

Osmangazi Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi, C.IX, S.1, 1996
Eng. & Arch. Fac., Osmangazi University, Vol. IX, No.1, 1996

İKİ EKLEMLİ VE UCUNDA YÜK BULUNAN ESNEK BİR ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ

Osman PARLAKTUNA¹, Scrap ÖN², Neziha ÖZTÜRK³

ÖZET: *Bu çalışmada, çok eklemlili ve ucunda yük bulunan esnek robot kollarının modellenmesi ele alınmıştır. Sistemin toplam enerji ifadeleri elde edildikten sonra, "Hamiltonian Prensibi" kullanılarak sistemi tanımlayan dinamik denklemler ve sınır koşulları elde edilmiştir. Elde edilen bu çok karmaşık ve doğrusal olmayan denklemler kontrol tasarımında kullanılabilir.*

ANAHTAR KELİMELELER: *Esnek robot kolu, doğrusallaştırma*

MODELLING OF A TWO-LINK FLEXIBLE MANIPULATOR WITH A PAYLOAD AT ITS TIP

ABSTRACT: *In this study, modelling of multi-link flexible manipulators with payload at their tips is considered. Having obtained the total energy terms of the system, the dynamical equations and the boundary conditions defining the system are derived by using the "Hamiltonian Principle". These non-linear and complex equations can be used in a control design after linearization.*

KEYWORDS: *Flexible manipulator, linearization.*

¹ Osman PARLAKTUNA, (Yrd. Doç. Dr.), Osmangazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Böl. Meşelik Kampüsü, 26480 Eskişehir

² Scrap ÖN, (Arş.Gör.), Osmangazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Böl. Meşelik Kampüsü, 26480 Eskişehir

³ Neziha ÖZTÜRK, (Arş.Gör.), Osmangazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Böl. Meşelik Kampüsü, 26480 Eskişehir

I. GİRİŞ

Robotik uygulamalarında hızı ve hareket yeteneğini arttırmak ve enerji tüketimini azaltmak için, hafif ağırlıkta ve esnek kollar kullanılmaktadır. Bu kollardaki esneme özelliği, sistem dinamiğini de etkilemektedir [1].

Sonsuz boyutta esnek modların yer aldığı ve doğrusal olmayan denklemlerin bulunduğu esnek robot kolu modellerinde, geri-besleme yoluyla tam bir doğrusallaştırma mümkün olmamaktadır [2]. Ancak tek eklemli esnek yapılar için çeşitli kontrol yaklaşımları geliştirilmiştir [3-6]. Yüksek modların genliklerinin ihmal edilebilir büyüklükte olması nedeniyle, sonlu sayıda modlar kullanılarak kontrol yapılabilmektedir. Bu yaklaşımlarda kullanılan mod sayıları, algılayıcıların ve kuvvet uygulayıcıların özelliklerine göre belirlenmektedir. Literatürde, iki veya daha çok eklemli esnek robot kolları üzerindeki çeşitli çalışmalar bulunmaktadır [7-9]. Bu çalışmada, çok eklemli ve ucunda belli bir yük bulunan esnek robot kolu sisteminin modellenmesi yapılmıştır. Denklemler türetilirken kolaylık olması açısından, iki eklemli bir sistem ele alınmıştır.

