GÜFBED/*GUSTIJ* (2017) 7 (2): 280-284
Araştırma/*Research*

Öklid Uzayında Bir Yüzeyin İnvaryantlarının Bonnet Sistemi Hakkında

İdris ÖREN*
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü,61080,Trabzon, Türkiye

Geliş tarihi/*Received* 23.02.2017
Düzeltilerek geliş tarihi/*Received in revised form* 19.07.2017
Kabul tarihi/*Accepted* 20.07.2017

Öz
R^3 Öklid uzayında, bir $x = x(u) = x(u_1, u_2)$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının tüm katsayılarından oluşan küme $K = \{g_{ij}(x), L_{ij}(x), \forall i, j = 1,2\}$ olsun. R^3'ün tüm özel Öklid hareketler grubu SM(3) olmak üzere, bazı yüzeyler için K'daki invaryantların hesaplanarak, K'nın, R^3'teki bir regüler yüzeyin SM(3)-invaryantlarının bir minimal tam sistemi olduğu ispatlandı.

Anahtar kelimeler: *Bonnet sistem, İnvaryant, Yüzey*

About the Bonnet System of Invariants of a Surface in the Euclidean Space

Abstract
Let $K = \{g_{ij}(x), L_{ij}(x), \forall i, j = 1,2\}$ be the set of all coefficients of the first and second fundamental forms of a surface $x = x(u) = x(u_1, u_2)$ in a Euclidean space R^3. Using computations of invariants from K for some surfaces, it is proved that K is a minimal complete system of SM(3) -invariants of a regular surface in R^3, where SM(3) is the group of all special Euclidean motions of R^3.

Keywords: *Bonnet system, Invariant , Surface.*

1.Giriş

$U = (0,1) \times (0,1)$ olmak üzere, $x: U \to R^3$ R^3'te bir parametrik yüzey (kısaca, yüzey) olsun (bkz. Gray,1998). $x = x(u) = x(u_1, u_2)$ bir yüzey olmak üzere, x'in birinci ve ikinci temel formları sırasıyla $I(x) = g_{11}du_1{}^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2{}^2$ ve $II(x) = L_{11}du_1{}^2 + 2L_{12}du_1du_2 + L_{22}du_2{}^2$ ile gösterelim. $\forall u \in U$ için $\Delta_x = det\|g_{ij}(x(u))\|_{i,j=1,2} \neq 0$ ise x yüzeyine regüler denir. R^3'ün tüm regüler yüzeylerinin kümesini H ile gösterelim ve $T = \{(i,j): 1 \leq i \leq j \leq 2\}$ alalım.

Özel ortogonal grup $SO(3)$ olmak üzere, Özel Öklid hareket grubunu,
$\mathrm{SM}(3) = \{\mathrm{F}: R^3 \to R^3 | Fx = gx + b, g \in SO(3), b \in R^3\}$ ile gösterelim.

Bonnet teoremine göre, $\forall u \in U$ ve $\forall (i,j) \in T$ için $g_{ij}(x(u)) = g_{ij}(y(u))$ ve $L_{ij}(x(u)) = L_{ij}(y(u))$ olan x ve y regüler yüzeyler ise, bu durumda $\forall u \in U$ için $y(u) = Fx(u)$ olan $F \in \mathrm{SM}(3)$ dönüşümü vardır. (Kaya, 2015; Kose, 2011).
Bu çalışmada, aşağıdaki problem incelendi:

* İdris ÖREN, oren@ktu.edu.tr, Tel: (0462) 377 25 75

DOI: http://dx.doi.org/10.17714/gufbed.2017.07.018 ISSN: 2146-538X http://dergipark.gov.tr/gumusfenbil

$x, y \in H$ olmak üzere, $\forall u \in U$ için $y(u) = Fx(u)$ şeklinde $F \in \mathrm{SM}(3)$ dönüşümünün mevcut olduğunu gösteren ve $\forall u \in U, \forall(i,j) \in T$ için $g_{ij}(x(u)) = g_{ij}(y(u))$ ve $L_{ij}(x(u)) = L_{ij}(y(u))$ eşitliklerini sağlayan $T_1 \subset T$ altkümesi var mı?

Yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının tüm katsayılarından oluşan K kümesi, bir yüzeyin invaryantlarının Bonnet sistemi olarak adlandırılır. Yukarıda bahsedilen problemdeki şartları sağlayan K'nın bir altkümesi de bir regüler yüzeyin invaryantlarının bir tam sistemi olarak adlandırılır. Ancak yüzeyin birinci temel formunun tüm katsayılarının sisteminin bir tam sistem değildir.

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlendi.

2. Bölümde, diğer bölümlerde kullanmak üzere, bir küme üzerinde grup hareketi için invaryantların bir tam sisteminin tanımı, invaryantların bir minimal tam sisteminin tanımı ve ilgili önermeler verildi.

3. Bölümde, tamlık için bir regüler yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları incelendi.

4. Bölümde, bazı regüler yüzeyler için K'daki invaryantlar kullanılarak, K'nın bir regüler yüzeyin SM(3)-invaryantlarının bir minimal tam sistemi olduğu Teorem 4.1'de ispatlandı.

5. Bölümde, çalışmanın temel sorusu cevaplandı.

2. İnvaryantların minimal tam sistemi

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olan iki altküme olsun. $h: A \to B$ dönüşümlerinin kümesini *M(A,B)* ve $f_i \in M(A,B), i = 1,2,..,m$ olan dönüşümlerin kümesini $P = \{f_1, \dots, f_m\}$ ile gösterelim. Bu durumda, $f \in M(A,B)$ dönüşümünü, $\forall t \in A$ için $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ şeklinde ve kümeyi de $M(A,B;P) = \{h \in M(A,B) | h(t) = \varphi(f(t)), \forall t \in A, \varphi: f(A) \to B\}$ olarak tanımlayalım. G bir grup ve A kümesi üzerinde G'nin bir hareketi α olsun. Aşağıdaki temel tanımlar (Khadjiev, 2010)'da verilmiştir.

Tanım 2. 1. $t_1, t_2 \in A$ olmak üzere, $t_2 = \alpha(q)t_1$ olacak şekilde bir $q \in G$ mevcutsa t_1 ve t_2'ye G-denk denir ve $t_1 \sim t_2$ ile gösterilir.

Tanım 2. 2. $t_1, t_2 \in A$ olmak üzere, $t_1 \sim t_2$ denkliğinden $h(t_1) = h(t_2)$ ise $h: A \to B$ dönüşümüne G-invaryant denir. Tüm G-invaryant dönüşümlerin kümesini $M(A,B)^G$ ile gösterelim.

Tanım 2. 3. (Sibirskii, 1976) $f_i \in M(A,B), i = 1,2,..,m$ ve $a, b \in A$ olmak üzere, $f_i(a) = f_i(b), i = 1,2,..,m$ için $a \sim b$ ise $\{f_i, i = 1,2,..,m\}$ sistemine α hareketine karşılık gelen G-invaryantlarının bir tam sistemi denir.

Önerme 2. 4. $h \in M(A,B)^G$, A kümesinde G'nin bir hareketi α ve P, A'da G-invaryant fonksiyonların bir tam sistemi olsun. Bu takdirde, $h \in M(A,B;P)$'dir.

İspat: Önermenin ispatı (Sibirskii, 1976) 'da verilmiştir.

Tanım 2. 5. (Sibirskii, 1976) A'da G-invaryant fonksiyonların bir tam sistemi P olsun. $P \backslash \{f_i\}, \forall i = 1,2,..,m$ bir tam sistem değilse P'ye bir minimal tam sistem denir.

Önerme 2. 6. $i = 1,2,..,m$ için $f_i \in M(A,B)^G$ olmak üzere, G-invaryant fonksiyonların bir tam sistemi P olsun. Bu takdirde, P bir minimal tam sistemdir ancak ve ancak $\forall i = 1,2,..,m$ için $f_i \notin M(A,B;P \backslash \{f_i\}$ dir.

İspat: Önermenin ispatı (Khadjiev, 2010) 'da verilmiştir.

3. Bir yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

R^3'ün bir ortonormal tabanı $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ ve R^3'teki vektörlerin bir sistemi $\{a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})\}$ olsun.

Burada a_i 'yi $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})^T$ sütun vektörler ve e_i 'yi $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)^T$ olarak düşünelim.

