



## Paralel Makina Çizelgeleme Problemi için bir Karma Tamsayı Programlama Modeli: Ortak Kaynak Kullanımı

Emine AKYOL<sup>1\*</sup>, Tuğba SARAC<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Anadolu Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 26555, Tepebaşı/ESKİŞEHİR

<sup>2</sup>Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 26480, Odunpazarı/ESKİŞEHİR

### Öz

Paralel makina çizelgeleme problemlerinde, bazı işler ortak kaynak kullanıyorlarsa bu işleri aynı anda çizelgelemek mümkün değildir. Örneğin, eğer iki plastik parça aynı kalıp ile üretiliyorsa biri üretilirken diğeri kalıbı beklemek zorundadır. Paralel makinaların olduğu pek çok üretim sisteminde, işler kalıp, kreyn v.b. ortak kaynaklar kullanılmaktadır. Bu çalışmada, ortak kaynak kullanan işlerin paralel makinalarda çizelgelenmesi problemi ele alınmıştır. Ele alınan problem için bir karma tamsayı programlama modeli geliştirilmiştir. Önerilen modelin GAMS/Cplex ile çözüm performansı, rassal olarak üretilmiş küçük ve büyük boyutlu test problemleri kullanılarak test edilmiştir.

### Makale Bilgisi

Başvuru: 10/04/2016

Düzeltilme: 06/06/2017

Kabul: 14/09/2017

### Anahtar Kelimeler

Paralel makine  
çizelgeleme

Sıra bağımlı hazırlık  
süresi

Makine uygunluk kısıtları  
Ortak kaynak kullanımı  
Karma tamsayı  
programlama

### Keywords

Parallel machine  
scheduling problem

Sequence dependent setup  
time

Machine eligibility  
restrictions

Using shared resources  
Mixed integer  
programming

## A Mix Integer Programming Model for Parallel Machine Scheduling Problem: Using Shared Resource

### Abstract

In parallel machine scheduling problems, if jobs have shared resources, it is not possible to schedule these jobs at the same time. For instance, if same mold are used for producing two different plastic parts, one of the parts has to wait until the end of other part's process. In production systems including parallel machines, in general, jobs use shared resources like mold, crane etc. In this study, an identical parallel machine scheduling problem with shared resources is considered. A mixed-integer programming model is developed for considered problem. The solving performance of proposed model by GAMS/Cplex solver was tested using randomly generated small and large-sized instances.

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Çizelgeleme, belli bir zaman aralığındaki işlere sınırlı sayıda kaynakların tahsis edilmesini ele alan bir karar verme sürecidir. [1] Üretime dayalı işletmelerde çizelgeleme, işlerin makinelere hangi sırada atanacağını ve hangi kaynaklarla üretileceğinin belirlenmesine yöneliktir. Özellikle iş sayısının ve çeşitliliğinin sayıca fazla, kaynakların ise sınırlı olduğu yoğun üretim yapan işletmelerde, makinelerin çizelgelenmesi oldukça zorlaşmaktadır. Enjeksiyon makinaları ile plastik parça üreten fabrikalar, bu tip işletmelere bir örnektir. Çalışmamızın motivasyon kaynağı enjeksiyon makinalarının çizelgelenmesi problemidir. Enjeksiyon makinası ile bir plastik parça üretebilmek için, bu parçaya ait kalıbın ilgili makinaya bağlanması ve eğer hammadde ya da renk değişecekse, hammadde haznesinin temizlenmesi gerekmektedir. Koyu renkli parçalardan, açık renkli parçaların üretimine geçmek ya da bazı hammadde

\*İletişim yazarı, e-mail: emineakyol@anadolu.edu.tr

değişiklikleri çok uzun zaman alabilmektedir. Bir başka deyişle *hazırlık süreleri sıralamaya bağımlıdır*. Her kalıp teknik kısıtlar nedeniyle her makineye bağlanamamaktadır. Yani, *makina uygunluk kısıtları* söz konusudur. Ayrıca, aynı kalıbı (kaynağı) ortak kullanan plastik parçalar mevcuttur. Bu nedenle bu çalışmada, sıralamaya bağlı hazırlık sürelerinin, makine uygunluk kısıtlarının ve ortak kaynak kullanan işlerin olduğu paralel makina çizelgeleme problemi ele alınmıştır. Ele alınan problem için bir karma tamsayılı programlama modeli geliştirilmiştir.

Çalışmanın izleyen bölümünde, ele alınan problem tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, paralel makine çizelgeleme problemleri ile ilgili erişilebilen literatür sunulmuştur. Dördüncü bölümde, önerilen karma tamsayılı model açıklanmıştır. Çalışmanın deneysel sonuçları, beşinci bölümde sunulmuştur. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmış ve geleceğe yönelik önerilerde bulunulmuştur.

## 2. PARALEL MAKİNE ÇİZELGELEME PROBLEMİ: ORTAK KAYNAK KULLANIMI (PARALLEL MACHINE SCHEDULING PROBLEM: USING SHARED RESOURCE)

Enjeksiyonla üretilen plastik parçaların dünya çapında çok geniş bir pazarı vardır. Bu nedenle oldukça önemli bir sektördür. Enjeksiyonla plastik parça üretiminde, belli bir sıcaklığa getirilerek eritilmiş plastik, belirli bir basınçla kalıba enjekte edilmektedir. Bir süre soğuması için bekletildikten sonra kalıp açılmakta ve parça alınmaktadır. Bir kalıbın, enjeksiyon makinesine bağlanabilmesi için kalıp en ve boyunun makinenin kolon aralığından küçük olması ve kalıbın derinliğinin de kapama aralığı ile uyumlu olması gereklidir [2].

Enjeksiyon makinelerinin çizelgenmesi probleminin göz önünde bulundurulması gereken üç önemli karakteristiği vardır: (1) Enjeksiyon makinesinde bir plastik parçanın üretilebilmesi için parçaya ait kalıbın makineye bağlanması gerekmektedir. Teknik şartlardan dolayı, her kalıp her makineye bağlanamamaktadır. Bu nedenle bu problemde, *makine uygunluk kısıtları* göz önünde bulundurulmalıdır. (2) Aynı kalıbı kullanan farklı ürünler olması mümkündür ve bu durumda kalıplar, makinelerin *ortak kaynaklarıdır*. (3) Makinelerde bir üründen diğerine geçişte hazırlık süresine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu hazırlık süresi, gerekiyorsa kalıp değişimini, hammadde ve boya karışımının hazırlanmasını kapsamaktadır. Benzer işlerin ardı sıra aynı makineye atanmaması, ürünlerin hazırlık süresini önemli ölçüde arttırmaktadır. Örneğin, eğer önceki iş koyu renkli, sıradaki iş açık renkli ise hazırlık süresi çok uzayabilmektedir. Dolayısıyla, bu problemde *hazırlık süreleri iş sıralarına bağlı* olarak değişmektedir.

## 3. LİTERATÜR TARAMASI (LITERATURE REVIEW)

Aynı işi yapabilen makinalar, paralel makinalar olarak adlandırılmaktadır. Eğer bir parça tüm paralel makinelerde aynı sürede üretilebiliyorsa bu makinalar özdeşdir. Bu çalışmada, özdeş paralel makine çizelgeleme probleminin özel bir hali ele alınmıştır. Problemin sıra bağımlı hazırlık süreleri, makine uygunluk kısıtları ve ortak kaynaklar olmak üzere üç önemli kısıtı vardır. Aşağıda, her bir kısıt ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar ayrı bir paragrafta verilmiştir.

