

Palindromik Dönüşümler Yarigrubunun Üst Rankı

Upper Rank of Palindromic Transformations Semigroup

Osman KELEKCI* 

*Makale Bilgisi / Article Info

Alındı/Received: 05.09.2023

Kabul/Accepted: 10.03.2024

Yayımlandı/Published: 29.04.2024

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 51240, Niğde.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

Öz

Tam dönüşümler yarigrubu olarak isimlendirilen T_n , fonksiyonların bileşke işlemine göre sonlu bir $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlanan bütün fonksiyonların yarigrubudur. Bu dönüşümler içerisinde seçilen tüm palindrom imajlı dönüşümlerin kümesi bir yarigrup teşkil eder ve P_n ile gösterilir. Bu çalışmada T_n nin bir alt yarigrubu olan palindromik dönüşümler yarigrubu P_n nin üst rankı için bir alt sınır hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Palindrom; Bağımsızlık; Dönüşüm Yarigrubu; Rank.

Abstract

The full transformations semigroup T_n , is the semigroup of all functions defined on a finite set $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ according to the composition operation of the functions. The set of all palindrome image transformations selected among these transformations forms a semigroup and is denoted by P_n . In this study, a lower bound was calculated for the upper rank of the palindromic transformations semigroup P_n , which is a sub semigroup of T_n .

Keywords: Palindrome; Independency; Transformation Semigroup; Rank.

1. Giriş

Sonlu bir $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden yine X_n e tanımlanabilecek bütün fonksiyonların kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir yarigrup teşkil eder ve bu yarigrup tam dönüşümler yarigrubu olarak isimlendirilip T_n ile gösterilir. Yine X_n kümesi üzerinde tüm permütasyonlar (birebir ve örten dönüşümler) S_n ile gösterilen simetrik grubu oluştururken, $Sing_n = T_n - S_n$ singüler dönüşümler yarigrubudur. $Sing_n \leq T_n$ olduğu açıktır.

Cayley Teoreminden sonra popülaritesi artan dönüşüm yarigrupları cebirin başlı başına bir alt çalışma alanı olmuştur. Bu bağlamda dönüşümler yarigrubu, bunun farklı alt yarigrupları ve özellikleri, diğer cebirsel yapılarla karşılaştırma yapılarak günümüze kadar çalışılmıştır. Farklı cebirsel yapılarda olduğu gibi dönüşüm yarigruplarını da sınıflandırma yöntemlerinden birisi doğuray kümesi ve rank kavramıdır. S , sonlu doğuraylı bir yarigrup olmak üzere genel olarak rank, T doğuray kümesi olmak üzere, $rank(S) = \min\{|T| : \langle T \rangle = S \text{ ve } T \subseteq S\}$ ile tanımlanır.

Palindrom ise soldan sağa ve sağdan sola yazılışları aynı olan bir kelime, cümle, sayı ya da farklı karakterlerin bir sıralanması olarak tanımlanabilir. “teğet”, “zaman yorar akıl kahreder haklı karar oynamaz”, “06102008180020160” örnekleri sıralanabilir.

Tanım 1.1. X_n üzerinde, $i + j = n + 1$ için $f(i) = f(j)$ şartını sağlayan dönüşümlere palindromik dönüşüm denir. Yani, klasik gösterimle, $f \in Sing_n$ olmak üzere;

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(2) & f(1) \end{pmatrix}$$

şeklindeki dönüşümler palindromiktir. P_n bütün palindromik dönüşümlerin kümesi, $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ olmak üzere n^k elemanlı olup T_n nin bir alt yarigrubudur ($P_n \leq T_n$).

Yarigruplar ve dönüşüm yarigrupları ile ilgili açıklanmayan kavramlar için Howie (1995) ile Ganyushkin and Mazorchuk (2009) a bakınız.

2. Materyal ve Metot

Özellikle dönüşüm yarigruplarında çığır açıcı çalışmalara imza atan İngiliz matematikçi John Machintosh Howie, rank tanımındaki doğurma özelliğine bağımsızlık tanımını da ekleyerek yarigruplar için aşağıda gösterilen beş farklı rank geliştirmiştir. (Howie and Riberio 1999, 2000).