$M_1 = det\begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}, M_2 = det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}, M_3 = det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ determinantlar olmak üzere,

$$A_k = (-1)^{k+1} M_k, k = 1,2 \qquad (1)$$

kofaktörünü tanımlayalım. R^3'te $A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ vektörünü $[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2]$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2] = det\begin{Vmatrix} e_1 & a_{11} & a_{12} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} \\ e_3 & a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

elde edilir.
$x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T \in R^3$ olmak üzere, bu vektörlerin Öklid iç çarpımı$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ olarak tanımlanır.

$a_i \in R^3, i = 1,2$ vektörlerinin $\left\|\langle a_i, a_j\rangle\right\|_{i,j=1,2}$ Gram matrisinin determinantını $detGr(a_1, a_2)$ ile gösterelim (Ören, 2016).

Önerme 3. 1. $\langle[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2], [\varepsilon \quad a_1 \quad a_2]\rangle = detGr(a_1, a_2)$'dir.

İspat: (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\langle[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2], [\varepsilon \quad a_1 \quad a_2]\rangle = {A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2 = {M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2 \qquad (3)$$

elde edilir. Açıkça, ${M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2 = detGr(a_1, a_2)$'dir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3. 2. R^3'teki lineer bağımsız vektörlerin bir sistemi $\{a_1, a_2\}$ olsun. Bu takdirde,

$$N = \frac{[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2]}{\sqrt{detGr(a_1, a_2)}}$$

vektörü birim vektördür ve $\langle[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2], a_j\rangle = 0, \forall j = 1,2$'dir.

İspat: $\{a_1, a_2\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan $detGr(a_1, a_2) \neq 0$'dır. Önerme 3.1'den, N birim vektördür. Ayrıca, $\langle[\varepsilon \quad a_1 \quad a_2], a_j\rangle = [a_j \quad a_1 \quad a_2] = 0, \forall j = 1,2$'dır.

Önerme 3. 3. R^3'teki lineer bağımsız vektörlerin bir sistemi $\{a_1, a_2\}$ ve $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ olsun. Bu takdirde,

$\langle N, b\rangle = \frac{[b \quad a_1 \quad a_2]}{\sqrt{detGr(a_1, a_2)}}$ 'dir.

İspat: (2) eşitliği kullanılarak, $\langle N, b\rangle = \frac{A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3}{\sqrt{detGr(a_1, a_2)}} = \frac{[b \quad a_1 \quad a_2]}{\sqrt{detGr(a_1, a_2)}}$'dir.

Sonuç 3. 4. R^3'te $x = x(u)$ bir regüler yüzey olsun. Bu takdirde, $x = x(u)$'nun ikinci temel formunun katsayıları

$$L_{ij}(x) = \frac{\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} \quad \frac{\partial x}{\partial u_2}\right]}{\sqrt{detGr\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}\right)}}, i, j = 1,2\text{'dir.}$$

İspat: Yukarıdaki eşitlik, (Aminov, 2001)'deki $L_{ij}(x) = \langle N, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}\rangle$ katsayılarının tanımı, $a_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, a_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}$ eşitlikleri ve Önerme 3.3 kullanılarak elde edilir.

4. Bir yüzeyin invaryantlarının Bonnet sisteminin minimalliği hakkında

Kolaylık için, K sistemi bir yüzeyin invaryantlarının Bonnet sistemi olsun.

Teorem 4. 1. K sistemi, regüler yüzeylerin H kümesi üzerindeki invaryantların bir minimal tam sistemidir.

İspat: Bu teoremin ispatı aşağıdaki lemmalar yardımıyla verilecektir.

Lemma 4. 2. $K\backslash\{g_{12}(x)\}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

İspat. R^3'te iki regüler yüzey $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$ ve $y(u_1, u_2) = \left(\frac{u_1}{\sqrt{2}}, \frac{u_1}{\sqrt{2}} + u_2, 0\right)$ alalım. Bu yüzeyler için $g_{11}(x) = g_{11}(y) = 1$, $g_{22}(x) = g_{22}(y) = 1$, $L_{11}(x) = L_{11}(y) = 0$, $L_{12}(x) = L_{12}(y) = 0$, $L_{22}(x) = L_{22}(y) = 0$'dır.