II. SİSTEM MODELİ

Şekil-1 'de iki eklemli ve ucunda M_2 yükü bulunan esnek bir robot kolu görülmektedir. I_h : 0 noktasının eylemsizlik momenti, I_{L_i} : I linkinin eylemsizlik momenti, I_i : M_i kütesinin kendi kütle merkezine göre eylemsizlik momenti, L_i : i linkinin uzunluğu, E_i : i linkinin Young Esneklik Modülü, ρ_i : I linkinin kütle yoğunluk fonksiyonu, m_i : I linkinin kütlesi, A_i : I linkinin kesit alanı, l_i : i linkine ait uzunluk değişkeni, $\alpha_i(I_i, t)$: I_i noktasında I linkinin X_i 'den sapma miktarı, O, X_o, Y_o : Hareketsiz koordinat sistemi, O_i, X_i, Y_i : Orijini I linkinin başlangıç noktası olan ve linkin hareketlerine göre değişen koordinat sistemi (Bu koordinat sisteminde X_i , O_i noktasında i linkine çizilen teğettir.), O_{oi}, X_{oi}, Y_{oi} : Orijini i linkinin bitiş noktasında olan koordinat sistemi (Bu koordinat sisteminde X_{oi} , I linkinin uç noktasında linke çizilen teğettir.), M_i : O_{i+1} noktasındaki kütle, M_p : Kolu uç noktasındaki kütle ($M_p = M_2$), $\{E_i\}$: O_i, X_i, Y_i koordinat sistemi için birim vektör, $\{E_o\}$: Hareketsiz koordinat sisteminin birim vektörü, T_i : O_i, X_i, Y_i koordinat sisteminin hareketsiz koordinat sisteminde ifade etmek için kullanılan dönüşüm matrisi, R_i : I linkinin pozisyon vektörü, R_{ei} : I linkinin uç noktasının pozisyonunu belirten vektör, θ_i : X_i ile X_{i-1} arasındaki açı, φ_{i+1} : X_{oi} ile X_{i+1} arasındaki açı ($\varphi_1 = \theta_1$), g : Yerçekimi ivmesi, u_i : i linkine uygulanan tork olmak üzere, sistemin toplam enerji ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir :

II.1. Toplam Kinetik Enerji

0 noktasının eylemsizliğinden dolayı oluşan kinetik enerji :

$$\frac{1}{2} I_h \dot{\theta}_1^2$$

i linkinin hareketinden dolayı oluşan kinetik enerji :

$$\frac{1}{2} \int_{m_i} \dot{R}_i \dot{R}_i dm_i$$

M_i kütesinin hareketinden dolayı oluşan kinetik enerji :

$$\frac{1}{2} I_i \dot{\xi}_i^2$$

şekindedir. Burada,

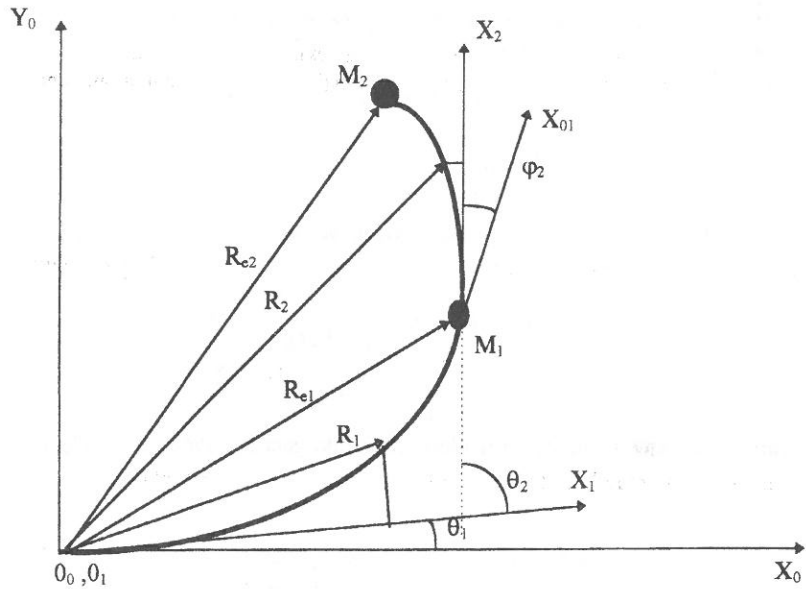
$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\alpha}_{i,j}(L, t)$$

ve

$$\dot{\alpha}_{i,j}(L, t) = \frac{\partial \dot{\alpha}_{i,j}}{\partial t} \Big|_{l=L}$$

eşitlikleri vardır. Böylece, sistemin toplam kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$T = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(M_i \dot{R}_{ei} \cdot \dot{R}_{ei} + I_i \dot{\xi}_i^2 + \int_{m_i} \dot{R}_i \dot{R}_i dm_i \right) \quad (1)$$



Şekil 1. İki Eklemlı Esnek Robot Kolu

II.2. Toplam Potansiyel Enerji

Burada robot kolunun hareket düzlemi sadece yatay düzlemle sınırlandırılmamış, düşey yönde de hareketin olabileceği kabul edilmiştir. Böylece yerçekimi kuvvetinin etkileri de gözönüne alınmıştır.