*Sıra bağımlı hazırlık süresi*, bir işin hazırlık süresinin kendinden önce çizelgelenen işe göre değişebilmesi durumudur. Çizelgeleme literatüründe sıra bağımlı hazırlık süreli özdeş paralel makine çizelgeleme problemi ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların çoğunda, problemlerin amacı son işin tamamlanma zamanını enküçüklemektir ( [3], [4], [5] ). Chung ve diğerleri [6], makine kapasitelerinin sınırlı olduğu ve günlük üretim hedefinin olduğu bir çizelgeleme problemini ele almışlardır. Çözüm için, karma tamsayılı bir doğrusal programlama modeli önermişlerdir. Driessel ve Moench [7], hazır olma zamanlarının, öncelik kısıtlarının ve sıra bağımlı hazırlık sürelerinin göz önünde bulundurulduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemini ele almışlardır. Problemin çözümü için bir değişken komşu arama yöntemi önermişlerdir. Li ve diğerleri [8], teslim tarihi ve hazır olma zamanları olan özdeş paralel makine çizelgeleme problemini ele almışlardır. Problemin amaçları, son işin tamamlanma süresini ve toplam gecikmeyi enküçüklemektir. Problemin çözümüne yönelik olarak 0-1 karma tamsayılı bir model ve bulanık mantığa dayalı bir genetik algoritma geliştirmişlerdir. Lin ve diğerleri [9], sıra bağımlı hazırlık süreli ve hazır olma zamanlarının olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemini ele almışlardır. Problemin

amacı, en büyük gecikmeyi enküçükmektir. Problemin çözümü için bir açgözlü algoritma önermişlerdir. Türker ve Sel [10] sıra bağımlı hazırlık süreleri ve hazırlık işlemlerinin yer aldığı iki özdeş paralel makine çizelgeleme problemini dikkate almışlardır. Çizelgedeki son işin tamamlanma zamanını enküçükleme amacı olan problem için, bir genetik algoritma tasarlanmıştır. Önerilen algoritmanın performansı, tüm alternatif çözümleri kontrol eden bir sıralama algoritmasının çözümleri ile karşılaştırılmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Türker ve Sel [11], benzer özelliklere sahip bir problem için genetik algoritmayı ve yasaklı arama algoritmasını kullanarak yeni bir bütünleşik algoritma önermişlerdir. Bu algoritmanın etkinliği ise rastgele arama yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

*Makine uygunluk kısıtları*, işlerin teknik kısıtlar nedeniyle, her makinede işlem görmesi mümkün olmadığı ortada çıkmaktadır. Makine uygunluk kısıtlarının olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemleri literatürde geniş yer tutmaktadır. Alagöz ve Azizoglu [12], makine uygunluk kısıtlarının olduğu paralel makinelerin yeniden çizelgelenmesi ile ilgili çalışmışlardır. Toplam akış süresini enküçükleme amacıyla bir eniyileme algoritması önermişlerdir. Eliyi ve Azizoglu [13], makineye bağımlı iş ağırlıklarının olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemi için, toplam ağırlıklı tamamlanmış iş sayısını enbüyüklemeye amacıyla bir dal sınır algoritması geliştirmişlerdir. Su ve diğerleri [14], işlerin teslim zamanının ve makine uygunluk kısıtlarının olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme probleminde toplam tamamlanma zamanı enküçükleme için bir sezgisel algoritma ve bir dal sınır algoritması geliştirmişlerdir.

İşletmelerde *ortak kaynak kullanan işlerin olması* etkin bir çizelge oluşturmayı zorlaştırmaktadır. Ortak kaynak kullanan işlerin olduğu problemlerde işlerin aynı ana çizelgelenebilmesi için o kaynağın bir kopyasının olması gerekmektedir. Aksi takdirde, aynı kaynağı kullanan işlerden biri, diğerini beklemek zorunda kalacaktır. Paralel makine çizelgeleme problemleri için kaynak kullanımı önemli olmasına rağmen, literatürde kaynakların dikkate alındığı az sayıda çalışma bulunmaktadır. Son yıllarda yapılan çalışmalar incelendiğinde; Li ve diğerleri [15], özdeş paralel makine çizelgeleme problemi için enbüyük tamamlanma zamanının enküçülenmesi amacıyla bir tavlama benzetimi algoritması geliştirmişlerdir. İşlem süresi, kullanılan kaynaklara bağlı olarak değişmektedir ve toplam kaynak kullanımı sınırlıdır. Edis ve diğerleri [16]'un ele aldığı problemin amacı son işin tamamlanma zamanını enküçükmektir. Tamsayı programlama modeli ve kısıt programlama modeli geliştirilmiştir. Ruiz ve Romano [17], hazırlık sürelerinin atanan kaynaklara bağlı olduğu bir özdeş olmayan paralel makine çizelgeleme problemini ele almışlardır. Toplam kaynak kullanımını ve toplam tamamlanma zamanını enküçükleme için bir karma tamsayı matematiksel model geliştirmişlerdir. Edis ve Ozkarahan [18], hem kaynak kısıtı hem de makine uygunluk kısıtları olan bir özdeş paralel makine çizelgeleme problemi için tamsayı programlama modeli, kısıt programlama modeli ve her iki modelin birleştirildiği bir model olmak üzere üç farklı model önermişlerdir; Edis ve Oğuz [19], statik ve dinamik esnek kaynaklı paralel makine çizelgeleme problemi için bir matematiksel model önermişlerdir. Büyük boyutlu problemler için kısıt programlama tabanlı tamsayı programlama yaklaşımı geliştirmişlerdir. Tablo 1' de çizelgeleme literatürüyle ilgili yukarıda verilen çalışmalar özetlenmiştir.

**Tablo 1. Literatür Taraması**

<i>Çalışma</i>	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	<i>Çözüm Yöntemi</i>
<i>Chung vd. [6]</i>	$P_m$	Makine Uygunluk Kısıtları( $M_j$ ), $s_{ij}$	Toplam ağırlıklı çıktı miktarını enbüyüklemek	Karma tamsayı doğrusal model
<i>Driessel ve Mönch[7]</i>	$P_m$	Hazır olma zamanı( $r_j$ ), Öncelik kısıtı( $prec$ ), $s_{ij}$	Toplam ağırlıklı gecikmeyi enküçükmek ( $\sum w_j T_j$ )	Değişken komşuluk arama yöntemi

**Tablo 1(devam). Literatür Taraması**

<i>Li vd. [8]</i>	$P_m$	$r_j, S_{ij}$	$C_{enb}$ ve toplam gecikmeyi( $\sum T_j$ ) enküçüklemek	<b>0-1 Karma tamsayılı matematiksel model ve bulanık mantığa dayalı bir genetik algoritma</b>
<i>Li vd. [9]</i>	$P_m$	$r_j, S_{ij}$	En büyük gecikmeyi( $T_{enb}$ ) enküçüklemek	Açgözlü algoritma
<i>Turker ve Sel[10]</i>	$P_m$	$S_{ij}$	$C_{enb}$	Genetik algoritma ve Sıralama Algoritması
<i>Turker ve Sel[11]</i>	$P_m$	$S_{ij}$	$C_{enb}$	Genetik algoritma ve yasaklı arama algoritmasının olduğu bir bütünleşik algoritma
<i>Alagoz ve Azizoglu[12]</i>	$P_m$	$M_j$	Toplam akış süresini enküçüklemek( $\sum C_j$ )	Eniyileme Algoritması
<i>Eliyi ve Azizoglu[13]</i>	$P_m$	$M_j$	toplam ağırlıklı tamamlanmış iş sayısını enbüyükleme	Dal sınır algoritması
<i>Su vd. [14]</i>	$P_m$	$M_j$	$T_{enb}$	Şebeke akış tabanlı bir matematiksel model ve sezgisel yaklaşım
<i>Li vd. [15]</i>	$P_m$	$M_j$	$C_{enb}$	Tavlama benzetimi algoritması
<i>Edis vd. [16]</i>	$P_m$	<i>Ortak kaynak, <math>M_j</math></i>	$C_{enb}$	Tamsayılı programlama modeli ve kısıt programlama modeli
<i>Ruiz ve Romano[17]</i>	Özdeş Olmayan Paralel Makine ( $R_m$ )	<i>Hazırlık süreleri atanan kaynaklara bağlı</i>	Toplam kaynak kullanımını ve $\sum C_j$ enküçüklemek	Karma tamsayılı matematiksel model
<i>Edis ve Ozkarahan[18 ]</i>	$P_m$	<i>Ortak kaynak, <math>M_j</math></i>	$C_{enb}$	Tamsayılı programlama modeli, kısıt programlama modeli ve her iki modelden oluşan bütünleşik bir model
<i>Edis ve Oğuz [19]</i>	$P_m$	<i>Ortak kaynak,</i>	$C_{enb}$	Matematiksel model ve kısıt programlama tabanlı tamsayılı programlama yaklaşımı

Bu çalışmada, sıra bağımlı hazırlık süreli, makine uygunluk kısıtları ve ortak kaynakların olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemi ele alınmıştır. Erişilebilen literatür incelendiğinde hiçbir çalışmanın bu üç özelliği birlikte ele almadığı göze çarpmaktadır. Bu çalışmanın motivasyon kaynağı, Edis ve Ozkarahan [18]’ da olduğu gibi enjeksiyon makinelerinin çizelgelemesidir. Her iki çalışmanın motivasyon

kaynağı aynı olmasına rağmen ele alınan problemler arasında üç önemli fark bulunmaktadır: (1) Edis ve Ozkarahan [18], sıra bağımlı hazırlık sürelerini dikkate almamıştır. (2) Edis ve Ozkarahan [18]' in çalışmasında, ortak kaynak kullanan işlerin aynı makineye artarda atanmasıyla kaynak kısıtı ortadan kaldırılmıştır. Bu varsayım, problemin çözümünü kolaylaştırmasına rağmen eniyi çözümün elde edilmesini engelleme riskine sahiptir. (3) Edis ve Ozkarahan [18], karar değişkenlerini zaman indisi ile tanımlamışlardır. Bu yaklaşım, iş sayısı aynı kalsa bile çizelgeleme periyodu arttıkça, karar değişkeni sayısının büyük ölçüde artmasına neden olmaktadır. Önerdiğimiz matematiksel modelde, karar değişkeni sayısı çizelgeleme periyodundan bağımsızdır. Makine ve iş sayısına bağlıdır. Bu nedenle, önerilen model önemli ölçüde daha az sayıda karar değişkenine sahiptir.

