7}$)	Sıklaştırma olmadan ($\times 10^{-7}$)	Sıklaştırma varken ($\times 10^{-7}$)
$J = 3$	6602,34	1308,55	1444,15	242,20
$J = 5$	775,19	261,12	48,56	16,56
$J = 7$	452,33	68,13	7,19	1,08
$J = 9$	109,13	19,84	0,43	0,08

Üniform aralıklı çözüm yönteminde J çözünürlüklerinin artması ile kesin çözüme yakınsama sınırlı kalmakta iken, üniform olmayan aralıklı çözümde aralıkların sıklaştırılması ile kesin çözüme yakınsama artmaktadır. Bu sonuçlar Şekil 2'de ve Tablo 2'de verilen hata değerlerinde açıkça görülmektedir.

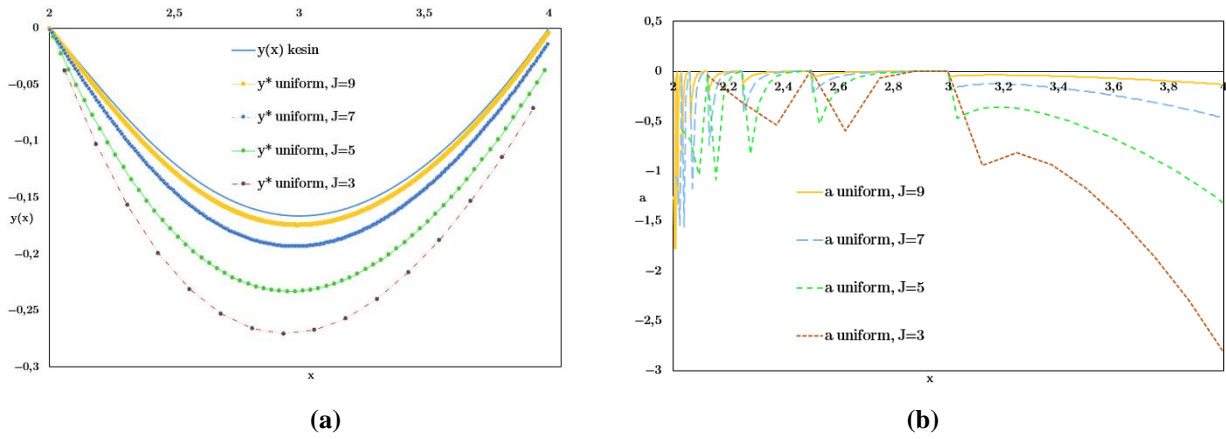


Şekil 2. Wannateeradet'in Haar çalışması (Wannateeradet, 2018), sıklaştırma yokken ve varken geliştirilen algoritmaya göre Haar ile çözümdeki yakınsamaların karşılaştırılması

Uygulama 3. $x^2 y''' + 6xy'' + 6y' = 6$ $x \in [2, 4]$ denklemi için sınır koşulları $y(2) = y(4) = 0$, $y'(3) = 0$ olarak verilen denklem Lepik ve Hein (2014)'in çalışmasında yer almaktadır. Çözümde sınır şartları kullanılırken, hesaplamalarda denklem sistemindeki katsayılarda eşitlik durumu ortaya çıktığı için denklemler sadeleşmekte ve sistem çözümsüzleşmektedir. Lepik, bu tip sistemleri çözmek

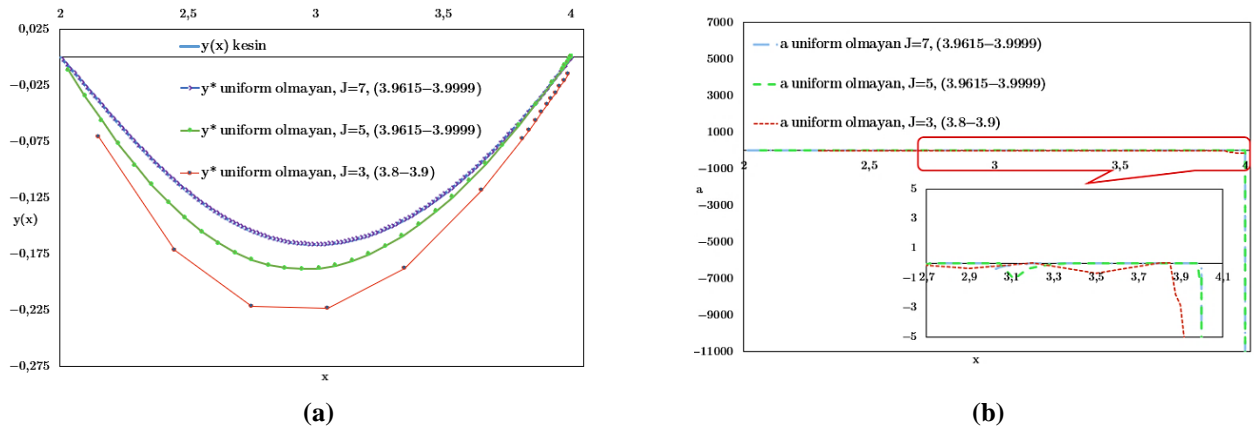
için çözümsüz sistemi $\mu=0$ olarak tanımlamış, çözüm için $\mu=1$ şeklinde başka bir tanım yapmıştır. $\mu=0$ durumunda Haar serisine açılım $y^{(n)}$ teriminden başlarken, $\mu=1$ durumu $y^{(n+v)}$ teriminden başlar ($v=1, 2, \dots$) (Lepik, 2009b). $\mu=1$ durumu ile genişletilmiş Haar serisine açılımı kullanılarak denklem çözülebilir.