I linkinin yerçekiminden ve esneme özelliğinden dolayı oluşan potansiyel enerji :

$$\int_0^L \left[\rho_i g(R_i \cdot e_{y0}) + \frac{1}{2} E_i I_i \alpha_{i,l,l}^2(l, t) \right] dl$$

M_i kütesinin potansiyel enerjisi :

$$M_i g(R_{ei} \cdot e_{y0})$$

olmak üzere sistemin toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{l_1} \left[\rho_1 g(R_1 \cdot e_{y_0}) + \frac{1}{2} E_1 I_1 \alpha_{1,l_1}^2(l_1, t) \right] dl_1 + \int_0^{l_2} \left[\rho_2 g(R_2 \cdot e_{y_0}) + \frac{1}{2} E_2 I_2 \alpha_{2,l_2}^2(l_2, t) \right] dl_2 \\
&\quad + M_1 g(R_{e_1} \cdot e_{y_0}) + M_2 g(R_{e_2} \cdot e_{y_0}) \quad (2)
\end{aligned}$$

Burada e_{x_0} ve e_{y_0} , hareketsiz koordinat sisteminin sırasıyla x yönündeki ve y yönündeki birim vektörleridir. $\alpha_{i,l_i}, \alpha_{i,l_i}, \alpha_{i,l_i}$ ve $\alpha_{i,l_i,l_i,l_i}, \alpha_i(l_i, t)$ 'nin l_i 'ye göre sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevlerini göstermektedir.

II.3. Toplam Korunumsuz İş

Bu çalışmada ele alınan sistemde korunumsuz iş, eklemelere uygulanan u_1 ve u_2 torkları tarafından yapılan iştir. Kayma, burulma ve eksenel yer değiştirmelerden kaynaklanan enerjiler ihmal edilmiştir.

$$W_{nc} = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 = u_1 \theta_1 + u_2 \varphi_2 \quad (3)$$

Burada $\varphi_2 = \theta_2 - \tan^{-1}(\alpha_{1,l_1}(L_1, t))$ 'dir.

Şekil-1 'de görülen sistemde pozisyon vektörleri, R_i ve R_{e_i} , aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\begin{aligned}
R_i &= R_{e_{i-1}} + T_i \begin{pmatrix} l_i \\ \alpha_i(l_i, t) \end{pmatrix} ; i = 1, 2 \\
R_{e_i} &= R_i|_{l_i=L_i} ; i = 1, 2
\end{aligned}$$

Ele alınan bu sistemde koordinat sistemleri arasındaki geçişleri sağlayan dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibidir :

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esnemenin çok büyük olmayacağı kabul edilirse, $\tan^{-1}(\alpha_{1,l_1}(L_1, t)) = \alpha_{1,l_1}(L_1, t)$ yazılabilir.

Yukarıdaki denklemlerden yararlanarak, pozisyon vektörleri R_1 ve R_2 aşağıdaki gibi elde edilir :

$$\begin{aligned}
R_1 &= [l_1 \cos \theta_1 - \alpha_1(l_1, t) \sin \theta_1] e_{x_0} + [l_1 \sin \theta_1 + \alpha_1(l_1, t) \cos \theta_1] e_{y_0} \\
R_2 &= [L_1 \cos \theta_1 - \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \alpha_{21}(L_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2)] e_{x_0} \\
&\quad + [L_1 \sin \theta_1 + \alpha_1(L_1, t) \cos \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \alpha_2(L_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2)] e_{y_0}
\end{aligned}$$

II.4. Hamiltonian Prensibi

$$\int_{t_0}^{t_f} H \cdot dt = \int_{t_0}^{t_f} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (4)$$

Şekil-1'deki sistem için bulunan pozisyon vektörleri, sistemin enerjilerini ifade eden (1-4) nolu denklemlerde yerine konulursa ve bu ifadelerin birinci değişimleri, yani $T, \delta V$ ve W_{nc} elde edilerek (4) nolu denklemden yerine konulursa, sistem dinamiğini tanımlayan denklemler aşağıdaki gibi elde edilir [10]. Bu denklemlerin elde edilmesine ait bazı açıklamalar, Ekler bölümünde verilmiştir.