Tanım 2.1. S sonlu bir yarigrup olsun. $B \subseteq S$ olmak üzere $\forall x \in B \subseteq S$ için $x \notin \langle B - \{x\} \rangle$ ise B kümesine S nin bağımsız bir alt kümesi denir.

Tanım 2.2. S bir yarigrup olmak üzere;

$$r_1(S) = \max\{|A| : \forall A \subseteq S, A \text{ bağımsız}\}$$

$$r_2(S) = \min\{|A|: \exists A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$$

$$r_3(S) = \max\left\{|A|: \exists A \subseteq S, \langle A \rangle = S \text{ ve } A \text{ bağımsız}\right\}$$

$$r_4(S) = \max\{|A|: \exists A \subseteq S, A \text{ bağımsız}\}$$

$$r_5(S) = \min\{|A|: \forall A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$$

ile tanımlı olup sırasıyla küçük rank, alt rank, orta rank, üst rank ve geniş rank olarak isimlendirilmiştir. Ayrıca küçük rank ve geniş rank tanımlarında yer alan \forall evrensel niceleyicisinden kaynaklı, bu iki rank formülüne edilmiştir. (Howie and Riberio, 2000). Bu bağlamda (Kelekci, 2011) de, T_n tam dönüşümler yarigrubunun üst rankı ve ayrıca (Kelekci, 2020) de ise P_n palindromik dönüşümler yarigrubunun S_n e göre relatif rankı çalışılmıştır.

Bu beş rank arasındaki bağıntı aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.1. S bir yarigrup olmak üzere $r_1(S) \leq r_2(S) \leq r_3(S) \leq r_4(S) \leq r_5(S)$ dir.

İspat. Bir $n \geq 1$ tamsayısı için $r_2(S) = n$ ise $|U| = n$ ve $\langle U \rangle = S$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır. $r_2(S)$ nin tanımından U bağımsız olmak zorundadır. Aksi halde $u \in \langle U \setminus \{u\} \rangle$ olacak şekilde bir $u \in U$ mevcut olurdu ve bu durumda $\langle U \setminus \{u\} \rangle = S$ ve $r_2(S) \leq n - 1$ olur ki bu da $r_2(S) = n$ olmasıyla çelişir. Bir $m \geq 1$ tamsayısı için $r_1(S) = m$, $r_2(S) = n$ ve kabul edelim ki $n < m$ olsun. O zaman $|U| = n$ ve $\langle U \rangle = S$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır. Ayrıca, $U \subsetneq V$, $|V| = m$ ve V bağımsız olacak şekilde en az bir $V \subseteq S$ vardır. Dolayısıyla $n < m$ olduğundan $V \setminus U \neq \emptyset$ olup en az bir $v \in V \setminus U$ mevcuttur. V bağımsız olduğundan $v \notin \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olur. Ayrıca, $U \subsetneq V$ ve $v \in V \setminus U$ olduğundan $\langle U \rangle \subseteq \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olup $v \notin \langle U \rangle$ olur. Bu ise $\langle U \rangle = S$ olması ile çelişir. O halde $m \leq n$ olup $r_1(S) \leq r_2(S)$ olur. Eğer $|U| = r_2(S)$ ve $\langle U \rangle = S$ ise gösterildiği üzere $U \subseteq S$ bağımsız olur. Böylece $r_3(S)$ nin tanımından $r_2(S) = |U| \leq r_3(S)$ olur. Benzer şekilde, $r_3(S) = |U|$, $U \subseteq S$ bağımsız ve $\langle U \rangle = S$ ise $r_4(S)$ nin tanımından $r_3(S) = |U| \leq r_4(S)$ olur. Son olarak $r_4(S) \leq r_5(S)$ olduğunu gösterelim. Bir $t \geq 1$ tamsayısı için $r_5(S) = t$ ve bir $k \geq 1$ tamsayısı için $r_4(S) = k$ olsun. Kabul edelim ki $k > t$ olsun. O zaman S nin k elemanlı bağımsız bir alt kümesi $V \subseteq S$ mevcut olup herhangi bir $v \in V$ için $|V \setminus \{v\}| \geq t$ ve $r_5(S)$ nin tanımından $\langle V \setminus \{v\} \rangle = S$ olur. Bu durumda $v \in \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olur ki bu V nin bağımsızlığı ile çelişir. O halde $k \leq t$ yani $r_4(S) \leq r_5(S)$ olur. Böylece $r_1(S) \leq r_2(S) \leq r_3(S) \leq r_4(S) \leq r_5(S)$ olduğu gösterilmiş olur. ■