Sınır değer problemi olarak verilen diferansiyel denklem üniform olarak ele alındığında, J değerinin üniform çözümde artırılmasının problemde etkili bir yakınsama sunmadığı Şekil 3(a)'da görülmektedir. Şekil 3(b)'de Haar katsayıları, sınır şartlarında hatayı artıran bir grafik çizmektedir.



Şekil 3. (a) $J = 3, 5, 7$ ve 9 için diferansiyel denklemin üniform aralıklı olarak çözümü, (b) $J = 3, 5, 7$ ve 9 için diferansiyel denklemin üniform aralıklı çözümü ile a katsayılarındaki değişim

Diferansiyel denklemin üniform aralıklı çözümünün kesin sonuca iyi bir yakınsama sağlamadığı açıktır. a katsayılarındaki sapma miktarı $x = 3$ değerlerinden sonra oldukça büyük bir artış gösterdiği için özellikle bu bölgede üniform olmayan çözümde sıklaştırma ile yakınsama elde edilmelidir. Şekil 4'te sınır şartının verildiği $x = 4$ noktasına, Haar kollokasyon noktasının yakın oluşması için yapılan çözümü göstermektedir. Şekilden görüldüğü gibi kesin çözüme en iyi yaklaşıklık yüksek çözünürlük ve sınır şartının bulunduğu noktada sıklaştırmanın yapıldığı olduğu $J = 7$ durumundadır. Haar kollokasyon noktasının $x = 4$ 'e en yakın olduğu durumda en iyi yaklaşıklık elde edilmiştir.



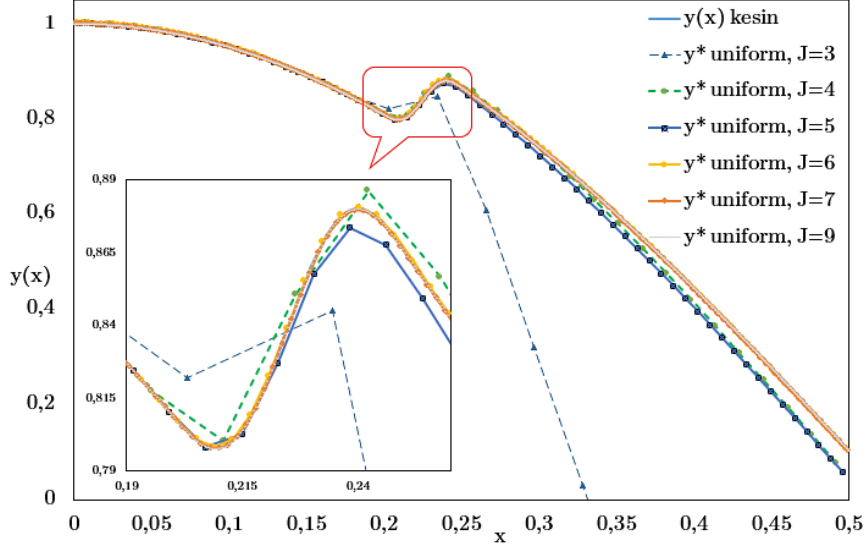
Şekil 4. (a) $J = 3, 5$ ve 7 için diferansiyel denklemin bu çalışmadaki sıklaştırma kullanılarak üniform aralıklı olmayan çözümü, **(b)** $J = 3, 5$ ve 7 için diferansiyel denklemin bu çalışmadaki sıklaştırma kullanılarak üniform aralıklı olmayan çözümü ile a katsayılarındaki değişim (J çözünürlükleri hesabında sıklaştırma uygulanan aralık $(3,9615-3,9999)$ ve $(3,8-3,9)$ olarak ifade edilmiştir.)