II.5. θ_1 İle İlgili Elde Edilen Denklem

$$\begin{aligned}
& \left[I_h + I_1 + \frac{1}{3} \rho_1 L_1^3 + M_1 L_1^2 + \rho_2 L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} \rho_2 L_1 L_2^2 \cos \theta_2 + (M_1 + \rho_2 L_2) \alpha_1^2(L_1, t) \right. \\
& + \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 + \rho_1 \int_0^{L_1} \alpha_1^2(l_1, t) dl_1 - \rho_2 L_1 \sin \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 \\
& + \rho_2 \alpha_1(L_1, t) \cos \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2 dl_2 + M_2 L_1^2 + M_2 \alpha_1^2(L_1, t) + M_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 - M_2 L_1 \alpha_2(L_2, t) \sin \theta_2 \\
& + M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 + M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \cos \theta_2 \left. \right] \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{1}{3} \rho_2 L_2^3 + \frac{1}{2} \rho_2 L_1 L_2^2 \cos \theta_2 \right. \\
& + \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 + \rho_2 \int_0^{L_2} \alpha_2^2(l_2, t) dl_2 + \rho_2 \alpha_1(L_1, t) \cos \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 \\
& - \rho_2 L_1 \sin \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 + M_2 L_2^2 + M_2 \alpha_2^2(L_2, t) + M_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 - M_2 L_1 \alpha_2(L_2, t) \sin \theta_2 \\
& - M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 + M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \cos \theta_2 + I_2 \left. \right] (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (M_1 + \rho_2 L_2) L_1 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \\
& + \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \cos \theta_2 - \rho_2 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \sin \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 + \rho_1 \int_0^{L_1} l_1 \ddot{\alpha}_1(l_1, t) dl_1 + \rho_2 \int_0^{L_2} [L_2 \\
& + \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2] \ddot{\alpha}_2(l_2, t) dl_2 + \frac{1}{2} \rho_1 g L_1^2 \cos \theta_1 + \rho_2 g [L_1 L_2 \cos \theta_1 - L_2 \alpha_2(L_2, t) \sin \theta_1 \\
& + \frac{1}{2} L_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] - M_1 L_1 g \cos \theta_1 + M_1 g \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_1 - M_2 g [L_1 \cos \theta_1 - \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_1 \\
& + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \alpha_2(L_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2)] + [(M_1 + M_2) L_1 + M_2 L_2 \cos \theta_2 - M_2 \alpha_2(L_2, t) \sin \theta_2] \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \\
& + [M_2 L_1 \cos \theta_2 + M_2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 + M_2 L_2] \ddot{\alpha}_2(L_2, t) + 2 M_2 \dot{\theta}_1 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_1(L_1, t) + M_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1 \\
& + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + 2 M_2 \alpha_2(L_2, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - M_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - M_2 L_1 \dot{\alpha}_2(L_2, t) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& - M_2 L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 - M_2 L_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - M_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 \\
& - M_2 L_1 \dot{\theta}_1 \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - M_2 L_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 \\
& - M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + M_2 L_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
& + M_2 L_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \\
& + M_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 - M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& + M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + M_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& + M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 + M_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + I_2 \ddot{\alpha}_{2,4}(L_2, t) = u_1 \\
& - 2 \rho_1 \dot{\theta}_1 \int_0^{L_1} \alpha_1(l_1, t) \dot{\alpha}_1(l_1, t) dl_1 - 2 \rho_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) \dot{\alpha}_2(l_2, t) dl_2 - 2 M_1 \dot{\theta}_1 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_1(L_1, t) \\
& - 2 \rho_2 L_2 \dot{\theta}_1 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_1(L_1, t) + \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 [\dot{\theta}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_{21})] [L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \alpha_1(L_1, t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_2 L_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \sin \theta_2 + 2 \rho_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (L_1 \sin \theta_2 - \alpha_1(L_1, t) \cos \theta_2) \int_0^{L_2} \ddot{\alpha}_2(l_2, t) dl_2 + \rho_2 \dot{\theta}_2 [\dot{\theta}_1 \\
& + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)] \left[L_1 \cos \theta_2 + \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 \right] \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 - 2 \rho_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2
\end{aligned}$$