Literatürde yer alan çalışmalardan da görülebileceği gibi, gerçek hayatta sık karşılaşıldığından, son yıllarda özdeş paralel makine çizelgeleme ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Ancak, paralel makine çizelgeleme probleminin önemli bir boyutu olan makinelerin kaynak paylaşımı, söz konusu çalışmalarda nadiren yer almaktadır.

#### 4. MATEMATİKSEL MODEL VE ALT SINIRLAR (MATHEMATICAL MODEL AND LOWER BOUNDS)

Bu bölümde, önerilen matematiksel model detaylı bir şekilde açıklandıktan sonra modelin başarısını göstermekte kullanılacak olan alt sınır yöntemleri verilmiştir.

##### 4.1. Önerilen Matematiksel Model (Proposed Mathematical Model)

Bu makalede ele alınan, sıra bağımlı hazırlık süreli, makine uygunluk kısıtları ve ortak kaynak kullanan işlerin olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemi için bir karma tamsayılı matematiksel model geliştirilmiştir. Modelin amaç fonksiyonu, en son tamamlanan işin tamamlanma zamanını ( $C_{enb}$ ) enküçüklemektir. Böylece, dolaylı olarak toplam hazırlık süresi de azaltılacak ve işlerin makinelere dengeli atanması sağlanacaktır.

Geliştirilen karma tamsayılı model için kabul edilen varsayımlar aşağıda verilmiştir:

- (1) Tüm işler  $t = 0$  anında işlem görmeye hazırdır.
- (2) Herhangi bir anda, bir makinede en çok bir iş işlem görebilir.
- (3) Çizelgeleme periyodu boyunca tüm makinelere iş atanabilir.
- (4) Tüm işler aynı önceliğe sahiptir.
- (5) Tüm işlerin işlem süreleri ve hazırlık süreleri belirlidir.
- (6) Her kaynaktan (kalıptan) sadece bir adet vardır.

Ele alınan probleme ait kümeler ve indisler aşağıda verilmiştir.

*Kümeler:*

$n \in N = \{1, 2, \dots, /N/\}$  iş kümesi / sıra kümesi

$m \in L = \{1, 2, \dots, /L/\}$  makine kümesi

$g \in R = \{1, 2, \dots, /R/\}$  kaynak kümesi

*İndisler:*

$i, j$  ve  $q \in N$  belirli bir işi göstermek için kullanılan indislerdir.

$l \in L$  belirli bir makineyi göstermek üzere kullanılan indistir.

$k \in N$  iş sırasını göstermek amacıyla kullanılan indistir.

$r \in R$  belirli bir kaynağı göstermek üzere kullanılan indistir.

Ele alınan probleme ait parametreler ve karar değişkenleri aşağıda verilmiştir:

*Parametreler:*

$n$ : iş sayısı

$m$ : makine sayısı

$g$ : kaynak tipi sayısı

$M$ : çok büyük pozitif sayı

$p_j$ :  $j$  işinin işlem süresi

$h_j$ :  $j$  işi ilk sırada ise hazırlık süresi

$s_{ij}$ :  $i$  ve  $j$  işi arasındaki sıraya bağımlı hazırlık süresi

$res_{jr}$ : eğer  $j$  işi  $r$  kaynağı kullanıyorsa 1, kullanmıyorsa 0.

$b_{jl}$ : eğer  $j$  işi  $l$ . makede işlem görebiliyorsa 1, göremiyorsa 0.

*Karar Değişkenleri:*

$C_j$ :  $j$  işinin tamamlanma zamanı

$C_{enb}$ : Son işin tamamlanma zamanı

$a_j$ :  $j$  işinin başlama zamanı

$x_{jkl}$ : eğer  $j$ .iş  $k$ .sırada  $l$ .makineye atandıysa 1, atanmadıysa 0.

$e_{jq}$ : çakışma kısıtları için kullanılan 0-1 karar değişkeni

$w_j$ :  $j$ . işin kaynağı (kalıbı) bekleme süresi

*Amaç Fonksiyonu:*

$$enk \ z = C_{enb}$$

4.1

Modelin amaç fonksiyonu (4.1) son işin tamamlanma zamanının ( $C_{enb}$ ) enküçüklenmesidir.

*Tamamlanma Zamanı ve Bekleme Sürelerinin Hesaplanmasını Sağlayan Kısıtlar:*

$$C_j + M * (1 - x_{jkl}) \geq h_j + p_j + w_j \quad \forall j, k, l \quad k = 1 \quad 4.2$$

$$C_j - M * (1 - x_{jkl}) \leq h_j + p_j + w_j \quad \forall j, k, l \quad k = 1 \quad 4.3$$

Kısıt (4.2) ve (4.3) makinelerin ilk sırasına atanan işlerin tamamlanma zamanlarının hesaplanmasını sağlamaktadır. Herhangi bir makinedeki ilk sıradaki işin tamamlanma zamanı başlangıç hazırlık süresi, işlem süresi ve kaynağı bekleme süresi toplamına eşittir.

$$C_j + M * (2 - x_{jkl} - x_{ik-1l}) \geq C_i + p_j + s_{ij} + w_j \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad 4.4$$

$$C_j - M * (2 - x_{jkl} - x_{ik-1l}) \leq C_i + p_j + s_{ij} + w_j \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad 4.5$$

Kısıt (4.4) ve (4.5), makinelerin ilk sırasına atanmayan işlerin tamamlanma zamanlarının hesaplanmasını sağlamaktadır. Buna göre, bu sıra yer alan bir işin tamamlanma zamanı kendinden önce gelen son işin tamamlanma zamanı, iki iş arasındaki hazırlık süresi, belirtilen işin işlem süresi ve kaynak bekleme süresi toplamına eşittir.

$$C_{enb} \geq C_j \quad \forall j \quad 4.6$$

Son işin tamamlanma zamanının ( $C_{enb}$ ) hesaplanmasını ise kısıt (4.6) sağlamaktadır.

*Atama Kısıtları:*

$$\sum_j x_{jkl} \leq 1 \quad \forall k, l \quad 4.7$$

$$\sum_k \sum_l x_{jkl} = 1 \quad \forall j \quad 4.8$$

Kısıt (4.7) ve kısıt (4.8) sırasıyla, her makinedeki her sıraya yalnızca bir işin atanmasını ve her işin mutlaka bir makinenin bir sırasına atanmasını garanti etmektedir.

*Makine Uygunluk Kısıtları:*

$$b_{jl} \geq x_{jkl} \quad \forall j, k, l \quad 4.9$$

Kısıt (4.9), makine uygunluk kısıtlarıdır ve işlerin yalnızca teknik açıdan uygun olduğu makinelere atanmasını sağlamaktadır.

*Ardışıklık Kısıtları:*

$$\sum_j x_{jkl} - \sum_i x_{ik-1l} \leq 0 \quad \forall k, l, \quad k > 1 \quad 4.10$$

Kısıt (4.10), işlerin sıra atlamadan sıralanmasını garanti etmektedir.

*Başlama Zamanlarının Hesaplanmasını Sağlayan Kısıtlar:*

$$a_j \geq C_i + w_j - M * (2 - x_{jkl} - x_{ik-1l}) \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad 4.11$$

$$a_j \leq C_i + w_j + M * (2 - x_{jkl} - x_{ik-1l}) \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad 4.12$$

$$a_j \leq w_j + M * (1 - x_{jkl}) \quad \forall j, k, l \quad k = 1 \quad 4.13$$

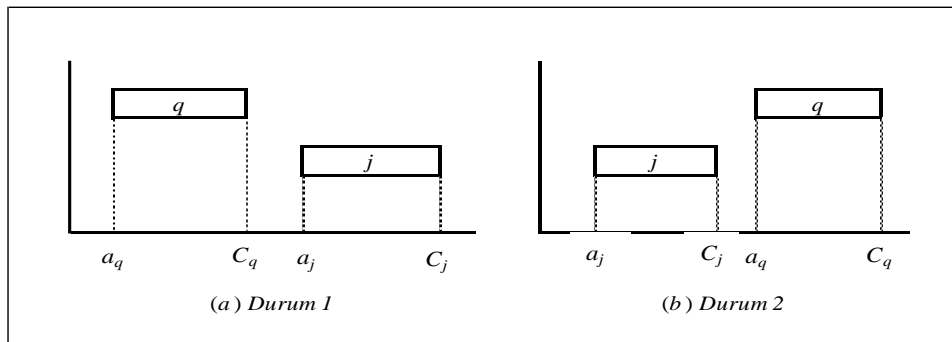
$$a_j \geq w_j - M * (1 - x_{jkl}) \quad \forall j, k, l \quad k = 1 \quad 4.14$$

Kısıt (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14) işlerin başlama zamanlarının hesaplanmasını sağlamaktadır.

