



Fraksiyonel dereceli osilatörlerin pratik gerçekleştirimi için bir yaklaşım

An approach for practical realization of fractional-order oscillators

İbrahim Ethem Saçu^{1,*} 

¹ Erciyes Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 38030, Kayseri, Türkiye

¹ Erciyes Üniversitesi, Klinik Müh. Uyg. ve Arş. Mrk. (ERKAM), 38039, Kayseri, Türkiye

Öz

Bu çalışmada, fraksiyonel dereceli osilatörlerin pratik gerçekleştirimi için bir yaklaşım önerilmektedir. Bu yaklaşımda, fraksiyonel integral operatörünü sağlamak için s -domeninde birinci dereceden bir yaklaşıklık fonksiyonu türetilmekte daha sonra bu fonksiyon ayrıklaştırma işlemine tabi tutularak z -domenine aktarılmaktadır. Böylece ilgili osilatörün sürekli zamanlı dinamik denklemleri fark denklemlerine dönüştürülerek dijital platformlarda gerçekleştirilebilme imkanı elde edilmektedir. Fark denklemlerinin avantajı, katsayılarının fraksiyonel derecenin değişimine bağlı olarak hızlıca güncellenebilmesidir. Önerilen yaklaşımın uygulanabilirliği Van der Pol (VdP) osilatöründe test edilmiştir. Önerilen yöntem kullanılarak fraksiyonel VdP osilatörünün fark eşitlikleri elde edilmiştir. Nümerik benzetimlerde bu fark denklemlerinden faydalanılmıştır. Ayrıca denklemler bir mikroişlemci uygulama kartında test edilerek önerilen yöntem deneysel olarak da doğrulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Fraksiyonel hesaplama, Dinamik sistem, Van der Pol osilatörü, Fraksiyonel türev, Kararlılık

1 Giriş

Fraksiyonel hesaplama, dinamik sistemleri tanımlayan diferansiyel denklemlerin derecesinin tamsayı olması zorunluluğunu ortadan kaldırarak, türev derecelerinin rasyonel veya karmaşık da olabileceği yaklaşımını ortaya koymaktadır. Bu kapsamda birçok fraksiyonel türev ve integral tanımları literatüre sunulmuştur. Fraksiyonel hesaplama, sistemlerin daha doğru ve kapsamlı modellenmesine imkan vermektedir. Yine fraksiyonel dinamik sistemlerde farklı zengin yanıtların elde edilmesi mümkündür. Fraksiyonel derecenin ek tasarım parametresi olarak ele alınması araştırmacılara esneklik tanımaktadır. Fraksiyonel hesaplama kontrol, devre teorisi, biyoloji vb. farklı alanlarda kullanım bulmaktadır [1-3].

Fraksiyonel dereceli diferansiyel eşitlikleri nümerik olarak çözmek ve dinamik yanıtları elde etmek için birçok farklı yöntem önerilmektedir [4]. Bu yöntemlerin çoğunda herhangi bir andaki değişken değeri için değişkenin tüm geçmiş değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Hafıza etkisi olarak da adlandırılan bu durumda zamanın ilerlemesiyle hesaplama işi çok karmaşık ve maliyetli olmaktadır. Yine bunların dijital platformlarda deneysel olarak elde edilip

Abstract

In this study, an approach for the practical implementation of fractional-order oscillators has been proposed. In this approach, a first-order approximation function is derived in the s -domain to satisfy the fractional integral operator, then this function is discretized and transferred to the z -domain. This allows the continuous-time dynamic equations of the oscillator to be transformed into discrete-time difference equations, making it feasible for realization on digital platforms. The advantage of difference equations lies in the ease with which their coefficients can be updated based on changes in the fractional order. The feasibility of the proposed approach is tested on the Van der Pol (VdP) oscillator. The difference equations of the fractional-order VdP oscillator have been obtained by using the proposed method. These difference equations are used in numerical simulations. Furthermore, the equations are tested on a microcontroller application board, and the proposed method is experimentally validated also.