II.6. θ_2 İle İlgili Elde Edilen Denklem

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} \rho_2 L_1 L_2^2 \cos \theta_2 + \rho_2 \alpha_1(L_1, t) \cos \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 - \rho_2 L_1 \sin \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 \right. \\
& - \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 + M_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 - M_2 L_1 \alpha_2(L_2, t) \sin \theta_2 + M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \sin \theta_2 \\
& - M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \cos \theta_2 \left. \right] \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{1}{3} \rho_2 L_2^3 + \rho_2 \int_0^{L_2} \alpha_2^2(l_2, t) dl_2 + M_2 L_2^2 + M_2 \alpha_2^2(L_2, t) + I_2 \right] (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\
& + \rho_2 \int_0^{L_2} l_2 \ddot{\alpha}_2(l_2, t) dl_2 + \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \cos \theta_2 - \rho_2 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \sin \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 \\
& + M_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + M_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 + M_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \alpha_2(L_2, t) \cos \theta_2 \\
& + M_2 L_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 \\
& - M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 - M_2 \dot{\theta}_1 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \cos \theta_2 \\
& + 2 M_2 \alpha_2(L_2, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - M_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - M_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 \\
& - M_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \alpha_2(L_2, t) \cos \theta_2 + M_2 L_2 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \cos \theta_2 - M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& - M_2 \ddot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \sin \theta_2 - M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \sin \theta_2 - M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
& + M_2 L_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + M_2 L_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + M_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\
& + M_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\alpha}_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - M_2 \alpha_1(L_1, t) \alpha_2(L_2, t) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + M_2 L_2 \ddot{\alpha}_2(L_2, t) + I_2 \ddot{\alpha}_{2,t}(L_2, t) \\
& + \frac{1}{2} \rho_2 g L_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - M_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 g \alpha_2(L_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
& - \int_0^{L_2} \rho_2 g \alpha_2(l_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2) dl_2 = -2 \rho_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) \dot{\alpha}_2(l_2, t) dl_2 \\
& - \rho_2 \alpha_1(L_1, t) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 - 2 \rho_2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 - \rho_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 \int_0^{L_2} \alpha_2(l_2, t) dl_2 \\
& - \frac{1}{2} \rho_2 L_1 L_2^2 \dot{\theta}_1^3 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \rho_2 L_2^2 \dot{\theta}_1^2 \alpha_1(L_1, t) \cos \theta_2 - \rho_2 L_2^2 \dot{\alpha}_1(L_1, t) \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + u_2
\end{aligned}$$

II.7. $\alpha_1(l_1, t)$ İle İlgili Elde Edilen Denklem

$$-\rho_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = \rho_1 \ddot{\alpha}_1(l_1, t) - \rho_1 \dot{\theta}_1^2 \alpha_1(l_1, t) + \rho_1 g \cos \theta_1 + E_1 I_{L_1} \alpha_{1,l_1 l_1 l_1 l_1}(l_1, t)$$

II.8. $\alpha_2(l_2, t)$ İle İlgili Elde Edilen Denklem

$$-2\rho_2\dot{\alpha}_1(L_1, t)\dot{\theta}_1 \sin\theta_2 = \rho_2\ddot{\alpha}_2(l_2, t) - \rho_2\alpha_2(l_2, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \rho_2\ddot{\alpha}_1(L_1, t)\cos\theta_2 + \rho_2g\cos(\theta_1 + \theta_2) + E_2I_2\alpha_{2,l_2l_2l_2l_2}(l_2, t)$$