*Ortak Kaynak Kullanan İşlerin Çakışmama Kısıtları:*

Aynı kaynağı kullanan  $j$  ve  $q$  işlerinin çakışma durumları incelendiğinde, çakışmanın önlenmesi için gerçekleştirilecek yalnızca iki durum vardır. Bu durumlar Şekil 1’ de gösterilmiştir.

$a_j$  ve  $a_q$ , sırasıyla  $j$  ve  $q$  işlerinin başlama zamanlarını,  $C_j$  ve  $C_q$ ,  $j$  ve  $q$  işlerinin tamamlanma zamanlarını göstermektedir.



**Şekil 1.** Aynı kaynağı kullanan  $j$  ve  $q$  işlerinin çakışmayacağı durumlar

Şekil 1’ de yer alan her iki durum aşağıda ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir:

- (a) Eğer  $q$  işi,  $j$  işi başlamadan tamamlanıyorsa,  $C_q \leq a_j$  dir ve bu işler çakışmamaktadır. Kısıt (4.15), durum (1) için formüle edilmiştir. Durum (1) gerçekleştiğinde,  $e_{jq}$  değeri 0’a eşit olacaktır.



$$C_q \leq a_j + M * e_{jq} \quad \forall j, q, r \quad j < q, \text{ res}_{jr} = 1 \text{ ve } \text{res}_{qr} = 1 \quad 4.15$$

(b) Eğer  $j$  işi  $q$  işi başlamadan tamamlanıyorsa,  $C_j \leq a_q$  dir ve bu işler çakışmaz. Kısıt (4.16), durum (2) için formüle edilmiştir. Durum (2) gerçekleştiğinde,  $e_{jq}$  değeri 1'e eşit olacaktır.

$$C_j \leq a_q + M * (1 - e_{jq}) \quad \forall j, q, r \quad j < q, \text{ res}_{jr} = 1 \text{ ve } \text{res}_{qr} = 1 \quad 4.16$$

*İşaret Kısıtları:*

$$x_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall j, k, l \quad 4.17$$

$$e_{jq} \in \{0,1\} \quad \forall j, q \in N \quad 4.18$$

$$w_j \geq 0 \quad \forall j \in N \quad 4.19$$

$$C_j \geq 0 \quad \forall j \in N \quad 4.20$$

$$a_j \geq 0 \quad \forall j \in N \quad 4.21$$

$$C_{enb} \geq 0 \quad 4.22$$

Kısıt (4.17) - (4.22) karar değişkenlerinin işaret kısıtlarıdır.

Geliştirilen model M olarak adlandırılmıştır. M modelinde,  $n(nm + n + 1)$  adet 0-1 tamsayı karar değişkeni,  $(3n + 1)$  adet pozitif değişken ve  $(4n^3m - 7n^2m + 10nm + n^2g - ng + 2n - m)$  adet kısıt bulunmaktadır.

## 4. 2. Alt Sınır Yöntemleri (Lower Bound Methods)

Önerilen matematiksel modelin başarısını göstermek amacıyla, üç farklı alt sınır bulma yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yöntemler aşağıda ayrı başlıklar halinde sunulmuştur.

### *Alt Sınır 1*

Alt sınır 1, M modelinden çakışma ile ilgili kısıt ve parametrelerin çıkarılması ile oluşturulan aşağıda verilmiş olan AS1 modeli ile elde edilmiştir.

AS1:

$$enk \ z = C_{enb} \quad 4.1$$

$$C_j + M * (1 - x_{jkl}) \geq h_j + p_j \quad \forall j, k, l \quad k = 1 \quad 4.23$$

$$C_j - M * (1 - x_{jkl}) \leq h_j + p_j \quad \forall j, k, l \quad k = 1 \quad 4.24$$

$$C_j + M * (2 - x_{jkl} - x_{ik-1l}) \geq C_i + p_j + s_{ij} \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad 4.25$$

$$C_j - M * (2 - x_{jkl} - x_{ik-1l}) \leq C_i + p_j + s_{ij} \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad 4.26$$

$$\begin{aligned}
C_{enb} &\geq C_j && \forall j && 4.6 \\
\sum_j x_{jkl} &\leq 1 && \forall k, l && 4.7 \\
\sum_k \sum_l x_{jkl} &= 1 && \forall j && 4.8 \\
b_{jl} &\geq x_{jkl} && \forall j, k, l && 4.9 \\
\sum_j x_{jkl} - \sum_i x_{ik-1l} &\leq 0 && \forall k, l, \quad k > 1 && 4.10 \\
x_{jkl} &\in \{0,1\} && \forall j, k, l && 4.17 \\
C_j &\geq 0 && \forall j \in N && 4.20 \\
C_{enb} &\geq 0 && && 4.22
\end{aligned}$$

### Alt Sınır 2

Alt sınır 2, Avalos-Rosales ve diğerleri [23] tarafından geliştirilen yalnızca sıraya bağımlı hazırlık sürelerinin dikkate alındığı özdeş paralel makine çizelgeleme modeli olan AS2 modeli ile elde edilmiştir.

### Karar değişkenleri:

$\mu_{lij}$ :Eğer  $l$ . makinede  $i$ . iş  $j$ . işten önce çizelgelenmişse 1, diğer durumda 0.

$y_{lj}$ :Eğer  $i$ . iş  $l$ . makinede çizelgelenmişse 1, diğer durumda 0.

### AS2:

$$\begin{aligned}
enk \ z &= C_{enb} && && 4.1 \\
\sum_l y_{lj} &= 1 && \forall j && 4.27 \\
y_{lj} &= \sum_{i \neq j} \mu_{lij} && \forall j, l && 4.28 \\
y_{li} &= \sum_{j \neq i} \mu_{lij} && \forall i, l && 4.29 \\
C_{enb} &\geq \sum_j p_j * y_{lj} + \sum_i \sum_j s_{ij} * \mu_{lij} && \forall l && 4.30 \\
\mu_{lij} &\in \{0,1\} && \forall l, i, j && 4.31 \\
y_{lj} &\in \{0,1\} && \forall l, j && 4.32 \\
C_{enb} &\geq 0 && && 4.22
\end{aligned}$$

### Alt Sınır 3

Alt Sınır 3, aşağıdaki algoritma kullanılarak elde edilmiştir.

Adım 1:  $z_j = \text{enk}_i \{s_{ij}\}$  formülünü kullanarak  $z_j$  değerlerini hesapla.

Adım 2:  $z_j$  değerlerini küçükten büyüğe sırala.

Adım 3:  $h_j$  değerlerini  $q_j$  dizisine aktar.

Adım 4:  $q_j$  değerlerini küçükten büyüğe sırala.

Adım 5: Aşağıdaki formülü kullanarak AS3 değerini hesapla.

$$AS3 = \sum_{j=1}^n p_j + \sum_{j=1}^m q_j + \sum_{j=1}^{n-m} z_j$$

Alt sınır değerleri arasındaki ilişkinin  $AS1 \leq AS2 \leq AS3$  olacağı açıktır. Ancak çözüm süreleri arasında da  $t_{AS1} \geq t_{AS2} \geq t_{AS3}$  ilişkisi olduğundan ve büyük boyutlu problemler için AS1 ve AS2'nin hesaplanmasının güç olabileceği düşünülerek üç alt sınır değerinin de kullanılması gerekli görülmüştür.

## 5. DENEYSEL SONUÇLAR (EXPERIMENTAL RESULTS)

Önerilen matematiksel modelin çözüm performansını test etmek amacıyla M modeli GAMS programında kodlanmıştır ve ilk olarak, küçük bir örnek problem yardımı ile sınanmıştır.

Örnek: (5 iş, 2 makine, 2 kaynak) İşlem süreleri ve ilk işlerin hazırlık süreleri sırasıyla  $p_j = \{20, 30, 40, 50, 60\}$ ,  $h_j = \{10, 20, 15, 10, 15\}$ 'dir. İki iş arasındaki sıra bağımlı hazırlık süreleri Tablo 2'de verilmiştir.