Tanım 2.3. Dönüşüm yarigrupları için Green denklik bağıntıları, $\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere;

- (i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{ima} \alpha = \text{im} \beta$
- (ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{ker} \alpha = \text{ker} \beta$
- (iii) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{ker} \alpha = \text{ker} \beta \text{ ve } \text{ima} \alpha = \text{im} \beta$
- (iv) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\text{ima} \alpha| = |\text{im} \beta|$

olarak tanımlıdır. Ayrıca T_n nin n tane \mathcal{D} denklik sınıfı vardır ve bir \mathcal{D}_k sınıfında;

- a) $\binom{n}{k}$ tane farklı \mathcal{L} sınıfı
- b) $S(n, k)$ tane farklı \mathcal{R} sınıfı
- c) $S(n, k) \binom{n}{k}$ tane farklı \mathcal{H} sınıfı
- d) Bir \mathcal{H} sınıfında $k!$ tane eleman
- e) Bir \mathcal{L} sınıfında $S(n, k)$ $k!$ tane eleman
- f) Bir \mathcal{R} sınıfında $\binom{n}{k} k!$ tane eleman
- g) bir \mathcal{L} sınıfında n^{n-k} tane grup olan \mathcal{H} sınıfı
- h) Bir \mathcal{D}_k sınıfında $\binom{n}{k} S(n, k) k!$ tane eleman

vardır. Burada $S(n, k)$ ikinci tip Stirling sayısıdır.

3. Bulgular

Teorem 3.1. Palindromik dönüşümler yarigrubunun üst rankı, $r_4(P_n) \geq |B|$ dir. B bir küme olup, palindromları ilk elde ettiğimiz en büyük \mathcal{D} sınıfındaki $(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)$ nci sınıf), grup olan \mathcal{H} sınıflarındaki idempotent elemanlardan ve grup olmayan \mathcal{H} sınıflarındaki bütün elemanlardan oluşur.

İspat. Düzgün \mathcal{D} sınıflarının kombinatorik özelliklerinden hareketle ve ayrıca palindromik dönüşümler, sahip oldukları çekirdek $(\text{ker}(f) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : xf = yf\})$ yapısından kaynaklı aynı \mathcal{R} sınıfında bulunurlar.

İdempotentler, buldukları \mathcal{L} sınıfının sağ birimi, \mathcal{R} sınıfının sol birimi ve \mathcal{H} sınıfının ise birim elemanı rolü üstlenirler. Kalan elemanlar ise

$$\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta) \quad (1)$$

olduğundan imajı azaltıp ve

$$\text{ker}(\alpha) \subseteq \text{ker}(\alpha\beta) \quad (2)$$

parçalanışı arttırarak sabit dönüşüme giderler. Sabit dönüşümler ise yine palindromiktir.

Şimdi B kümesinin bağımsız olduğunu ispatlayalım. Tanım gereği B kümesinin her bir elemanı, kalan elemanlar tarafından üretilen alt yarigrubun elemanı olmayacak. Yani $\forall \alpha \in B$ için $\alpha \notin \langle B - \{\alpha\} \rangle$. Varsayalım ki herhangi bir $\beta \in B$ için $\beta \in \langle B - \{\beta\} \rangle$ olsun. O halde $\beta = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_n$ olacak şekilde $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in B - \{\beta\}$ palindromları vardır. (1) ve (2) den $\ker(\delta_1) = \ker(\beta)$ ve $\text{im}(\delta_n) = \text{im}(\beta)$ olur. $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ve β aynı R sınıfında yer aldığından $\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)$ nci sınıf, hepsinin çekirdekleri eşit olup $\ker(\delta_n) = \ker(\beta)$ dir. O halde δ_n ve β dönüşümleri, imajları ve çekirdekleri eşit olduğundan aynı \mathcal{H} sınıfında bulunurlar.