$g_{12}(x)$ ve $g_{12}(y)$, SM(3)-invaryantlardır ancak $g_{12}(x) = 0$ ve $g_{12}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğundan x ve y yüzeyleri SM(3)-denk değildir. Böylece $K \backslash \{ g_{12}(x) \}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

(Khadjiev, 2013)'deki Teorem 4, n=2 ve p=0 durumunda, aşağıdaki gibidir.

Lemma 4. 3.
$I = (0,1) \subset R$ olmak üzere, C^{∞}-sınıfından $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları $\forall t \in I$ için $p(t) > 0$ ve $q(t) \neq 0$ şartlarını sağlasın. Bu takdirde, I'da C^{∞}-sınıfından $a(t)$ ve $b(t)$ fonksiyonları mevcut ve $a'(t)^2 + b'(t)^2 = p(t)$ ve $a'(t)b''(t) - a''(t)b'(t) = q(t)$'dir.

Lemma 4. 4. $K \backslash \{ g_{ii}(x) \}, i = 1{,}2$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

İspat: Lemmayı i=1 durumu için ispatlayalım. R^3'te iki regüler yüzey $x(u_1,u_2) = (a(u_1), u_2, b(u_1))$ ve $y(u_1,u_2) = (c(u_1), u_2, d(u_1))$ şeklinde alalım. Bu yüzeyler için $g_{11}(x) = a'(u_1)^2 + b'(u_1)^2$, $g_{11}(y) = c'(u_1)^2 + d'(u_1)^2$, $g_{22}(x) = g_{22}(y) = 1$, $g_{12}(x) = g_{12}(y) = 0$, $L_{11}(x) = \frac{a'(t)b''(t) - a''(t)b'(t)}{\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}}$, $L_{11}(y) = \frac{c'(t)d''(t) - c''(t)d'(t)}{\sqrt{c'(t)^2 + d'(t)^2}}$, $L_{12}(x) = L_{12}(y) = 0$ ve $L_{22}(x) = L_{22}(y) = 0$'dır.

Şimdi $\forall u_1 \in I$ için $p_1(u_1) = q_1(u_1) = 1, p_2(u_1) = 2$, $q_2(u_1) = \sqrt{2}$ olan $p_1(u_1), p_2(u_1), q_1(u_1), q_2(u_1)$ fonksiyonlarını alalım. Lemma 4.3'ten I'da C^{∞}-sınıfından $a(u_1), b(u_1), c(u_1), d(u_1)$ fonksiyonları mevcut öyle ki $a'(u_1)^2 + b'(u_1)^2 = p_1(u_1) = 1$, $a'(u_1)b''(u_1) - a''(u_1)b'(u_1) = q_1(u_1) = 1$, $c'(u_1)^2 + d'(u_1)^2 = p_2(u_1) = 2$, $c'(u_1)d''(u_1) - c''(u_1)d'(u_1) = q_2(u_1) = \sqrt{2}$'dir. Bu takdirde, $L_{11}(x) = L_{11}(y) = 1$, $g_{11}(x) = 1$ ve $g_{11}(y) = 2$'dir. Buradan, $g_{11}(x)$ ve $g_{11}(y)$, SM(3)-invaryantlardır ancak $g_{11}(x) \neq g_{11}(y)$ olduğundan x ve y yüzeyleri SM(3)-denk değildir. Böylece $K \backslash \{ g_{11}(x) \}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir. Benzer şekilde, $K \backslash \{ g_{22}(x) \}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

Lemma 4. 5. $K \backslash \{ L_{ii}(x) \}, i = 1{,}2$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

İspat: Lemmayı i=1 durumu için ispatlayalım. R^3'te iki regüler yüzey $x(u_1,u_2) = (a(u_1), u_2, b(u_1))$ ve $y(u_1,u_2) = (c(u_1), u_2, d(u_1))$ şeklinde alalım. Lemma 4.4'deki gibi $g_{11}(x) = a'(u_1)^2 + b'(u_1)^2$, $g_{11}(y) = c'(u_1)^2 + d'(u_1)^2$, $g_{22}(x) = g_{22}(y) = 1$, $g_{12}(x) = g_{12}(y) = 0$, $L_{11}(x) = \frac{a'(t)b''(t) - a''(t)b'(t)}{\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}}$, $L_{11}(y) = \frac{c'(t)d''(t) - c''(t)d'(t)}{\sqrt{c'(t)^2 + d'(t)^2}}$, $L_{12}(x) = L_{12}(y) = 0$ ve $L_{22}(x) = L_{22}(y) = 0$'dır.