**Tablo 2.**  $i$  ve  $j$  İşleri Arasındaki Sıra Bağımlı Hazırlık Süreleri ( $s_{ij}$ )

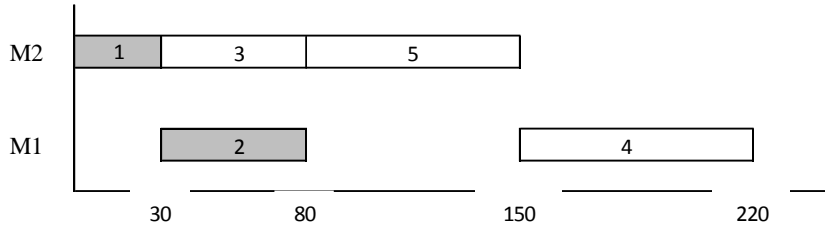
$i/j$	1	2	3	4	5
1	0	90	10	240	240
2	30	0	180	20	180
3	150	200	0	120	10
4	150	200	120	0	120
5	150	200	120	120	0

Örnek problemin makine uygunluk kısıtları izleyen şekilde verilmiştir: iş1, iş3 ve iş5 yalnızca 1.makinede işlem görebilirken, iş2 ve iş4 ise, yalnızca 2.makinede işlem görebilmektedir. İşlerin kullandığı kaynak tipi ( $res_{jr}$ ) parametresi Tablo 3'de verilmiştir.

**Tablo 3.** İşlerin Kullandığı Kaynak Tipi ( $res_{jr}$ )

$j/r$	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1

M modeli, örnek problemin verileri ile GAMS/Cplex çözücüsünde çözülmüştür. 80 adet 0-1 tamsayılı değişken, 16 adet pozitif değişken ve 798 adet kısıttan oluşan modelin eniyi amaç fonksiyonu değeri 19 saniyede 220 olarak bulunmuştur. Elde edilen sıralama için Gantt Şeması Şekil 2'de verilmiştir.



**Şekil 2.** Örnek İçin Gantt Şeması

Şekil 2’de ortak kaynağı kullanan işler aynı renkte gösterilmiştir. Şekilde de görüldüğü üzere, iş2, iş1 tamamlandıktan sonra başlamıştır. Bunun sebebi, bu işlerin aynı kaynağı ortak kullanmalarıdır. Benzer şekilde, iş3, iş4 ve iş5 aynı zamana çizelgelenmiştir.

Problemin validasyon aşaması tamamlandıktan sonra, rassal olarak türetilen farklı boyut ve özellikteki problem setleriyle performansı test edilmiştir. Tüm problemlerin çözümünde 2.8 GHz Intel Core i7 işlemcili 4 GB bellekli bir bilgisayar ve GAMS 24.0.2/Cplex çözücüsü kullanılmıştır.

Özdeş paralel makine çizelgeleme literatüründe, iş sayısı ( $n$ ), küçük boyutlu test problemleri için yaklaşık sekiz ([21], [22]), büyük boyutlu test problemleri için yaklaşık kırktır ([18], [21], [23]). Bu çalışmada da literatürle uyumlu bir şekilde, küçük boyutlu problemler için iş sayısı 8 ve büyük boyutlu problemler için 40 olarak belirlenmiştir. Örneklerin boyut dışındaki diğer parametreleri ve bu parametrelerin örnek türetme aşamasında dikkate alınacak düzeyleri Tablo 4’ de verilmiştir.

**Tablo 4.**  $n=8$  ve  $n=40$  İçin Problem Parametreleri ve Parametrelerin Düzeyleri

Pr.	$n=8$ için parametre düzeyleri	$n=40$ için parametre düzeyleri
$m$	2 ya da 3	2 ya da 6
$g$	2 ya da 5	4 ya da 20
$p_j$	[1,100]	[1,100]
$h_j$	[1,100]	[1,100]
$s_{ij}$	[1,10], Eğer $res_{jr}=1$ ve $res_{ir}=1$	[1,10], Eğer $res_{jr}=1$ ve $res_{ir}=1$
	[1,100], diğer durumda	[1,100], diğer durumda
$rb$	Sıfırdan farklı $b_{jl}$ parametresinin oranı 0,25 ya da 1	Sıfırdan farklı $b_{jl}$ parametresinin oranı 0,25 ya da 1
$gre$	$res_{jr}$ rassal üretiliyorsa (1), bir kalıp ağırlıktaysa	$res_{jr}$ rassal üretiliyorsa (1), bir kalıp ağırlıktaysa
$s$	(2)	(2)

Tablo 4’ de görüldüğü üzere, makine sayısı ( $m$ ), küçük problemler için iki ya da üç, büyük boyutlu problemler için iki ya da altıdır. Literatürde bu makine sayılarını kullanan çalışmalar bulunmaktadır ([9], [21], [23]). Kaynak tipi sayısı ( $g$ ), küçük problemler için iki ya da beş, büyük boyutlu problemler için dört ya da yirmi olarak alınmıştır. İşlem süresi ( $p_j$ ) ve ilk işin hazırlık süresi ( $h_j$ ), [1,100] arasında düzgün dağılıma uyacak şekilde türetilmiştir.  $i$  ve  $j$  işi aynı kalıbı kullanıyorsa sıra bağımlı hazırlık süreleri ( $s_{ij}$ ), [1,10] arasında, bu işler farklı kalıbı kullanıyorsa sıra bağımlı hazırlık süreleri ( $s_{ij}$ ), [1,100] arasında düzgün dağılıma uygun olarak türetilmiştir.  $b_{jl}$  parametresi,  $j$ . iş  $l$ . makinede işlem görebilirse 1 değerine eşittir.  $rb$  parametresi ise sıfırdan farklı  $b_{jl}$  parametresinin sayısının toplam  $b_{jl}$  parametresinin sayısına oranını göstermektedir. Test problemleri türetilirken, bu oran için, 0,25 ve 1 olmak üzere iki düzey belirlenmiştir.  $res_{jr}$  parametresi,  $j$ . iş  $r$ . kalıbı kullanıyorsa 1 değerine eşittir.  $gres$ , türetme şeklini gösteren parametredir. Eğer  $gres=1$  ise  $res_{jr}$  parametresi rassal olarak türetilmektedir. Eğer  $gres=2$  ise, belirli bir kalıbın kullanım oranı fazladır. Diğer bir deyişle, işlerin birçoğu o kalıpta üretilmektedir. Bu parametre düzeyleri

kullanılarak 16 farklı tipte test problemi oluşturulmuştur. Büyük boyutlu test problemlerinin her bir problem tipi için parametre düzeyleri Tablo 5'te verilmiştir. Son olarak, Excel VBA kullanılarak her bir problem tipi için beş adet örnek türetilmiştir. Test problemlerine <https://goo.gl/PDEUVR> adresinden erişmek mümkündür.

**Tablo 5.** *Büyük Boyutlu Test Problemlerinin Parametre Düzeyleri*

<i>tip</i>	<i>m</i>	<i>g</i>	<i>rb</i>	<i>gres</i>	<i>tip</i>	<i>m</i>	<i>g</i>	<i>rb</i>	<i>gres</i>
1	2	4	0,25	1	9	6	4	0,25	1
2	2	4	0,25	2	10	6	4	0,25	2
3	2	4	1	1	11	6	4	1	1
4	2	4	1	2	12	6	4	1	2
5	2	20	0,25	1	13	6	20	0,25	1
6	2	20	0,25	2	14	6	20	0,25	2
7	2	20	1	1	15	6	20	1	1
8	2	20	1	2	16	6	20	1	2

Türetilen tüm test problemleri M modeli ve GAMS/Cplex çözücüsü kullanılarak çözülmüştür. Çözüm süresi, 8000 saniye ile sınırlandırılmıştır. Küçük boyutlu problemlerin çözüm sonuçları Tablo 6'da, büyük boyutlu problemlerin çözüm sonuçları ise Tablo 7'de verilmiştir. Tablo 6 ve 7'nin, ilk sütununda örnek numarası (*no*) yer almaktadır. İkinci ve üçüncü sütunlarda sırasıyla GAMS/Cplex çözücüsüyle elde edilen amaç fonksiyonu değeri (*z*) ve çözüm süresi (*t*) verilmiştir. Dördüncü ve sekizinci sütunlar arasında sırasıyla Alt Sınır 1 değeri (*AS1*) ve çözüm süresi (*t*), Alt Sınır 2 değeri (*AS2*) ve çözüm süresi (*t*) ve Alt Sınır 3 değeri (*AS3*) yer almaktadır. Son üç sütunda ise sırasıyla *AS1*, *AS2* ve *AS3* değerlerinin GAMS ile elde edilen amaç fonksiyonu değerine göre hata yüzdeleri *H1*, *H2* ve *H3* verilmiştir.