Eğer β palindromu bir idempotent ise, β ile δ_n aynı \mathcal{H} sınıfında bulunamaz. B kümesinin tanımıyla çelişir. Bu sebeple $B - \{\beta\}$ kümesinde, $\ker(\delta_n) = \ker(\beta)$ olacak şekilde herhangi bir eleman yoktur. Yani $\beta \notin \langle B - \{\beta\} \rangle$ olup B bağımsızdır.

Eğer β palindromu bir idempotent değilse, idempotentler \mathcal{R} sınıfı için sol birim görevi üstlendiğinden mümkün

$$D_3 = S_3 \quad \boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)}$$

$$D_2 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ \hline \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^* \right) \\ \hline \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ \hline \end{array}$$

$$D_1 \quad \boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^* \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^* \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^* \right)}$$

P_3 için bağımsız B kümesi,

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

elemanlarından oluşur. O halde $r_4(P_3) \geq 4$ dir.

Benzer şekilde P_4 için bağımsız B kümesi,

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

olup $r_4(P_4) \geq 8$ bulunur.

çarpımlar sonucunda grup olmayan \mathcal{H} sınıfındaki elemanların dışında eleman doğurulmaz. Ayrıca grup olmayan \mathcal{H} sınıfları kapalı olmadığından (aslında bağımsız alt küme olduğundan) mümkün çarpımlar imajı azaltır. Yani $|\text{im}(\beta)| = |\text{im}(\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_n)| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 - 1$ olur. Bu ise β nın $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ nci \mathcal{D} sınıfında olmasıyla çelişir. O halde $\beta \notin \langle B - \{\beta\} \rangle$ dir. ■

P_3 ve P_4 için örnekle teorinin anlaşılmasını sağlayalım. Öncelikle, Green denklik bağıntılarından hareketle oluşturulan ve yumurta kutusu olarak adlandırılan düzgün \mathcal{D} sınıfları (sütunlar \mathcal{L} sınıfı, satırlar \mathcal{R} sınıfı ve kesişimleri \mathcal{H} sınıfı olmak üzere) T_3 için aşağıdaki çizelgedeki gibidir. Kalın olarak gösterilen dönüşümler palindromiktir. Ayrıca "*" ile indislenen dönüşümler imajına kısıtlandığında birim dönüşüm olduğundan idempotenttir ve buldukları \mathcal{H} sınıfları ise birer gruptur.

4. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada Palindromik dönüşümler yarigrubunun üst rankı için bir alt sınır hesaplanmıştır. Aynı yarigrubun farklı rank ve doğuray kümeleri açık problemdir.

Etik Standartlar Bildirgesi

Yazarlar tüm etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

5. Kaynaklar

Ganyushkin, O. and Mazorchuk, V., 2009. Classical finite transformation semigroups, Springer-Verlag London Ltd., London, 318.

Howie, J.M., 1995 Fundamentals of semigroup theory, Oxford University Press, New York, 364.

Howie, J.M. and Riberio, M. I. M., 1999. Rank properties in finite semigroups. *Communications in Algebra*, **27**, 5333-5347.
<https://doi.org/10.1080/00927879908826758>

Howie, J.M. and Riberio, M. I. M., 2000. Rank properties in finite semigroups II: the small rank and the large rank. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **24**, 231-237.
<https://doi.org/10.1007/s10012-000-0231-2>

Kelekci, O., 2011. Upper rank of full transformation semigroups on a finite set. *International Journal of Algebra*, **5 (31)**, 1527-1532.
<https://doi.org/10.12988/ija>

Kelekci, O., 2020. Transformations with palindromic images. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, **73 (6)**, 751-757.
<https://doi.org/10.7546/CRABS.2020.06.01>