SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received
02-03-2017
Kabul/Accepted
05-09-2017

Doi
10.16984/saufenbilder.295879

Sıralı küme örneklemesi altında farklı bootstrap yöntemleri ile yığın ortalaması için güven aralığı

Nurdan Yeniay [*1] , Yaprak Arzu Özdemir[2], Fikri Gökpınar[3]

ÖZ

Sıralı Küme Örneklemesi, ilgili değişken bakımından örnekleme birimlerini ölçmenin maliyet veya zaman bakımından zor olduğu durumlarda Basit Tesadüfi Örnekleme'ye göre daha etkin bir örnekleme yöntemidir. Güven aralığı ve hipotez testi gibi istatistiksel çıkarımlar yapılırken dağılım varsayımına ihtiyaç duyulur. Dağılım bilgisinin olmadığı veya istatistiksel çıkarımın mümkün olmadığı durumlarda ise yeniden örnekleme teknikleri kullanılabilir. Bootstrap yöntemi de bunlardan biridir. Bu çalışmada, Sıralı Küme Örneklemesinde yığın ortalamasına ilişkin güven aralığı üç farklı bootstrap yöntemi kullanılarak ele alınmıştır. Bu yöntemler kullanılarak güven aralığı kapsama olasılıkları ve güven aralığı genişlikleri farklı dağılımlar kullanılarak simülasyon yoluyla elde edilmiştir. Simetrik olmayan dağılımlara göre simetrik dağılımlar için elde edilen güven aralığı kapsama olasılıklarının belirlenen güvenilirlik düzeyine daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Sıralı Küme Örneklemesi, Bootstrap, Monte Carlo Simülasyonu

Confidence interval for the population mean using different bootstrap methods under ranked set sampling

ABSTRACT

Ranked Set Sampling is a more effective sampling method than Simple Random Sampling when it is difficult to measure sampling units in terms of cost or time. When statistical inferences such as confidence interval and hypothesis testing are performed, distributional assumption is required. Resampling techniques can be used when there is no distributional information or it is imposible to make statistical inference. The bootstrap method is one of these techniques. In this study, the confidence interval for the population mean in Ranked Set Sampling are considered by using three different bootstrap techniques. By using these methods, confidence interval coverage probabilities and confidence interval widths are obtained by simulation using different distributions. It is observed that confidence interval coverage probabilities under symmetrical distributions are closer to the nominal level than confidence interval coverage probabilities under nonsymmetrical distributions..

Keywords: Ranked Set Sampling, Bootstrap, Monte Carlo Simulation

---

[*] Sorumlu Yazar / Corresponding Author
[1] Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü,Beşevler, Ankara – nurdanyeniay@gazi.edu.tr
[2] Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü,Beşevler, Ankara - yaprak@gazi.edu.tr
[3] Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü,Beşevler, Ankara - fikri@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Sıralı Küme Örneklemesi (SKÖ), örnekleme birimlerini ölçmenin zor veya maliyetli olduğu ancak bu birimleri yüksek maliyet ve zaman gerektirmeyen yöntemlerle sıralamanın kolay olduğu durumlarda tercih edilen etkin bir örnekleme tekniğidir. SKÖ, McIntyre [1] tarafından meralardaki ortalama ürün miktarını tahmin etmek amacıyla Basit Tesadüfi Örnekleme (BTÖ)'ye alternatif olarak önerilmiştir. Takahasi ve Wakimato [2] ise bu örnekleme yönteminin matematiksel teorisini çalışmışlardır. Aynı örnek çapı kullanılarak yığın ortalamasına ilişkin SKÖ ile elde edilen yansız tahmin edicinin BTÖ ile elde edilen yansız tahmin ediciden daha küçük varyansa sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Dell ve Clutter [3] sıralama hatasının olduğu durumda yığın ortalaması için tahmin edicinin etkinliğinde azalma olduğunu göstermişlerdir. SKÖ altında yığın parametrelerinin etkin tahmin edicilerini elde etmek mümkündür. Örneğin Shen [4], log-normal dağılım için yığın ortalamasının tahminini SKÖ altında inceleyerek, yığına ilişkin değişim katsayısı bilindiğinde BTÖ' ye göre elde edilen tahmin ediciden daha etkin bir tahmin edici elde etmiştir. Bhoj ve Absanullah [5] ise genelleştirilmiş geometrik dağılıma ilişkin yığın parametrelerini SKÖ altında tahmin etmiştir. Bu çalışmada, örnek seçimi SKÖ' ye göre yapıldığında μ ve σ^2 parametrelerinin en iyi doğrusal tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Ayrıca SKÖ altında yığın parametreleri için güven aralığı ve hipotez testi çalışmaları da yapılmıştır. Örneğin sonlu bir yığının kuantilleri için parametrik olmayan güven aralığı Deshpande ve diğ. [6] tarafından oluşturulmuştur. Muttlak ve diğ. [7] lojistik dağılımın konum ve ölçek parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicisinin, farklı pivotlar kullanarak güven aralığını oluşturmuşlardır. SKÖ ile elde edilen güven aralıklarının BTÖ' ye göre elde edilen güven aralıklarından daha dar ve daha küçük standart hataya sahip olduğunu göstermişlerdir.