Tablo 3. $J = 3, 5$ ve 7 için sıklaştırma kullanılmadığında ve sıklaştırma varken hata oranları

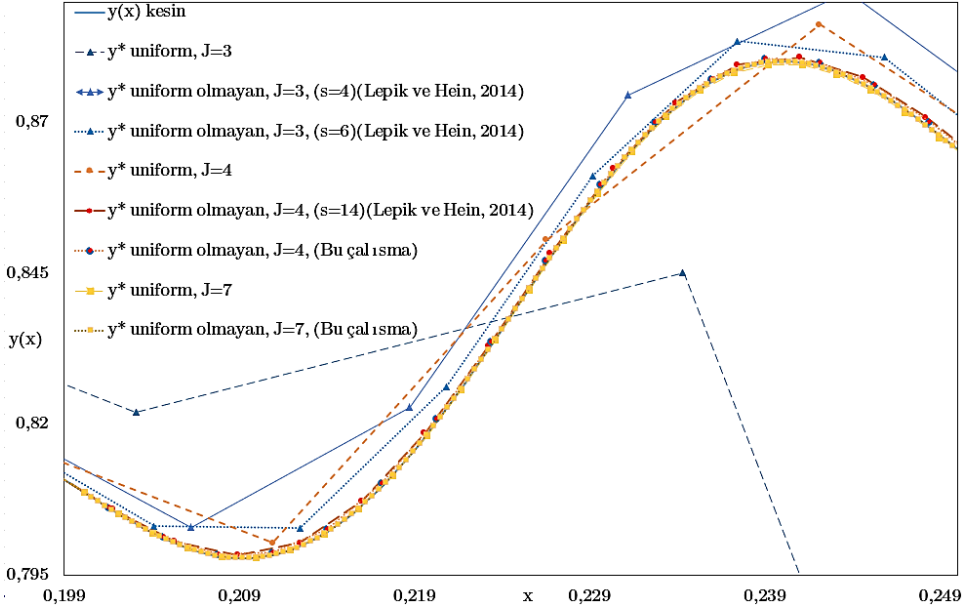
	Sıklaştırma varken aralıklar ve kollokasyon sayıları (k.s.)		Yerel Hata		Genel Hata	
			Sıklaştırma olmadan $\mu=1$ ($\times 10^{-4}$)	Sıklaştırma varken $\mu=1$ ($\times 10^{-4}$)	Sıklaştırma olmadan $\mu=1$ ($\times 10^{-4}$)	Sıklaştırma varken $\mu=1$ ($\times 10^{-4}$)
$J = 3$	(3,8-3,9)	k.s.=4	27249,06	47306,70	209,94	81,94
$J = 5$	(3,8-3,9)	k.s.=4	9115,11	8037,10	26,35	27,71
	(3,8-3,9)	k.s.=12		358,77		1,95
	(3,9615-3,9999)	k.s.=4		4073,23		13,41
	(3,92-3,9999)	k.s.=20		392,29		1,21
$J = 7$	(3,8-3,9)	k.s.=4	3746,19	5287,35	0,94	2,16
	(3,9615-3,9999)	k.s.=4		34,32		0,02

Sınır şartlarının olduğu $x = 4$ noktasına yakın olduğu için bu nokta civarında kollokasyon noktalarının sıklaştırılmasının daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Tablo 3'te görüldüğü gibi yerel ve genel hata oranları J değerlerinin artması ile azalma göstermektedir. Çözünürlüğün katkısının yanısıra sıklaştırma uygulanması ile kesin çözüme yakınsamanın daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Sıklaştırma bölgesinde kollokasyon nokta sayılarının etkisi, $J = 5$ için Tablo 3'te ayrıntılı olarak verilmiştir. Kollokasyon noktalarının artırılması ile yerel hata 0,036 değerine kadar düşmektedir.

Uygulama 4. $y'' + k^2y = f$ $x \in [2, 4]$ denklemi için $f = \begin{cases} d \sin(\alpha x) & x \in [x_*, x_{**}] \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ ve sınır koşulları $y(2) = y(4) = 0$, $y'(3) = 0$ olarak verilen denklem, Lepik ve Hein (2014)'in çalışmasında yer almaktadır. $k = \pi$, $d = 400$, $\alpha = 40\pi$, $x_* = 0,2$, $x_{**} = 0,25$ seçimi ile problem, çözüm aralığı Δx_l şeklinde 3 alt aralığa ayrılmış olup Eşitlik (19) sıklaştırma algoritması ve Eşitlik (23)'te verilen denklemin grafiğinde ani değişim gösteren bölgelerde alt aralıklarda sıklaştırma yaparak üniform olmayan metot kullanılarak kesin çözüme daha iyi bir yakınsama sağlanmaktadır.