Şimdi $\forall u_1 \in I$ için $p_1(u_1) = p_2(u_1) = 1, q_1(u_1) = 1$, $q_2(u_1) = 2$ olan $p_1(u_1), p_2(u_1), q_1(u_1), q_2(u_1)$ fonksiyonlarını alalım. Lemma 4.3'ten I'da C^{∞}-sınıfından $a(u_1), b(u_1), c(u_1), d(u_1)$ fonksiyonları mevcut öyle ki $a'(u_1)^2 + b'(u_1)^2 = p_1(u_1) = 1$, $a'(u_1)b''(u_1) - a''(u_1)b'(u_1) = q_1(u_1) = 1$, $c'(u_1)^2 + d'(u_1)^2 = p_2(u_1) = 1$, $c'(u_1)d''(u_1) - c''(u_1)d'(u_1) = q_2(u_1) = 2$'dir. Bu takdirde, $L_{11}(x)=1$, $L_{11}(y) = 2$, $g_{11}(x) = g_{11}(y) = 1$ 'dir. Buradan, $L_{11}(x)$ ve $L_{11}(y)$, SM(3)-invaryantlardır ancak $L_{11}(x) \neq L_{11}(y)$ olduğundan x ve y yüzeyleri SM(3)-denk değildir. Böylece $K \backslash \{ L_{11}(x) \}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir. Benzer şekilde, $K \backslash \{ L_{22}(x) \}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

Lemma 4. 6. $K \backslash \{ L_{12}(x) \}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

İspat: R^3'te iki regüler yüzey $x(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_1u_2)$ ve $y(u_1,u_2) = (u_1, u_2, -u_1u_2)$ şeklinde olsun. Lemma 4.4'deki gibi $g_{11}(x) = g_{11}(y) = 1 + u_2$, $g_{22}(x) = g_{22}(y) = 1 + u_1$, $g_{12}(x) = g_{12}(y) = u_1u_2$, $L_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + {u_1}^2 + {u_2}^2}}$, $L_{12}(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 + {u_1}^2 + {u_2}^2}}$, $L_{11}(x) = L_{11}(y) = 0$ ve $L_{22}(x) = L_{22}(y) = 0$'dır.

Buradan, $L_{12}(x)$ ve $L_{12}(y)$, SM(3)-invaryantlardır ancak $L_{12}(x) \neq L_{12}(y)$ olduğundan x ve y yüzeyleri SM(3)-denk değildir. Böylece $K\backslash\{L_{12}(x)\}$ alt sistemi H kümesinde tam sistem değildir.

Yukarıdaki lemmalardan K sisteminin, regüler yüzeylerin H kümesi üzerindeki invaryantların bir minimal tam sistemi olduğu elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teşekkür

Değerli önerileri ve yararlı yorumları için hakemlere teşekkür ederim.

Kaynaklar

Aminov, Yu. A., 2001. The Geometry of Submanifolds, Gordan and Breach Sciences Publ.

Gray, A., 1998. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC press.

Kaya, Y., Küçük, A. ve Melekoğlu, A., 2015. Diferensiyel Geometriye Giriş, (çev:Yusuf Kaya(eds)), Dora yayınları, ISBN 978-605-9929-34-9, Bursa.

Khadjiev, D., 2010. Complete systems of differential invariants of vector fields in a Euclidean space, Turk. J. Math, 34, 543-559.

Khadjiev D., Ören, İ. and Pekşen, Ö., 2013. Generating systems of differential invariants and the theorem on existence for curves in the pseudo-Euclidean geometry. Turk J Math, 37 (1), 80-94.

Kose, Z., Toda, M., and Aulisa, E., 2011. Solving Bonnet problems to construct families of surfaces, Balkan J. Geom. Appl., 16 (2), 70-80.

Ören, İ., 2016. Equivalence conditions of two Bézier curves in the Euclidean geometry, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci. (article in press).

Sibirskii, K. S., 1976. Algebraic Invariants of Differential Equations and Matrices, Kishinev, Stiintsa.