II.9. Elde Edilen Sınır Şartları

1. Eklem

$$\alpha_1(0, t) = \alpha_{1,l_1}(0, t) = 0,$$

$$E_1I_{L_1}\alpha_{1,l_1l_1}(L_1, t) = -u_2,$$

$$\begin{aligned} & M_1\dot{\theta}_1^2\alpha_1(L_1, t) + \rho_2L_2\dot{\theta}_1^2\alpha_1(L_1, t) + \frac{1}{2}\rho_2L_2^2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 - \rho_2L_2\ddot{\alpha}_1(L_1, t) - \rho_2L_1L_2\ddot{\theta}_1 \\ & - \frac{1}{2}\rho_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - M_1\ddot{\alpha}_1(L_1, t) + \frac{1}{2}\rho_2L_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - M_1L_1\ddot{\theta}_1 + M_2\dot{\theta}_1^2\alpha_1(L_1, t) \\ & + M_2L_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 + M_2\alpha_2(L_2, t)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 + M_2\dot{\theta}_1\dot{\alpha}_2(L_2, t)\sin\theta_2 - M_2L_1\ddot{\theta}_1 \\ & - M_2L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 + M_2L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - M_2\ddot{\alpha}_1(L_1, t) + M_2\ddot{\alpha}_2(L_2, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 \\ & + M_2\alpha_2(L_2, t)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\sin\theta_2 + M_2\alpha_2(L_2, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\cos\theta_2 - M_2\ddot{\alpha}_2(L_2, t)\cos\theta_2 \\ & + M_2\ddot{\alpha}_2(L_2, t)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - \rho_2gL_2\cos\theta_1 + M_1g\cos\theta_1 + M_2g\cos\theta_1 + E_1I_{L_1}\alpha_{1,l_1l_1l_1}(L_1, t) \\ & + \int_0^{L_2} [\rho_2\alpha_2(l_2, t)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 + \rho_2\dot{\theta}_1\dot{\alpha}_2(l_2, t)\sin\theta_2 - \rho_2\ddot{\alpha}_2(l_2, t)\cos\theta_2 + \rho_2\ddot{\alpha}_2(l_2, t)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ & + \rho_2\ddot{\alpha}_2(l_2, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 + \rho_2\alpha_2(l_2, t)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\sin\theta_2 + \rho_2\alpha_2(l_2, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\cos\theta_2] dl_2 = 0 \end{aligned}$$

2. Eklem

$$\alpha_2(0, t) = \alpha_{2,l_2}(0, t) = 0$$

$$\alpha_{2,l_2l_2}(L_2, t) = \frac{-(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - \ddot{\alpha}_{2,l_2}(L_2, t)}{E_2}$$

$$\begin{aligned} & -M_2g\cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2\alpha_2(L_2, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + M_2\alpha_1(L_1, t)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 - M_2L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 \\ & - M_2\ddot{\alpha}_1(L_1, t)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 - M_2\ddot{\alpha}_2(L_2, t) - M_2\ddot{\alpha}_1(L_1, t)\cos\theta_2 - M_2L_1\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ & + M_2\ddot{\alpha}_1(L_1, t)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - M_2\ddot{\theta}_1\alpha_1(L_1, t)\sin\theta_2 + M_2L_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - M_2\dot{\theta}_1\dot{\alpha}_1(L_1, t)\sin\theta_2 \\ & - M_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\alpha_1(L_1, t)\cos\theta_2 - M_2L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + E_2I_{L_2}\alpha_{2,l_2l_2l_2}(L_2, t) = 0 \end{aligned}$$

III. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Burada incelenen iki eklemlili ve ucunda yük bulunan sistem için elde edilen denklemler doğrusal değildir ve oldukça karmaşık bir yapıdadır. Ancak, herhangi bir yükün bulunmadığı ve de hareketin sadece yatay düzlemde gerçekleştiği kabul edilirse, M_2 kütlesiyle ve yerçekimi kuvvetiyle ilgili terimler alınmayacağından, denklemlerde sadeleşme olabilir. Ayrıca, "Pertürbasyon Teknikleri" kullanılarak denklemler doğrusallaştırılabilir ve kontrol yaklaşımı yapmak mümkün olabilir [6].