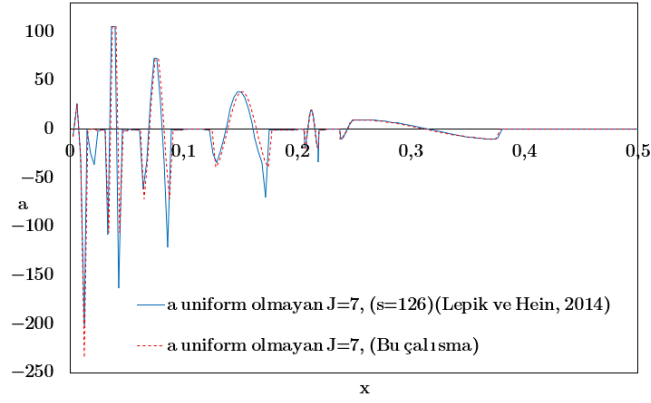
Şekil 5. $J = 3, 5, 7$ ve 9 için diferansiyel denklemin üniform aralıklı olarak çözümü



Şekil 6. $J = 3, 4$ ve 7 için diferansiyel denklemin üniform ve üniform olmayan aralıklı çözümü (s: Lepik ve Hein'in yönteminde seçilen bölgede kullanılan nokta sayısı)

Şekil 5'te üniform aralıklı çözümde asimptotik davranışın bulunduğu aralıkta sıklaştırma uygulanarak Şekil 6'daki çözüme ulaşılır. Lepik ve Hein'nin kullandığı sıklaştırma algoritmasına ilave olarak geliştirilen bu çalışmadaki sıklaştırmanın en iyi sonuç verdiği grafikten görülmektedir. Çözünürlüğün artmasının kesin çözüme yakınsamaya katkısı ve sıklaştırma algoritmasının istenilen aralıkta istenilen sayıda kollokasyon noktalarının seçimi ile en uygun çözüm elde edilmektedir.

Şekil 7'de görülen ve $J = 7$ için verilen a katsayıları Şekil 5 ve 6 ile incelendiğinde, yüksek çözünürlük durumu için sifra yakınsamanın arttığı ve kesin çözüme yakınsaklığında paralel olarak arttığı görülmektedir. Bu çalışmada geliştirilen sıklaştırma algoritmasının Lepik tarafından verilene göre daha küçük a değerleri türettiği Şekil 7'den anlaşılabilir.



Şekil 7. $J = 7$ için diferansiyel denklemin üniform olmayan aralıklı çözümü ile a katsayılarındaki değişim

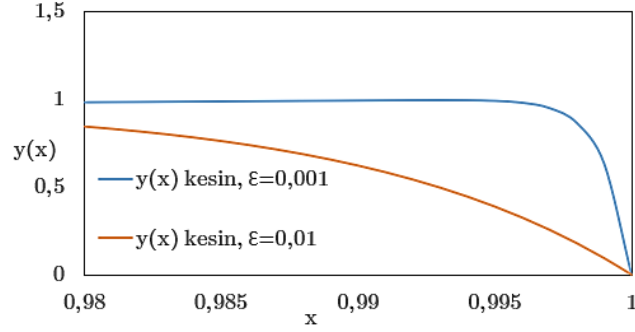
Tablo 4. $J = 3, 4, 5, 6, 7$ ve 9 için sıklaştırma kullanılmadığında ve sıklaştırma varken hata oranları

	Sıklaştırma varken kollokasyon sayıları (k.s.) ve sıklaştırma yöntemi	Yerel Hata		Genel Hata	
		Sıklaştırma olmadan ($\times 10^{-6}$)	Sıklaştırma varken ($\times 10^{-6}$)	Sıklaştırma olmadan ($\times 10^{-6}$)	Sıklaştırma varken ($\times 10^{-6}$)
$J = 3$	k.s.=4 (Lepik ve Hein, 2014)	9671528,340	73148,999	177451,183	2691,144
	k.s.=6 (Lepik ve Hein, 2014)		32429,223		1172,136
$J = 4$	k.s.=14 (Lepik ve Hein, 2014)	421434,577	7896,411	3915,388	152,278
	k.s.=16 (Bu çalışma)		6723,423		121,313
$J = 5$	k.s.=30 (Lepik ve Hein, 2014)	514453,713	2138,714	3437,260	23,872
	k.s.=30 (Bu çalışma)		2014,612		21,477
$J = 6$	k.s.=62 (Lepik ve Hein, 2014)	26210,634	575,220	97,317	4,126
	k.s.=62 (Bu çalışma)		561,696		3,934
$J = 7$	k.s.=126 (Lepik ve Hein, 2014)	34505,264	151,913	103,910	0,956
	k.s.=126 (Bu çalışma)		150,383		0,946
$J = 9$	k.s.=510 (Lepik ve Hein, 2014)	2210,901	26,630	3,228	0,315
	k.s.=510 (Bu çalışma)		26,621		0,316