**Tablo 6.**  $n=8$  Problemleri İçin  $M$  Modeli ve Alt Sınırlarla Elde Edilen Çözüm Sonuçları

$m=2$											$m=3$										
no	$z$	$t(s)$	AS1	$t(s)$	AS2	$t(s)$	AS3	H1	H2	H3	no	$z$	$t(s)$	AS1	$t(s)$	AS2	$t(s)$	AS3	H1	H2	H3
1-1	416	117,30	344	19,6	344	0,08	312,50	0,21	0,21	0,33	9-1	478	1473,48	277	59,98	268	0,09	219,00	0,73	0,78	1,18
1-2	286	55,26	286	23,1	286	0,03	258,00	0,00	0,00	0,11	9-2	491	5382,81	215	36,02	215	0,03	193,67	1,28	1,28	1,54
1-3	387	226,98	305	23,4	290	0,13	258,00	0,27	0,33	0,50	9-3	264	387,13	171	32,88	171	0,06	141,67	0,54	0,54	0,86
1-4	292	194,19	190	16,1	181	0,09	258,00	0,54	0,61	0,13	9-4	227	373,06	137	25,16	137	0,22	99,67	0,66	0,66	1,28
1-5	367	211,60	291	26,1	285	0,09	263,50	0,26	0,29	0,39	9-5	255	238,01	171	35,16	170	0,13	122,33	0,49	0,50	1,08
2-1	309	128,12	233	23,1	230	0,22	183,50	0,33	0,34	0,68	10-1	308	933,49	166	25,20	166	0,14	135,00	0,86	0,86	1,28
2-2	265	77,10	247	19,4	239	0,11	210,50	0,07	0,11	0,26	10-2	428	5407,21	196	29,14	196	0,13	159,00	1,18	1,18	1,69
2-3	472	333,87	325	29,6	325	0,12	309,50	0,45	0,45	0,53	10-3	335	545,24	211	42,03	210	0,13	176,33	0,59	0,60	0,90
2-4	367	199,82	263	24,6	257	0,11	208,50	0,40	0,43	0,76	10-4	239	147,2	158	22,92	158	0,14	126,67	0,51	0,51	0,89
2-5	420	222,72	292	21,1	290	0,13	253,00	0,44	0,45	0,66	10-5	250	326,78	182	57,13	174	0,09	126,67	0,37	0,44	0,97
3-1	484	389,46	311	25,1	311	0,11	267,50	0,56	0,56	0,81	11-1	367	433,89	258	63,92	258	0,22	209,33	0,42	0,42	0,75
3-2	262	46,88	243	15,7	243	0,11	211,00	0,08	0,08	0,24	11-2	481	3421,9	268	49,59	268	0,22	216,00	0,79	0,79	1,23
3-3	354	193,07	263	22,8	251	0,09	231,50	0,35	0,41	0,53	11-3	448	2853,12	218	37,20	218	0,13	179,67	1,06	1,06	1,49
3-4	381	104,71	369	39,3	369	0,11	277,50	0,03	0,03	0,37	11-4	442	1372,15	254	35,78	254	0,13	223,33	0,74	0,74	0,98
3-5	400	82,88	376	30,5	376	0,08	335,00	0,06	0,06	0,19	11-5	397	684,41	261	44,33	261	0,13	209,33	0,52	0,52	0,86
4-1	338	225,75	254	25,5	245	0,08	218,00	0,33	0,38	0,55	12-1	339	736,61	188	26,98	188	0,11	162,00	0,80	0,80	1,09
4-2	334	58,94	309	20,9	309	0,11	279,00	0,08	0,08	0,20	12-2	310	1179,68	158	25,97	158	0,09	136,67	0,96	0,96	1,27
4-3	363	271,57	239	18,4	239	0,11	215,00	0,52	0,52	0,69	12-3	497	882,44	252	61,14	247	0,13	198,67	0,97	1,01	1,50
4-4	338	95,68	303	27,8	303	0,09	259,00	0,12	0,12	0,31	12-4	335	431,98	233	59,30	227	0,14	187,67	0,44	0,48	0,79
4-5	267	53,02	256	19,5	246	0,09	215,50	0,04	0,09	0,24	12-5	346	1791,36	188	54,80	181	0,23	139,67	0,84	0,91	1,48
5-1	301	63,48	273	23,5	273	0,11	223,00	0,10	0,10	0,35	13-1	154	46,02	154	30,75	154	0,17	124,00	0,00	0,00	0,24
5-2	307	41,73	300	21,3	298	0,11	260,00	0,02	0,03	0,18	13-2	194	87,72	178	46,89	178	0,14	141,00	0,09	0,09	0,38
5-3	318	46,54	318	21,4	318	0,11	265,50	0,00	0,00	0,20	13-3	209	92,07	164	23,58	164	0,13	146,33	0,27	0,27	0,43
5-4	279	49,69	279	24,6	279	0,09	242,50	0,00	0,00	0,15	13-4	175	68,03	162	37,52	154	0,22	126,33	0,08	0,14	0,39
5-5	384	67,61	377	28,4	364	0,13	324,00	0,02	0,05	0,19	13-5	238	57,39	238	51,81	213	0,08	198,00	0,00	0,12	0,20
6-1	299	48,11	299	30,5	299	0,11	250,50	0,00	0,00	0,19	14-1	283	107,05	275	88,34	274	0,23	230,67	0,03	0,55	0,23
6-2	280	80,92	262	19,6	260	0,11	210,00	0,07	0,08	0,33	14-2	254	316,87	182	49,02	182	0,13	131,33	0,40	0,30	0,93
6-3	214	53,31	214	17,9	213	0,09	179,00	0,00	0,00	0,20	14-3	222	112,29	196	43,41	196	0,14	154,67	0,13	0,13	0,44
6-4	349	114,83	271	24,7	271	0,11	234,00	0,29	0,29	0,49	14-4	201	62,49	186	32,67	186	0,16	167,33	0,08	0,08	0,20
6-5	288	44,35	281	18,3	281	0,08	247,50	0,02	0,02	0,16	14-5	240	167,06	209	57,47	191	0,16	164,67	0,15	0,26	0,46
7-1	271	74,46	264	28,1	261	0,11	202,50	0,03	0,04	0,34	15-1	138	41,82	126	16,22	126	0,14	104,33	0,10	0,10	0,32
7-2	286	71,67	266	20,2	257	0,06	239,00	0,08	0,11	0,20	15-2	269	165,89	231	45,97	231	0,22	202,00	0,16	0,16	0,33
7-3	299	67,71	285	20,7	285	0,11	249,50	0,05	0,05	0,20	15-3	180	64,26	166	31,52	166	0,06	140,67	0,08	0,08	0,28
7-4	226	36,80	205	14,3	203	0,08	174,50	0,10	0,11	0,30	15-4	256	159,37	185	25,47	185	0,05	155,33	0,38	0,38	0,65
7-5	301	53,02	293	27,9	274	0,09	230,00	0,03	0,10	0,31	15-5	198	79,78	188	47,19	188	0,13	151,67	0,05	0,05	0,31
8-1	254	61,29	247	21,5	242	0,09	211,00	0,03	0,05	0,20	16-1	237	68,49	228	46,27	228	0,13	185,67	0,04	0,04	0,28
8-2	380	59,66	362	26,3	362	0,11	329,00	0,05	0,05	0,16	16-2	250	95,8	250	51,05	250	0,14	202,67	0,00	0,00	0,23
8-3	356	68,06	356	48,1	342	0,13	291,00	0,00	0,04	0,22	16-3	307	265,3	226	42,39	226	0,22	189,33	0,36	0,36	0,62
8-4	236	25,30	236	18,70	236	0,11	211,50	0,00	0,00	0,12	16-4	269	128,19	228	48,73	228	0,11	190,33	0,18	0,18	0,41
8-5	238	39,95	235	20,3	222	0,09	194,00	0,01	0,07	0,23	16-5	224	104,35	203	47,55	195	0,14	157,67	0,10	0,15	0,42
							ort	0,15	0,17	0,33								ort	0,44	0,46	0,77
							enb	0,56	0,61	0,81								enb	1,28	1,28	1,69
							enk	0,00	0,00	0,11								enk	0,00	0,00	0,20

\* $H1$ ,  $H2$  ve  $H3$  değerleri izleyen şekilde hesaplanmıştır:  $H1=(z-AS1)/AS1$ ,  $H2=(z-AS2)/AS2$ ,  $H3=(z-AS3)/AS3$

Tablo 6'dan da görülebileceği gibi, önerilen matematiksel model ve GAMS/Cplex çözücüsü ile küçük boyutlu test problemlerinin tamamının eniyi çözümlerine ulaşılmıştır. Alt sınırların eniyi çözümlerden sapma oranlarını gösteren hata değerlerinin iki ve üç makinalı test problemleri için ortalama, enbüyük ve enküçük değerleri hesaplanmış ve tablonun sonunda verilmiştir. Bu değerler incelendiğinde Alt Sınır 1 ve 2'nin bazı problemlerin eniyi çözümlerine erişebildiği ancak Alt Sınır 3'ün farkı en az %11'e düşürebildiği görülmektedir. Makine sayısı arttıkça alt sınır değerleri en iyi çözümden uzaklaşmaktadır ve her üç alt sınır yöntemi içinde ortalamada %40'ın üzerine çıkmaktadır.