EKLER

Sistemin enerji ifadelerinin değişimlerinin elde edilmesine örnek olarak, W_{nc} aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$W_{nc} = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 = u_1 \theta_1 + u_2 \varphi_2$$

Burada $\varphi_2 = \theta_2 - \tan^{-1}(\alpha_{1,t}(L_1, t))$ olmak üzere,

$$\delta W_{nc} = u_1 \delta \theta_1 + u_2 \delta \theta_2 - u_2 \delta \alpha_{1,t}(L_1, t)$$

şeklinde dir.

δT , δV ve δW_{nc} bilgileri temel denklemlerde yerine konularsa

$$\int_{t_0}^{t_f} f(\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}, \dots) dt = 0$$

olacaktır. İntegral değerinin 0 olabilmesi için $f(\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}, \dots)$ fonksiyonunun değerinin 0 olması gerekir. Bu fonksiyonun 0'a eşit olabilmesi için değişimlerin ($\delta \theta$, $\delta \alpha(t, t)$) gibi katsayılarının 0 olması gerekir.

Değişimlerin türevlerinin yer aldığı ifadelerde kısmi integral alınır. Örneğin,

$$\int_{t_0}^{t_f} I_A \dot{\theta}_1 \delta \dot{\theta}_1 dt = I_A \dot{\theta}_1 \delta \theta_1 \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} I_A \delta \theta_1 \ddot{\theta}_1 dt ; I_A \dot{\theta}_1 \delta \theta_1 \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Görüldüğü gibi $\delta \dot{\theta}_1$ 'in katsayısı olan terimin 1. dereceden türevi alınarak $\delta \theta_1$ teriminin katsayısı haline getirilmiştir. Benzer işlemler diğer terimler için yapıldığında,

$$\int_{t_0}^{t_f} f(\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}, \dots) dt = 0$$

integralindeki bütün terimler $\delta \theta_1$, $\delta \theta_2$, $\delta \alpha_1(l, t)$, $\delta \alpha_2(l, t)$, $\delta \alpha_1(L_1, t)$, $\delta \alpha_2(L_2, t)$ değişimleri cinsinden yazılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Liang-Wey Chang ve J. F. Hamilton, "Dynamics of robotic manipulators with flexible links", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 113, s. 54-59, March 1991, USA.
- [2] G. Cesareo ve R. Marino, "On the Controllability Properties of Elastic Robots", *Proc. 6th Int. Conf. Analysis Optimization Systems*, INRIA, Nice, France, 1984.
- [3] R. H. Cannon ve E. Schmitz, "Initial Experiment on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot", *The Int. Journal of Robotics Research*, vol. 3, no. 3, s. 62-75, 1984.
- [4] H. Krishnan ve M. Vidyasagar, "Control of a Single-Link Flexible Beam Using Hankel-norm-based Reduced Order Model", *Proc. of the 5th IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, s. 9-14, Philadelphia, PA, April 1988.
- [5] P. Kotnik, S. Yurkovich ve Ü. Özgüner, "Acceleration Feedback for Control of a Fleible Manipulator Arm", *Journal of Robotic Systems*, vol. 5, no. 3, June 1988.
- [6] F. Khorrami ve Ü. Özgüner, "Perturbation Methods in Control of a Flexible Link Manipulator", *Proc. of the 5th Int. Conf. on Robotics and Automation*, s. 310-315, Philadelphia, PA, April 1988.
- [7] Liang-Wey Chang ve J. F. Hamilton, "Dynamics of Robotic Manipulators with Flexible Links", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 113, s. 54-59, March 1991, USA.
- [8] F. Khorrami, "Analysis of Multi-Link Flexible Manipulators via Asymptotic Expan-sions", *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control*, FL, s. 2089-2094, November 1989.
- [9] F. Khorrami, S. Jain ve A. Tzes, "Experiments on Rigid Body-Based Controllers with Input Preshaping for a Two-Link Flexible Manipulator", *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 10, no. 1, February 1994.
- [10] H. Bedir, "İki Linkli Esnek Bir Robot Kolunun Modellenmesi", *Elektrik Mühendisliği Uygulaması, Osmangazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Böl.*, Ocak 1995, Eskişehir.