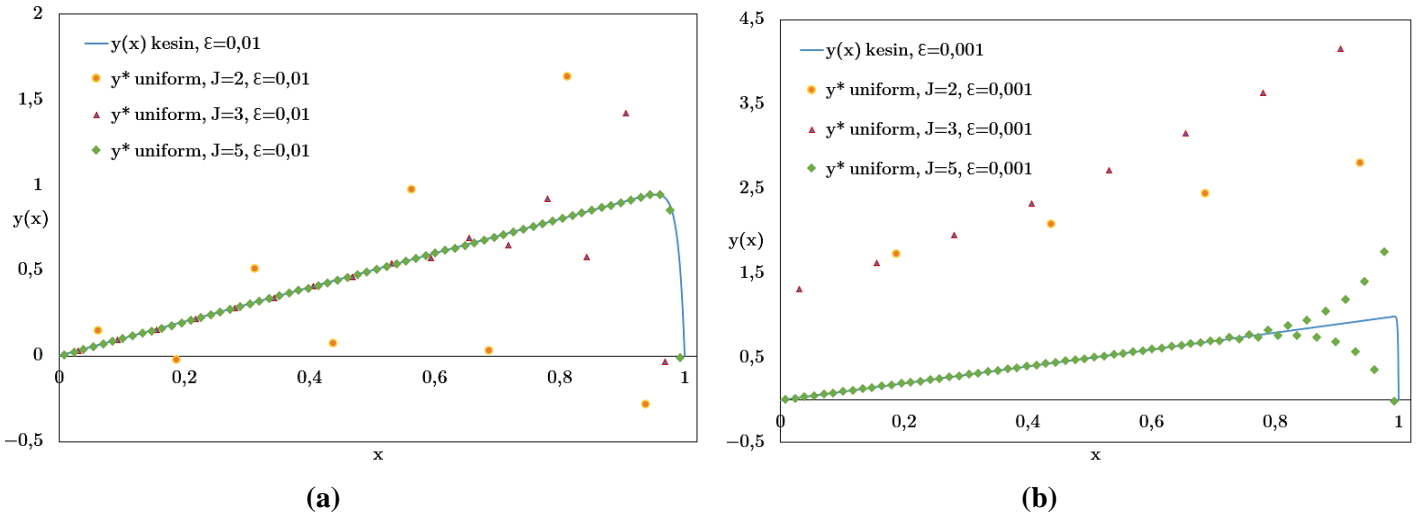
Tablo 4'te görüldüğü gibi üniform grid aralıklarıyla, tüm durumlarda hata değerleri yüksektir. Sıklaştırma için Lepik ve Hein (2014)'in önerdiği algoritma kullanıldığında kesin değere yakınsamanın arttığı görülür. Bu çalışmada sunulan sıklaştırma algoritması ile de sayısal çözüm sonuçları oldukça tutarlı olarak kesin değerlere yaklaşmıştır. $J = 7$ alınarak üniform olmayan durumda sıklaştırma değerleri hata miktarları yerel noktalarda $150,383 \times 10^{-6}$ 'e, genel hata durumunda $0,946 \times 10^{-6}$ 'e kadar küçülmüştür.

Uygulama 5. $-\varepsilon y'' + y' = 1 \quad x \in [0, 1]$ denklemi $\varepsilon > 0$, $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları verilen bir denklemdir (Lepik ve Hein, 2014). Denklemin çözümünde ε değeri 1'den oldukça küçük bir değer

seçildiğinde problemin kesin çözümü için ekstra noktalara ihtiyaç duyulur. Sınırlardaki belirsizliği ortadan kaldırmak için Lepik, Eşitlik (22)'deki sıklaştırma algoritmasını önermiştir, üniform olmayan alt aralıklar ile kesin çözüme yakınsamanın arttığını belirtmiştir (Lepik, 2005). Bu çalışmada, Lepik'in algoritmasına ilave olarak çalışmada önerilen sıklaştırma algoritması kullanılmıştır. ε değerinin 0,01 ve 0,001 olduğu durum için Şekil 8'de diferansiyel denklemin kesin çözümü kritik bölgede görülmektedir. Şekil 8'den görüldüğü gibi ε değeri çözümü büyük oranda değiştirmektedir.