**Tablo 7.**  $n=40$  Problemleri İçin M Modeli ve Alt Sınırlarla Elde Edilen Çözüm Sonuçları

$m=2$									$m=6$								
no	z	AS1	AS2	t(s)	AS3	H1	H2	H3	no	z	AS1	AS2	AS3	H2	H2	H3	
1-1	2770	1361	1144	0.31	1086,5	1,04	1,42	1,55	9-1	2467	586	389	368,3	3,21	5,34	5,70	
1-2	2230	1319	1128	0.09	1057,0	0,69	0,98	1,11	9-2	-	546	364	348,7	-	-	-	
1-3	2563	1352	1162	0.09	987,0	0,90	1,21	1,60	9-3	2684	652	445	427,3	3,12	5,03	5,28	
1-4	2191	1189	1128	0.08	968,5	0,84	0,94	1,26	9-4	-	585	403	382,2	-	-	-	
1-5	2078	1395	1155	0.09	1045,5	0,49	0,80	0,99	9-5	2419	491	349	327,3	3,93	5,93	6,39	
2-1	2744	1581	1283	0.23	1213,0	0,74	1,14	1,26	10-1	-	534	335	318,0	-	-	-	
2-2	2681	1418	1222	0.11	1163,0	0,89	1,19	1,31	10-2	2931	559	364	345,0	4,24	7,05	7,50	
2-3	2651	1522	1318	0.11	1248,5	0,74	1,01	1,12	10-3	2572	665	442	419,0	2,87	4,82	5,14	
2-4	2317	1501	1166	0.17	1092,0	0,54	0,99	1,12	10-4	2781	521	351	355,7	4,34	6,92	6,82	
2-5	-	1407	1104	0.22	1042,0	-	-	-	10-5	2978	710	400	378,2	3,19	6,45	6,87	
3-1	-	1393	1121	0.94	1083,5	-	-	-	11-1	1293	564	361	341,5	1,29	2,58	2,79	
3-2	2506	1486	1163	0.48	1138,5	0,69	1,15	1,20	11-2	1931	536	401	379,2	2,60	3,82	4,09	
3-3	3615	1504	1190	1.70	1166,0	1,40	2,04	2,10	11-3	1576	522	347	330,0	2,02	3,54	3,78	
3-4	2159	1392	1077	1.63	1032,5	0,55	1,00	1,09	11-4	2337	532	367	351,7	3,39	5,37	5,65	
3-5	2465	1513	1218	0.25	1180,0	0,63	1,02	1,09	11-5	2183	556	379	360,3	2,93	4,76	5,06	
4-1	-	1699	1210	1.20	1188,0	-	-	-	12-1	2589	500	342	318,5	4,18	6,57	7,13	
4-2	2909	1797	1312	0.45	1280,5	0,62	1,22	1,27	12-2	2190	496	342	326,7	3,42	5,40	5,70	
4-3	3150	1572	1268	1.27	1234,5	0,73	1,48	1,55	12-3	2345	514	348	326,3	3,56	5,74	6,19	
4-4	3765	1397	1120	0.95	1093,5	1,70	2,36	2,44	12-4	2322	605	416	394,8	2,84	4,58	4,88	
4-5	2916	1685	1183	5.31	1135,0	0,73	1,46	1,57	12-5	-	682	371	352,5	-	-	-	
5-1	1722	1325	1022	0.45	958,5	0,30	0,68	0,80	13-1	1238	546	374	355,8	1,27	2,31	2,48	
5-2	1619	1349	1093	0.75	1070,0	0,20	0,48	0,51	13-2	1330	566	366	344,8	1,35	2,63	2,86	
5-3	1838	1755	1159	1.41	1122,5	0,05	0,59	0,64	13-3	1436	649	425	403,0	1,21	2,38	2,56	
5-4	1625	1428	1000	0.92	974,5	0,14	0,63	0,67	13-4	963	540	363	344,7	0,78	1,65	1,79	
5-5	2264	1406	1082	0.69	1043,5	0,61	1,09	1,17	13-5	1958	603	422	402,0	2,25	3,64	3,87	
6-1	2264	1406	1119	0.55	1079,5	0,61	1,02	1,10	14-1	-	544	402	382,0	-	-	-	
6-2	2119	1498	1181	0.80	1159,0	0,41	0,79	0,83	14-2	1633	584	402	377,2	1,80	3,06	3,33	
6-3	2189	1369	1065	1.59	1008,0	0,60	1,06	1,17	14-3	1033	688	332	316,3	0,50	2,11	2,27	
6-4	2456	1192	912	0.70	890,0	1,06	1,69	1,76	14-4	1562	640	427	410,5	1,44	2,66	2,81	
6-5	1755	1372	1115	1.05	1094,0	0,28	0,57	0,60	14-5	2029	613	391	371,7	2,31	4,19	4,46	
7-1	2026	1646	1254	2.31	1215,0	0,23	0,62	0,67	15-1	1674	602	405	385,7	1,78	3,13	3,34	
7-2	1831	1478	1179	0.31	1145,5	0,24	0,55	0,60	15-2	1278	592	413	395,8	1,16	2,09	2,23	
7-3	2049	1624	1244	0.91	1209,5	0,26	0,65	0,69	15-3	1405	576	368	348,5	1,44	2,82	3,03	
7-4	2168	1451	1168	1.20	1140,5	0,49	0,86	0,90	15-4	1063	567	363	340,5	0,87	1,93	2,12	
7-5	1947	1388	1085	0.94	1058,0	0,40	0,79	0,84	15-5	1103	633	386	365,5	0,74	1,86	2,02	
8-1	1994	1384	1079	1.50	1044,5	0,44	0,85	0,91	16-1	1868	504	310	293,3	2,71	5,03	5,37	
8-2	1813	1680	1163	1.00	1132,0	0,08	0,56	0,60	16-2	1160	622	395	379,2	0,86	1,94	2,06	
8-3	2417	1438	1108	1.64	1086,0	0,68	1,18	1,23	16-3	1433	535	383	364,2	1,68	2,74	2,93	
8-4	1902	1379	1115	1.02	1077,5	0,38	0,71	0,77	16-4	1540	619	386	366,8	1,49	2,99	3,20	
8-5	2365	1637	1124	1.00	1099,5	0,44	1,10	1,15	16-5	1952	611	387	370,2	2,19	4,04	4,27	
					ort	0,59	1,02	1,11						ort	2,26	3,92	4,17
					enb	1,70	2,36	2,44						enb	4,34	7,05	7,50
					enk	0,05	0,48	0,51						enk	0,50	1,65	1,79

\*H1, H2 ve H3 değerleri izleyen şekilde hesaplanmıştır:  $H1=(z-AS1)/AS1$ ,  $H2=(z-AS2)/AS2$ ,  $H3=(z-AS3)/AS3$

$n=40$  olan test problemleri M modeli kullanılarak çözüldüğünde, problemlerin büyük çoğunluğu için uygun çözümler elde edilmiştir. Tablo 7'den de görülebileceği gibi 80 test probleminin sekizinde GAMS/Cplex çözücüsü, 8000 saniye içinde uygun bir çözüm bulamamıştır. Bu problemlerin özellikleri incelendiğinde, sekiz problemde yedisinde kaynak tipi sayısının daha az ( $g=4$ ) ve beşinde, işlerin çoğunun aynı kaynağı kullandığı ( $gres=2$ ) görülmektedir. Tablo 7 incelendiğinde görülebileceği gibi, her üç alt sınır yöntemiyle büyük boyutlu problemlerin tamamına bir sınır değeri hesaplanabilmiştir. Alt sınır 1 ve GAMS çözümünün % 5 farka kadar yaklaştığı çözümler elde edilebilirken enbüyük sapma ise % 4,34 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 8'de, Tablo 6'da yer alan küçük boyutlu problemlerin  $m$ ,  $g$ ,  $rb$  ve  $gress$  parametrelerinin düzeyleri bazında çözüm süresi ve  $C_{enb}$  değerlerinin ortalamaları verilmiştir. Tablo 8'den de görülebileceği gibi, her makine sayısında, kaynak tipi sayısı ( $g$ ), ikiden beşe çıktığında, hem  $C_{enb}$  hem de çözüm süresi ortalamaları azalmıştır. Aynı şekilde, sıfırdan farklı bjl parametrelerinin oranı ( $rb$ ) 0,25 den 1'e çıktığında ve makine uygunluk kısıtları ortadan kalktığında, çözüm süresi ortalamaları azalmıştır. resjr parametresi bir kalıp

ağırlıklı olarak türetilirse ( $gres=2$ ),  $C_{enb}$  ortalamalarının iki makine olduğu durum için azaldığı görülmektedir. Bu durum, aynı kaynağı kullanan işler arasındaki hazırlık sürelerinin kısa olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca makine sayısı arttığında,  $C_{enb}$  ortalamalarının azaldığı ancak çözüm süresinin ise belirgin şekilde arttığı görülmüştür.