Keywords: Fractional calculus, Dynamic system, Van der Pol oscillator, Fractional derivative, Stability

doğrulanmaları da zorlaşmaktadır. Öte yandan fraksiyonel dinamik eşitlikleri analog ayrık elemanlarla elde etmek istediğimizde, fraksiyonel türev veya integral işlemini gerçekleştirecek bir devre elemanına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ihtiyaç fraksiyonel kapasitör kavramını ortaya çıkarmaktadır [5]. Ancak kavramsal olan fraksiyonel kapasitörün gerçek karşılığı ticari olarak elektronik marketlerde bulunmamaktadır. Bu sorunun çözümü için fraksiyonel kapasitör işlevini sınırlı bant genişliğinde yerine getirebilecek yaklaşık fonksiyonları yani imitasyon devreleri ortaya konulmaktadır [6]. Bu yaklaşımdaki açmaz ise fraksiyonel kapasitörün değeri ve derecesi değiştikçe imitasyon devrelerindeki R ve C gibi pasif eleman değerleri ile kazanç değerlerinin yeniden ayarlanmasına ihtiyaç duyulmasıdır. İşte her iki yaklaşımdaki sınırlamalar fraksiyonel dinamik sistemlerin gerçekleştirilmesini zorlaştırmaktadır. Bunlara bir çözüm olması açısından pratik gerçekleştirmeler için bu çalışmada bir yaklaşım önerilmektedir. Bu yaklaşıma göre öncelikle fraksiyonel integral operatörünü karşılayacak birinci dereceden yaklaşıklık fonksiyonu s -domeninde türetilmektedir. Daha sonra sürekli-ayrık dönüşüm metoduyla sürekli zamandaki

* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: iesacu@erciyes.edu.tr (İ.E. Saçu)

Geliş / Received: 02.08.2023 Kabul / Accepted: 21.08.2024 Yayınlanma / Published: 15.10.2024

doi: 10.28948/ngumuh.1336490

türetilmiş fonksiyon z -domenine geçirilmektedir. Ayrık domende elde edilen yaklaşık fonksiyonu sistem denklemlerine uygulanarak fark denklemleri elde edilmektedir. İlgili denklemler nümerik hesaplamalarda ve dijital platform gerçekleştirimlerinde kullanılabilir. Ayrıca fraksiyonel derece değişikçe sadece fark eşitliklerinin katsayıları değiştirilerek hızlı bir adaptasyon mümkün olmaktadır. Önerilen yaklaşım Van der Pol (VdP) osilatörü üzerinde test edilmiştir [7].

Fraksiyonel hesaplamaların elektronik uygulama alanlarından biri de osilatörlerdir. Osilatörler günümüzdeki birçok elektronik donanımın vazgeçilmez parçasıdır. Fraksiyonel osilatörlerde, faz kayması fraksiyonel derece ile kontrol edilebilir [8]. Yine sinüzoidal osilatörlerde sistem derecesinin en az 2 olma zorunluluğu da fraksiyonel osilatörlerle ortadan kalkmaktadır [9]. Öte yandan fraksiyonel multivibratörlerle daha büyük osilasyon frekansı elde edilebilir [10].

20. yy'ın başlarında vakum tüpleri alıcı ve verici devrelerindeki elektrik akımının akışını kontrol etmede kullanılmaktaydılar. Balthazar Van der Pol, vakum tüpü triyod devresindeki osilasyonları incelemesi sonunda bütün başlangıç koşullarının sınırlı genlikli aynı periyodik yörüngeye yakınsadığı sonucuna ulaşmıştır [11]. Ancak bu davranış lineer eşitliklerin çözümlerinin davranışından farklıdır. Bunun için 1927'de Balthazar Van der Pol vakum tüp elektrik devresindeki osilasyonları tanımlamak için bir eşitlik ortaya koymuştur [7]. Bu eşitlik zorlamalı (forced) ve zorlamasız (unforced) durumlara göre zengin dinamikler sergilemektedir. Bu açıdan dinamik sistemlerin analizinde VdP eşitliği yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Dolayısı ile VdP'nin fraksiyonel versiyonu da önemli olmaktadır.

Bu kapsamda ikinci kısımda fraksiyonel VdP osilatörünün tanımlayıcı eşitlikleri verilmiş ve kararlılık analiziyle minimum γ_{\min} değeri belirlenmiştir. Yine Grünwald-Letnikov metodu (GLM) ile VdP eşitliğinin dinamik yanıtları da ikinci kısımda sunulmuştur. Üçüncü kısımda önerilen pratik yaklaşım detaylıca anlatılmıştır. Fark denklemleriyle elde edilen yanıtlar da bu bölümde verilmiştir. Ayrıca ilgili eşitlikler dijital platforma aktarılarak önerilen yöntemin uygulanabilirliğini göstermek için elde edilen osiloskop ekran görüntüleri de bu bölümde paylaşılmıştır. Sonuç ve değerlendirmeler ise dördüncü bölümde verilmiştir.