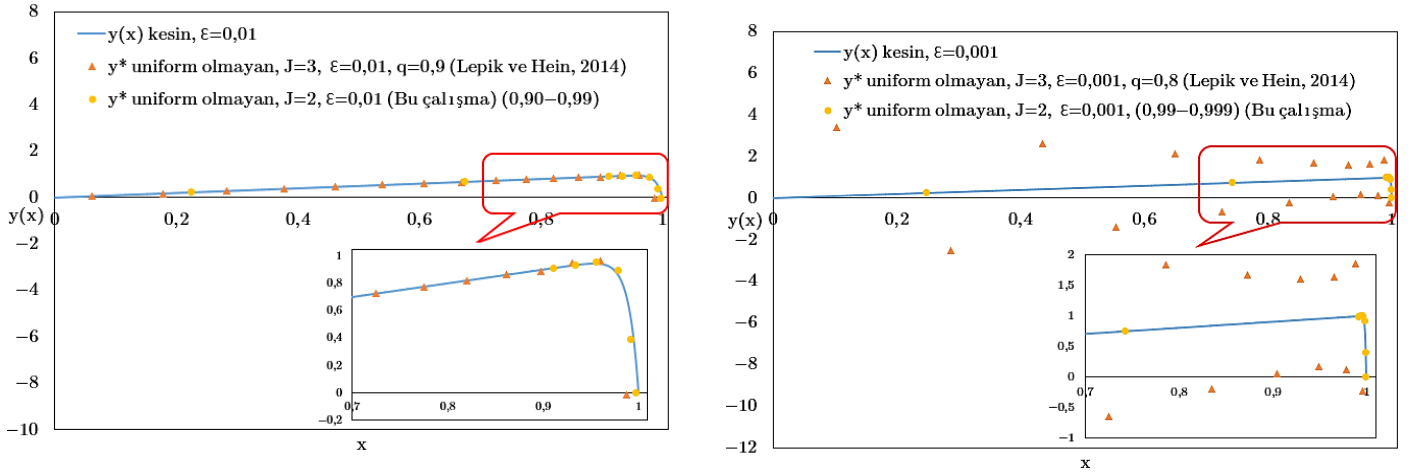
Şekil 8. $\varepsilon = 0,01$ ve $\varepsilon = 0,001$ için diferansiyel denklemin çözüm grafiğindeki değişim



Şekil 9. (a) $\varepsilon = 0,01$ için $J = 2, 3$ ve 5 için diferansiyel denklemin üniform aralıklı çözümü, (b) $\varepsilon = 0,001$ için $J = 2, 3$ ve 5 için diferansiyel denklemin üniform aralıklı çözümü

Üniform kollokasyon noktaları ile Haar dalgacık çözümlerinin yüksek çözünürlükte bile iyi sonuç vermeyeceği aşikardır. Bu yüzden üniform olmayan kollokasyon noktaları kullanan Haar dalgacık çözümleri çeşitli çözünürlük seviyeleri için Lepik tarafından önerilen ve bu çalışmada önerilen sıklaştırmalar ile Şekil 10 (a) ve (b)'de ve Tablo 5 ve 6'da sunulmuştur. Tablo 5'te üniform aralıklı çözümün hata oranları düşük görünse de aynı çözümlere ait grafiklerden özellikle düşük çözünürlük seviyelerinde aslında kesin çözümü yakalamadığı anlaşılmaktadır. Üniform aralıklı çözüm sonuçları, kesin çözüm etrafında salınım yaptığı için sayısal olarak hata düşük ancak grafik olarak kesin çözümden oldukça farklıdır. Şekil 9'dan ve Tablo 5'ten görüldüğü gibi hata oranı yüksek çözünürlükte

düşse de kritik bölge olan 0,9 – 1 aralığında nokta sayısının az olması sıklaştırmaz analizdeki düşük yerel hata oranlarını açıklamaktadır. Şekil 10 (a) ve (b) kısa ve öz olması için karşılaştırılan sıklaştırma algoritmalarının en başarılı en düşük çözünürlüğü için sunulmuştur.