**Tablo 8.** Tablo 6' daki Her Parametre Düzeyi için  $C_{enb}$  ve Çözüm Süreleri Ortalamaları

	$m=2$		$m=3$	
	$\overline{C_{enb}}$	$\bar{t}$	$\overline{C_{enb}}$	$\bar{t}$
$g=2$	335,1	164,45	361,85	1450,10
$g=5$	293,3	58,42	224,9	114,51
$rb=0,25$	330	118,88	272,25	816,57
$rb=1$	318,4	103,94	314,5	748,04
$gres=1$	330,05	109,75	293,05	874,12
$gres=2$	318,35	113,12	293,7	690,49

Son olarak, gerçek hayatta karşılaşılabilecek boyuttaki problemlerin çözülebilirliğini test etmek için  $n=100$  olan bir test problemi türetilmiştir. Parametre düzeyleri,  $m=2$ ,  $g=20$ ,  $rb=1$ ,  $gres=1$  olarak belirlenmiştir. Türetilen problem M modeli ile çözülmüştür. Ancak, 8000 saniye içinde uygun bir çözüm bulunamamıştır.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER (CONCLUSION AND SUGGESTIONS)

Bu çalışmada sıra bağımlı hazırlık süreleri, makine uygunluk kısıtları ve ortak kaynaklar gibi üç önemli işlem karakteristiğinin olduğu özdeş paralel makine çizelgeleme problemi için bir matematiksel model geliştirilmiştir. Geliştirilen modelin amacı, son işin tamamlanma zamanını enküçükmektir. Literatürde bu probleme ait bir çalışmaya erişilemediğinden, test problemi bulmakta mümkün olamamıştır. Bu nedenle test problemleri rassal olarak türetilmiştir. GAMS/Cplex çözücüsü kullanılarak tüm test problemleri çözülmüştür. Üç farklı alt sınır değeri kullanılarak elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Ayrıca küçük problemlerin çözüm sürelerinin ve amaç fonksiyonu değerinin ortalamaları hesaplanarak karşılaştırmalar yapılmıştır. Kaynak tipi sayısının artması problemin çözüm süresini ve  $C_{enb}$  ortalamalarını azaltmıştır. İşlerin her makinede işlem görebildiği durumda daha kısa sürede çözüm elde edilmiştir. Makine sayısının artması ise  $C_{enb}$  ortalamalarını azaltırken çözüm süresinin artmasına neden olmuştur. GAMS/Cplex ile küçük boyutlu problemler için eniyi çizelgeler elde edilmiştir. Büyük boyutlu problemlerin %90'ı için ise 8000 saniyede uygun bir çözüm bulunmuştur.

Gelecek çalışmalarda, gerçek hayatta karşılaşılabilecek boyutta ( $n \geq 100$ ) olan problemlerin çözümüne yönelik olarak farklı sezgisel çözüm yaklaşımları geliştirilebilir. Ele alınan problem farklı amaç fonksiyonları da dahil edilerek çok amaçlı hale getirilebilir. Gerçek hayatta sık karşılaşılan bu problem için birden fazla amaçla çizelgeleme yapılması modeli daha uygulanabilir hale getirecektir. Sözgelimi, enjeksiyonla üretim yapan yan sanayi konumundaki işletmeler için müşteriye işlerin gecikmesiz teslim edilmesi de, önemli amaçlardan birisidir.

### KAYNAK DOSYALAR (SUPPLEMENTARY DATA)

Bu çalışmada kullanılan veriler, <https://goo.gl/PDEUVR> web adresinden indirilebilir.

### KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] New York University Stern School of Business. Introduction.  
<http://www.stern.nyu.edu/om/faculty/pinedo/scheduling/shakhlevich/handout01.pdf>. Yayın tarihi Ocak 30, 2017. Erişim tarihi Mart 3, 2017.



- [2] T. Saraç, Genelleştirilmiş Karesel Çoklu Sırt Çantası Problemi İçin Melez Bir Çözüm Yaklaşımı, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2007.
- [3] J. P. Arnaout, Heuristics for the Maximization of Operating Rooms Utilization Using Simulation. *Simulation*, 86:8-9 (2010) 573-583.
- [4] J. R. M. Torres, M. S. Ferrari, F. G. Solano, Production Scheduling with Sequence Dependent Setups and Job Release Times. *Dyna-Colombia*, 77:163 (2010) 260-269.
- [5] B. K. Kim, Y. D. Kim, Heuristic algorithms for assigning and scheduling flight missions in a military aviation unit. *Computers & Industrial Engineering*, 61:4 (2011) 1309-1317. Doi: 10.1016/j.cie.2011.08.004.
- [6] S. H. Chung, Y.T. Tai, W.L. Pearn, An Effective Scheduling Approach for Maximizing Polyimide Printing Weighted Throughput in Cell Assembly Factories. *IEEE Transactions on Electronics Packaging Manufacturing*, 32:3 (2009) 185-197.
- [7] R. Driessel, L. Moench, Scheduling Jobs on Parallel Machines with Sequence Dependent Setup Times Precedence Constraints and Ready Times Using Variable Neighborhood Search. *International Conference on Computers and Industrial Engineering*, Troyes, FRANCE, 06-09 July 2009.
- [8] X. Li, Y. Farouk, A. Lionel, A Multi Objective Meta-heuristic with A Fuzzy Logic Controller for Solving A Scheduling Problem. *Computational Intelligence: Foundations and Applications: Proceedings of the 9th International FLINS Conference*, Emei, CHINA, 02-04 August 2010.
- [9] S. W. Lin, Z. J. Lee, K. C. Ying, C. C. Lu, Minimization of maximum lateness on parallel machines with sequence-dependent setup times and job release dates. *Computers & Operations Research*, 38:5 (2011) 809-815.
- [10] A. K. Türker, Ç. Sel, Scheduling two parallel machines with sequence-dependent setups and a single server. *Gazi University Journal of Science*, 24:1 (2011) 113-123.
- [11] A. K. Türker, C. Sel, A Hybrid Approach on Single Server Parallel Machines Scheduling Problem with Sequence Dependent Setup Times. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 26:4 (2011) 731-740.
- [12] O. Alagoz, M. Azizoglu, Rescheduling of identical parallel machines under machine eligibility constraints. *European Journal of Operational Research*, 149:3 (2003) 523-532.
- [13] D. T. Eliiyi, M. Azizoglu, A fixed job scheduling problem with machine-dependent job weights. *International Journal of Production Research*, 47:9 (2009) 2231-2256.
- [14] L. H. Su, W. Y. Chang, F. D. Chou, Minimizing maximum lateness on identical parallel machines with flexible resources and machine eligibility constraints. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 56:9-12 (2011) 1195-1204.
- [15] K. Li, Ye Shia, Shan-lin Yanga, Ba-yi Cheng, Parallel machine scheduling problem to minimize the makespan with resource dependent processing times, *Applied Soft Computing*, 11:8 (2011) 5551-5557.
- [16] E. B. Edis, C. Oguz, I. Ozkarahan, Solution Approaches for Simultaneous Scheduling of Jobs and Operators on Parallel Machines. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 27:3 (2012) 527-535.
- [17] R. Ruiz, C. A. Romano, Scheduling unrelated parallel machines with resource-assignable sequence-dependent setup times. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 57:5-8, (2011) 777-794.

- [18] E. B. Edis, I. Ozkarahan, A Combined Integer/Constraint Programming Approach to a Resource Constrained Parallel Machine Scheduling Problem with Machine Eligibility Restrictions. *Engineering Optimization*, 43:2 (2011) 135-157.
- [19] E. B. Edis, C. Oguz, Parallel machine scheduling with flexible resources. *Computers & Industrial Engineering*, 63:2 (2012) 433-447.
- [20] O. Avalos-Rosales, F. Angel-Bello, A. Alvarez, Efficient metaheuristic algorithm and reformulations for the unrelated parallel machine scheduling problem with sequence and machine-dependent setup times. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 76:9-12 (2015) 1705-1718.
- [21] B. Gacias, C. Artigues, P. Lopez, Parallel machine scheduling with precedence constraints and setup times. *Computers & Operations Research*, 37:12 (2010) 2141-2151.
- [22] C. L. Chen, C. L. Chen, Hybrid meta-heuristics for unrelated parallel machine scheduling with sequence-dependent setup times. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 43:1-2 (2009) 161-169.
- [23] R. Nessah, C. Chengbin, F. Yalaoui, An exact method for  $P_m/sds/\sum_{i=1}^n c_i$  problem. *Computers & Operations Research*, 34:9 (2007) 2840-2848.