2 Fraksiyonel dereceli VdP Osilatörü

Doğrusal olmayan sistemlerdeki karmaşık osilasyonların anlaşılması ve kontrol edilmesi gereken pek çok uygulamada VdP osilatörü önemli bir rol oynamaktadır. Fraksiyonel dereceli VdP osilatörünün tanımlayıcı eşitliği aşağıda verilmektedir [12].

$$\begin{aligned} x_v^\gamma &= y_v \\ y_v^\gamma &= \mu_v(1 - x_v^2)y_v - x_v \end{aligned} \quad (1)$$

Burada y_v vakum tüpü akımı, x_v yardımcı değişken, γ fraksiyonel derece ($0 < \gamma < 1$) ve $\mu_v > 0$ dir. İlgili denklemin

denge noktası $E_v(0,0)$ şeklindedir. Ayrıca denge noktasındaki Jacobian matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$J_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu_v \end{pmatrix} \quad (2)$$

J_v matrisinden özdeğerler $\lambda_{v,1,2}$ Denklem (3)'teki gibi elde edilmektedir.

$$\lambda_{v,1,2} = \frac{\mu_v \pm \sqrt{\mu_v^2 - 4}}{2} \quad (3)$$

Fraksiyonel sistemlerde kararlılık şartı her bir öz değer için $\gamma_{\min} > (2x | \angle \lambda_{v,1,2} | / \pi)$ şartını sağlamasıdır [13]. Bu şarta göre $0 < \mu_v < 2$ için bir γ_{\min} değeri söz konusudur ancak $\mu_v > 2$ için her γ değeri sistemi sağlar. Örneğin $\mu_v = 0.5$ için öz değerler $\lambda_{v,1,2} = 0.25 \pm 0.9682$ ve bunlara bağlı olarak $\gamma_{\min} = 0.8391$ olarak elde edilmektedir. Dolayısıyla sistemin çalışabilmesi için fraksiyonel derece ve parametreler seçilirken kararlılık analizi dikkate alınmalıdır.

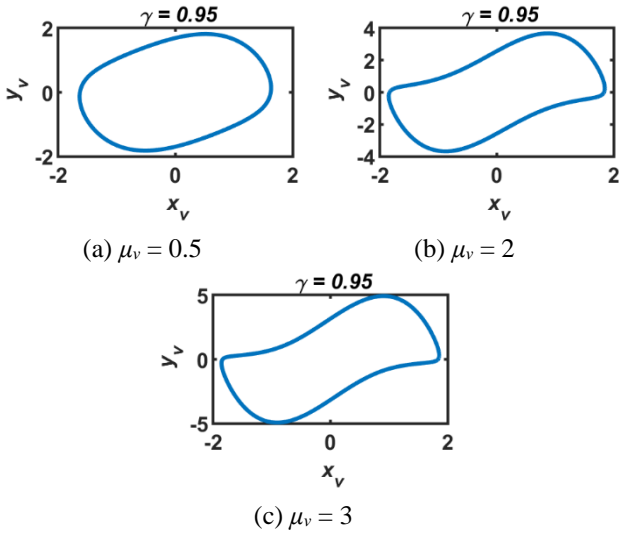
Denklem (1) ile verilen VdP eşitliğini nümerik olarak çözmek için literatürde çeşitli metotlar sunulmuştur. Bunlardan bir tanesi Grünwald-Letnikov metodu (GLM)'dur [12]. Denklem (1)'e GLM uygulandığında aşağıdaki ifadeler elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} x_v(t_i) &= y_v(t_{i-1})h_v^\gamma - \sum_{j=1}^i b_j^{(\gamma)} x_v(t_{i-j}) \\ y_v(t_i) &= [\mu_v(1 - x_v(t_i)^2)]y_v(t_{i-1}) \\ &- x_v(t_i)h_v^\gamma - \sum_{j=1}^i b_j^{(\gamma)} y_v(t_{i-j}) \end{aligned} \quad (4)$$

Burada h_v adım büyüklüğü olup hesaplamalarda $h_v = 0.005$ olarak alınmıştır. Ayrıca $b_j^{(\gamma)}$ ise binom katsayılarıdır ve aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir [1].