(a)

(b)

Şekil 10. (a) $\varepsilon = 0,01$ için $J = 3$ ve $J = 2$ için diferansiyel denklemin üniform olmayan aralıklı çözümü, (b) $\varepsilon = 0,001$ için $J = 3$ ve $J = 2$ için diferansiyel denklemin üniform olmayan aralıklı çözümü

Şekil 10 (a) ve (b)'den ve Tablo 5 ve 6'dan görüldüğü gibi Lepik tarafından önerilen sıklaştırma algoritması düşük çözünürlük seviyelerinde başarısız olmaktadır. Bu çalışmada önerilen sıklaştırmannın ise düşük çözünürlükte bile iyi sonuç verdiği ancak sıklaştırma aralığının seçiminin önemi yine Şekil 10 (a) ve (b), Tablo 5 ve 6'dan takip edilebilir.

Tablo 5. $\varepsilon = 0,01$, $J = 2, 3$ ve 5 için sıklaştırma kullanılmadığında ve sıklaştırma varken hata oranları

		Yerel Hata		Genel Hata	
	Sıklaştırma varken sıklaştırma yöntemi	Sıklaştırma olmadan	Sıklaştırma varken	Sıklaştırma olmadan	Sıklaştırma varken
$J = 2$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	1,41742	2,15950	0,21576	0,21859
	q=0,8 (Lepik ve Hein, 2014)		2,69233		0,20448
	q=0,7 (Lepik ve Hein, 2014)		3,20971		0,17201
	(0,90-0,99) (Bu çalışma)		1,01148		0,03223
$J = 3$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	1,03388	1,01792	0,07059	0,04489
	q=0,8 (Lepik ve Hein, 2014)		1,01206		0,02034
	q=0,7 (Lepik ve Hein, 2014)		1,01047		0,00658
	(0,99-0,999) (Bu çalışma)		1,01192		0,00278
$J = 5$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	1,01462	1,01013	0,00848	0,00037
	q=0,8 (Lepik ve Hein, 2014)		1,01010		0,00006
	q=0,7 (Lepik ve Hein, 2014)		1,01010		0,00013
	(0,99-0,999) (Bu çalışma)		1,01012		0,00021

Tablo 6. $\varepsilon = 0,001$, $J = 2, 3, 5, 6$ ve 7 için sıklaştırma kullanılmadığında ve sıklaştırma varken hata oranları

	Sıklaştırma varken sıklaştırma yöntemi	Yerel Hata		Genel Hata	
		Sıklaştırma olmadan	Sıklaştırma varken	Sıklaştırma olmadan	Sıklaştırma varken
$J = 2$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	22,57536	34,99602	0,57971	0,87710
	q=0,8 (Lepik ve Hein, 2014)		67,09280		1,75555
	q=0,7 (Lepik ve Hein, 2014)		208,34699		5,99076
	(0,99-0,999) (Bu çalışma)		1,00158		0,02263
$J = 3$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	40,85360	52,41618	0,59939	0,60881
	q=0,8 (Lepik ve Hein, 2014)		31,89938		0,39123
	q=0,7 (Lepik ve Hein, 2014)		1,00163		0,02824
	(0,99-0,999) (Bu çalışma)		1,00159		0,00474
$J = 5$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	1,00158	1,00158	0,07948	0,00110
	q=0,8 (Lepik ve Hein, 2014)		-		0,00314
	q=0,7 (Lepik ve Hein, 2014)		-		0,00249
	(0,99-0,999) (Bu çalışma)		1,00158		0,00272
$J = 6$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	1,00401	1,01010	0,00956	0,02927
	(0,95-0,999) (Bu çalışma)		1,01011		0,00007
$J = 7$	q=0,9 (Lepik ve Hein, 2014)	1,00229	1,01009	0,00360	0,04605
	(0,95-0,999) (Bu çalışma)		1,01010		0,00623

4. Sonuç

Bu çalışmada Haar dalgacık yöntemi ile kesin çözümü bilinen diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri yapılmıştır. Sayısal sonuçların kesin çözüme yaklaşıklığını etkileyen faktörlerin başarı oranları tablo ve şekiller ile raporlanmıştır.