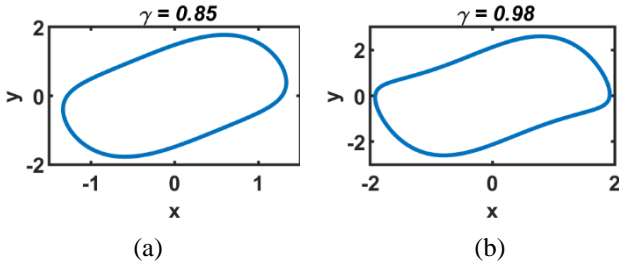
$$b_0^{(\gamma)} = 1, \quad b_j^{(\gamma)} = \binom{j-1-\gamma}{j} b_{j-1}^{(\gamma)} \quad (5)$$

GLM metodu kullanılarak $\mu_v = 0.5, 2$ ve 3 için elde edilen nümerik benzetim sonuçları faz portresi formunda Şekil 1'de sunulmaktadır. Burada $\mu_v = 0.5$ için $\gamma_{\min} = 0.8391$ olduğundan fraksiyonel derece $\gamma = 0.95$ olarak alınmaktadır. Öte yandan $\mu_v = 2$ ve 3 durumlarını her γ değeri sağladığından fraksiyonel derece $\gamma = 0.85$ olarak alınmaktadır. Ek olarak $\mu_v = 1$ iken $\gamma = 0.85$ ve 0.98 için elde edilen benzetim sonuçları Şekil 2'de verilmektedir. Şekil 1'den μ_v parametresinin değerinin VdP osilatörünün yanıt şeklini değiştirdiği açıkça görülmektedir. Benzer şekilde μ_v sabitken sistem yanıtı fraksiyonel derece γ ile değişim sergilemektedir ki bu ise fraksiyonel sistemlerin getirdiği bir zenginliktir. Öte yandan μ_v parametresi ve fraksiyonel derece arttıkça y_v ve x_v durum değişkenlerinin genliklerinin arttığı da x - y eksenlerinin sınırlarından anlaşılabilir.



Şekil 1. GLM ile elde edilen nümerik benzetim sonuçları

Denklem (1) ile verilen fraksiyonel VdP eşitliğine Laplace dönüşümü, klasik matematikteki benzer şekilde uygulanabilir [1]. Başlangıç şartları sıfırken Denklem (1)'e Laplace dönüşümü uygulanırsa Denklem (6) elde edilmektedir.



Şekil 2. GLM ile elde edilen nümerik benzetim sonuçları ($\mu_v = 1$)

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{1}{s^\gamma} y_v \\ y_v &= \frac{1}{s^\gamma} [\mu_v (1 - x_v^2) y_v - x_v] \end{aligned} \quad (6)$$

Burada $(1/s^\gamma)$ ifadesi fraksiyonel integral operatörüdür. Ancak bu operatörü sağlayacak ticari bir eleman elektronik mağazalarda söz konusu değildir. Araştırmacılar bu soruna bir çözüm olarak ilgili operatörü belli bir bant genişliğinde sağlayacak yaklaşıklık fonksiyonları türetmektedir. Bu metotlardan en yaygın olanı sürekli fraksiyonel açılım metodu (SFAM) dur. İlgili metoda göre elde edilen birinci dereceden yaklaşıklık fonksiyonu aşağıdaki gibidir [14].

$$\frac{1}{s^\gamma} \approx \frac{(1-\gamma)s + (1+\gamma)}{(1+\gamma)s + (1-\gamma)} \quad (7)$$

Denklem (7) ile verilen yaklaşıklık fonksiyonu ayrıklaştırma metotları kullanılarak z -domenine geçirilebilir. Bu kapsamda burada Al-Alaoui operatöründen

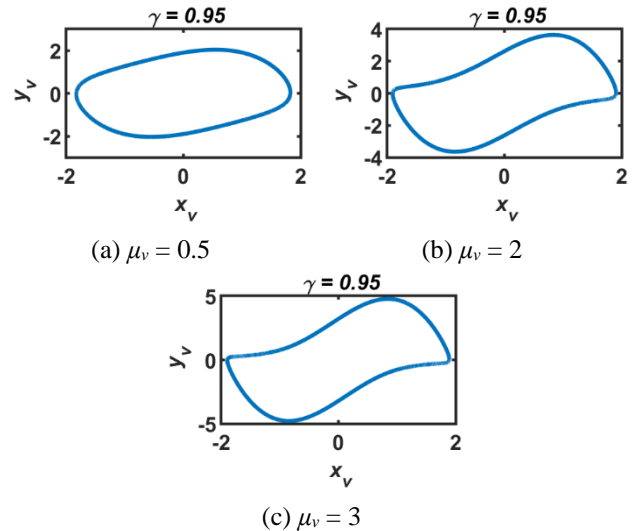
faydalanılacaktır [15]. Denklem (8)'de Al-Alaoui operatörünün yanı sıra bu operatörün Denklem (1)'e uygulanmasıyla elde edilen fark eşitlikleri sunulmaktadır.

$$\begin{aligned} s &= \frac{8(z-1)}{T_o(7z+1)} \\ x_v[n] &= \frac{-m_5}{m_6} x_v[n-1] + \frac{m_3}{m_6} y_v[n] + \frac{m_2}{m_6} y_v[n-1] \\ y_v[n] &= \frac{-m_5}{m_6} y_v[n-1] + \frac{m_3}{m_6} \{ \mu_v (1 - x_v[n]^2) y_v[n] \\ &\quad - x_v[n] \} + \frac{m_2}{m_6} \{ \mu_v (1 - x_v[n-1]^2) y_v[n-1] - x_v[n-1] \} \end{aligned} \quad (8)$$

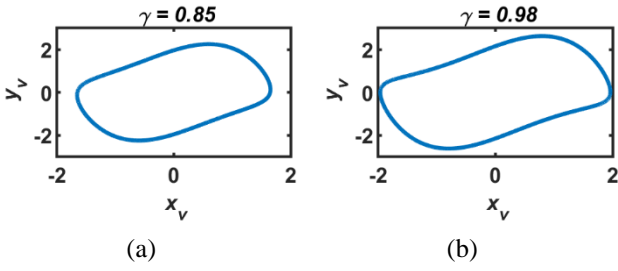
Burada T_o örnekleme zamanı iken m_2 , m_3 , m_5 ve m_6 terimleri aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} m_2 &= -8 + 8\gamma + T_o + T_o\gamma \\ m_3 &= 8 - 8\gamma + T_o + T_o\gamma \\ m_5 &= -8 - 8\gamma + T_o - T_o\gamma \\ m_6 &= 8 + 8\gamma + T_o - T_o\gamma \end{aligned} \quad (9)$$

Parametreler $T_o = 0.01$ ve $\gamma = 0.95$ iken $\mu_v = 0.5$, 2 ve 3 için Denklem (8) ile elde edilen benzetim sonuçları Şekil 3'te sunulmaktadır. Öte yandan $\mu_v = 1$ iken $\gamma = 0.85$ ve 0.98 için elde edilen sonuçlar Şekil 4'te sunulmaktadır. Şekiller 1 ve 3 ile 2 ve 4 karşılaştırdığımızda dinamik sistem yanıtlarının örtüştüğü açıkça görülmektedir. Dolayısı ile önerilen yaklaşım etkin olduğu söylenebilir.



Şekil 3. Önerilen yaklaşım ile elde edilen nümerik benzetim sonuçları



Şekil 4. Önerilen yaklaşım ile elde edilen nümerik benzetim sonuçları ($\mu_v = 1$)

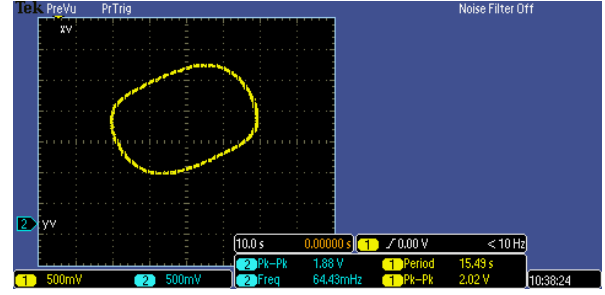
3 Fraksiyonel VdP Osilatörünün dijital gerçekleştirimi

Analog ayrık elemanlarla bir sistemin gerçekleşmesi yerine dijital platformlarda gerçekleştirimin en önemli avantajı yeniden ayarlanabilir olma özelliğidir. Özellikle fraksiyonel sistemlerde sistem derecesinin değiştirilerek farklı tepkilerin elde edilmesi nedeniyle bu sistemlerin dijital programlanabilir yapılarda gerçekleşmesi makul bir tercih olacaktır.