Diferansiyel denklemlerin Haar dalgacığı ile çözümünde, üniform ve üniform olmayan türdeki çözümlerde; aralığın düzenlenmesi sonucu üniform olmayan çözümün kesin çözüme daha iyi yakınsama sağladığı görülmektedir. Üniform olmayan çözümde sıklaştırma algoritmaları kullanılması; problemde karşılaşılan ani değişim ve çözümün stabilitesinin kaybolduğu noktalarda, sınır noktalarının sistemi çözüme yetersiz kaldığı durumlarda çözümün daha iyi olmasını sağlamaktadır. Lepik ve Hein (2014)'in önerdiği algoritma, problemin türüne göre kollokasyon noktalarının ara bölgeler veya sınırlarda artırılması şeklinde iken, bu çalışmada literatüre katkı olarak sunulan sıklaştırma algoritması ise problem türü fark etmeksizin istenilen bölgede istenilen sıklıkta yapılması ile avantaj sağlamaktadır. Bu çalışmada önerilen sıklaştırma algoritması, Lepik ve Hein'in sıklaştırma algoritmalarına göre kesin çözüme daha yakın sonuçlar üretmiştir. Özellikle küçük katsayılardan dolayı stabil olmayan diferansiyel denklemin çözümünde düşük çözünürlük seviyesinde dahi çözüm elde edilmesi bu çalışmada önerilen algoritmanın kullanışlı olduğunu göstermiştir.

Bir diferansiyel denklemin Haar matrisleri ile çözümünde eğer üniform aralık kullanılıyorsa matrislerin çözüm aralığına genişletilmesi için bu çalışmada kullanılan yöntem, yazarların bildiğine göre, literatürde daha önce kullanılmamıştır. Anılan matris genişletme ile aralık taşıma yöntemi

analitik olarak problem sınırlarını tekrar düzenleme ihtiyacını ortadan kaldırıp sayısal hesaplandığı için çözüme hız kazandırır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağladıklarını beyan eder.

Kaynakça

- Berwal N., Panchal D., Parihar CL. Haar wavelet method for numerical solution of telegraph equations. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics* 2013; (30): 317–328.
- Cattani C., Pecoraro M. Nonlinear differential equations in wavelet bases 2000; 3(4): 4–10.
- Cattani C. Haar wavelets based technique in evolution problems. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics, Mathematics* 2004; 53(1): 45.
- Chen CF., Hsiao CH. Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems. *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications* 1997; 144(1).
- Graps A. An introduction to wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering* 1995; 2(2): 50–61.
- Haar A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Mathematische Annalen* 1910; 69(3): 331–371.
- Heydari M., Avazzadeh Z., Hosseinzadeh N. Haar wavelet method for solving high-order differential equations with multi-point boundary conditions. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2022; 8(2): 528–544.
- Lepik Ü. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. *Mathematics and Computers in Simulation* 2005; 68(2): 127–143.
- Lepik Ü. Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method. *Applied Mathematics and Computation* 2007; 185(1): 695–704.
- Lepik Ü. Solving integral and differential equations by the aid of non-uniform Haar wavelets. *Applied Mathematics and Computation* 2008; 198(1): 326–332.
- Lepik Ü. Haar wavelet method for solving stiff differential equations. *Mathematical Modelling and Analysis* 2009a; 14(4): 467–481.
- Lepik Ü. Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method. *Applied Mathematics and Computation* 2009b; 214(2): 468–478.
- Lepik Ü. Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets. *Computers & Mathematics with Applications* 2011; 61(7): 1873–1879.
- Lepik Ü., Hein H. *Mathematical engineering Haar wavelets with applications* 2014; (4): Springer

Retrieved from <http://www.springer.com/series/8445>.

- Lepik Ü., Hein H. Application of the Haar wavelet method for solution the problems of mathematical calculus. *Waves, Wavelets and Fractals* 2015; 1(1).
- Majak J., Pohlak M., Karjust K., Eerme M., Kurnitski J., Shvartsman BS. New higher order Haar wavelet method: Application to FGM structures. *Composite Structures* 2018; 201: 72–78.
- Majak J., Shvartsman B., Karjust K., Mikola M., Haavajõe A., Pohlak M. On the accuracy of the Haar wavelet discretization method. *Composites Part B: Engineering* 2015; 80.
- Maleknejad K., Mirzaee F. Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations. *Applied Mathematics and Computation* 2005; 160(2): 579–587.
- Mehra M., Siddiqi AH., Brokate M., Gupta AK. Wavelets and differential equations - A short review. *AIP Conference Proceedings* 2009; 241–252.
- Stanković RS., Falkowski BJ. The Haar wavelet transform: its status and achievements. *Computers & Electrical Engineering* 2003; 29(1).
- The MathWorks Inc. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. 2020b
. <https://www.mathworks.com/help/stats/index.html>.
- Varolgüneş S. Gerçek zamanlı sismik verilerin dalgacık dönüşümü ile analizi. Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, sayfa no: 91, Diyarbakır, Türkiye, 2013.
- Wannateeradet P. Haar wavelet method for solving differential equations. Prince of Songkla University, 2018.