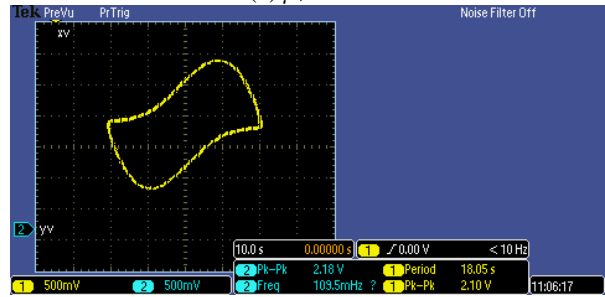
Önerilen yaklaşımı deneysel doğrulamak adına Arduino DUE kartından faydalanılacaktır. DUE kartı 84 MHz saat frekansına ve 2 adet dijital-analog dönüştürücü (DAC) çıkışıyla öne çıkmaktadır. VdP osilatörünün gerçekleşmesi için Denklem (8) ilgili uygulama kartına Arduino derleyicisi yazım dili kullanılarak kodlanacak ve aktarılacaktır. Ancak bu noktada iki hususa dikkat etmek gerekir. Bunlardan birincisi DUE kartının maksimum çıkış geriliminin 3.3V olmasıdır. Dolayısı ile sistem değişkenlerinin genliklerinin 3.3V'u geçmemesi gerekir bu nedenle genlik ölçeklendirmesi yapılmaktadır. Genlik ölçekleme, zayıflatma ve kuvvetlendirme şeklinde ikiye ayrılabilir. Kuvvetlendirme işleminde gürültü bileşenlerinin genliğinin de artacağı unutulmamalıdır. Ayrıca sonuçları doğrudan fiziksel olarak yorumlamayı da zorlaştırabilir. Zayıflatma işleminde ise çok küçük genlikli sinyallerde kayıp olabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Ancak genlik ölçekleme, değişkenleri karşılaştırmayı kolaylaştırırken, yuvarlatma hataları ve sistem sınırları dışına çıkmayı önleyerek ciddi avantaj sağlar.

Diğer husus ise DUE kartının çıkışının 0V altında değerler almamasıdır bunun içinde sistem değişkenleri negatif değerler almayacak şekilde ötelenmektedir. Her iki husus dikkate alınarak x_v değişkeni 2V ötelenmekte ve 4 kat zayıflatılmakta, y_v durum değişkeni ise genliğe bağlı olarak ya 3V ötelenmekte ve 6 kat zayıflatılmakta yahut 5V ötelenmekte ve 10 kat zayıflatılmaktadır. İlgili ayarlamalarla DUE çıkışlarından ölçülerek elde edilen durum değişkenlerinin faz portesi Şekil 5 ve 6'da verilmektedir. Şekil 3a ile 5a, Şekil 3c ile 5b, Şekil 4 ve 6 karşılaştırıldığında deneysel ve nümerik benzetim sonuçlarının uyumlu olduğu açıkça görülebilmektedir. Nümerik sonuçlarda olduğu gibi μ_v parametresi ve fraksiyonel derece arttıkça y_v ve x_v durum değişkenlerinin genliklerinin arttığı osiloskop ekran görüntülerindeki "Pk-Pk" değerlerinden gözlemlenebilir. Dolayısı ile gerek nümerik benzetimler gerekse deneysel sonuçlar önerilen yaklaşımın pratik ve uygulanabilirliğini açıkça ortaya

koymaktadır. Bu çalışmada VdP osilatörü örnek uygulama olarak ele alınsa da önerilen yaklaşım farklı fraksiyonel dinamik sistemlerin pratik gerçekleştirilmesinde de uygulanabileceği söylenebilir.

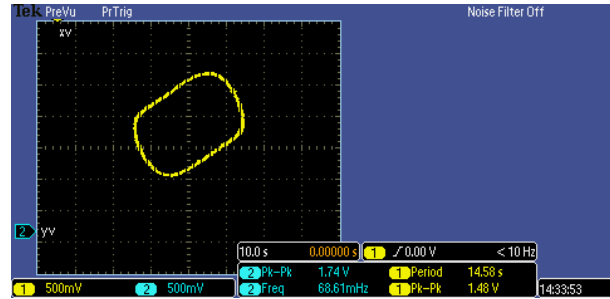


(a) $\mu_v = 0.5$

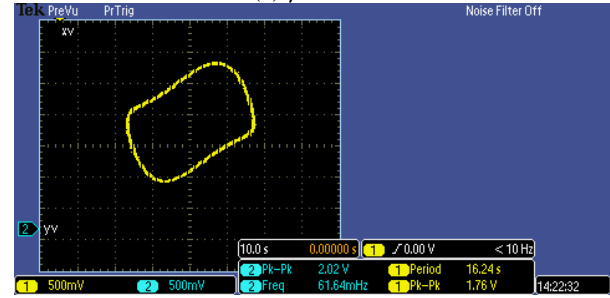


(b) $\mu_v = 3$

Şekil 5. Osiloskop ekran görüntüleri ($\gamma = 0.95$)



(a) $\gamma = 0.85$



(b) $\gamma = 0.98$

Şekil 6. Osiloskop ekran görüntüleri ($\mu_v = 1$)

4 Sonuçlar

Bu çalışmada fraksiyonel dereceli sistemlerin hızlı ve pratik gerçekleştirilmesi için bir yaklaşım önerilmektedir. Önerilen yaklaşımla nümerik benzetim sonuçları deneysel olarak da doğrulanabilmektedir. Öte yandan, ilgili

yaklaşım ile elde edilen fark denklemlerinin katsayıları değiştirilmek suretiyle farklı dinamik yanıtlar elde edilebilmektedir. Bu ise önerilen metodun esnek ve ayarlanabilir özelliğini göstermektedir. VdP osilatör eşitliği örnek uygulama olarak seçilse de ilgili yöntem farklı fraksiyonel sistemlerin gerçekleştirilmesi için de uygun bir alternatif olarak ön plana çıkmaktadır.

Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

Benzerlik oranı : %9

Kaynaklar

- [1] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo, Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. World Scientific, 2012. <https://doi.org/10.1142/10044>
- [2] M. Dalir, and M. Bashour, Applications of fractional calculus. Applied Mathematical Sciences, 4(21), 1021–1032, 2010.
- [3] H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, and Y. Chen, A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 64, 213–231, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019>
- [4] C. Li, and F. Zeng, Numerical Methods for Fractional calculus. CRC Press, 2015.
- [5] G. Carlson, and C. Halijak, Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process. IEEE Transactions on Circuit Theory, 11(2), 210–213, 1964. <https://doi.org/10.1109/TCT.1964.1082270>
- [6] M. S. Semary, M. E. Fouda, H. N. Hassan, and A. G. Radwan, Realization of fractional-order capacitor based on passive symmetric network. Journal of Advanced Research, 18, 147–159, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jare.2019.02.004>
- [7] B. van der Pol, The nonlinear theory of electric oscillations. Proc. IRE 22, 1051–1086, 1934.
- [8] J. H. He, The simpler, the better: Analytical methods for nonlinear oscillators and fractional oscillators. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 38(3–4), 1252–1260, 2019. <https://doi.org/10.1177/1461348419844>
- [9] M. Li, Three classes of fractional oscillators. Symmetry, 10(2), 40, 2018. <https://doi.org/10.3390/sym10020040>
- [10] İ. E. Saçu, and M. Alçı, An electronically controllable fractional multivibrator. IETE Journal of Research, 67(3), 313–321, 2021. <https://doi.org/10.1080/03772063.2018.1548909>
- [11] B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. Radio Review, 1, 701–710, 754–762, 1920.
- [12] R. S. Barbosa, J. A. T. Machado, B. M. Vinagre, and A. J. Calderón, Analysis of the Van der Pol oscillator containing derivatives of fractional order. Journal of Vibration and Control, 13(9–10), 1291–1301, 2007. <https://doi.org/10.1177/1077546307077463>
- [13] M.S. Tavazoei and M. Haeri, A note on the stability of fractional order systems. Math. Comput. Simul., 79(5), 1566–1576, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.07.003>
- [14] B. T. Krishna, Studies on fractional order differentiators and integrators: a survey. Signal Processing, 91, 386–426, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.06.022>
- [15] M. A. Al-Alaoui, Al-Alaoui operator and the new transformation polynomials for discretization of analogue systems. Electr Eng, 90, 455–467, 2008. [10.1007/s00202-007-0092-0](https://doi.org/10.1007/s00202-007-0092-0)