Albatineh ve diğ. [8] yığının değişim katsayısı için güven aralığını SKÖ altında incelemişlerdir. Dört farklı güven aralığı için güven aralığı kapsama olasılıklarını ve güven aralığı genişliklerini simülasyon çalışması ile elde etmişlerdir. Aissia ve diğ. [9], SKÖ ve BTÖ altında Pareto dağılımının şekil parametresi için oluşturulan güven aralıklarını kapsama olasılıkları ve güven aralığı genişlikleri bakımından karşılaştırmışlardır. SKÖ altında elde edilen güven aralığı kapsama olasılıklarının BTÖ altında elde edilen kapsama olasılıklarından daha yüksek olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca iki yığın ortalamasının farkı için SKÖ altında yeni bir test istatistiği Özdemir ve diğ. [10] tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada normallik varsayımının sağlandığı ve sağlanmadığı durumlar için testin I. tip hatası ve testin gücü Monte Carlo simülasyon çalışması ile incelenmiş ve SKÖ ile elde edilen güç değerlerinin BTÖ ile elde edilen güç değerlerinden daha yüksek olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda sıralama hatasının olduğu durumda da önerilen test istatistiğinin performansının BTÖ'ye göre elde edilen test istatistiğinin performansından daha iyi olduğuna işaret edilmiştir.

Parametre hakkında istatistiksel sonuç çıkarımı yaparken, kullanılacak istatistiğin dağılım bilgisine ihtiyaç duyulur. Birçok durumda bu istatistiğin kesin dağılımı belirlenemeyebilir. Bu gibi durumlarda asimptotik yöntemlere başvurulur. Ancak örnek çapı küçük olduğunda, testin veya güven aralığının güvenilirliği düşeceğinden asimptotik yöntemleri kullanmak yerine yeniden örnekleme teknikleri tercih edilebilir. Bootstrap tekniği yeniden örnekleme yöntemleri içinde en bilinen yöntemlerden biridir. Bootstrap ilk olarak 1979 yılında Bradley Efron [11] tarafından tanıtılmıştır. Bu yöntem eldeki örnekten yeniden örnekler üreterek kullanılan istatistiğin yapay dağılımını oluşturmaya dayanmaktadır. Temel bootstrap yöntemi herhangi bir dağılım varsayımı gerektirmediğinden istatistiksel sonuç çıkarımı için oldukça kullanışlıdır.

Bootstrap yöntemi, orijinal veri setinden yeniden örnekleme yapan bir yöntemdir. Bootstrap yönteminde gözlenen veri seti içinden yerine koyarak her biri aynı çapta B tane örnek seçilerek ilgili istatistik hesaplanır. Hesaplanan istatistikler bir bootstrap dağılımı oluşturur. Bootstrap yöntemi güven aralıklarının tahmininde, tahmin edicinin standart hatasının tahmininde ve hipotez testlerinde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir [11].

SKÖ yöntemi birçok durumda küçük örnek çapları ile çalışmaktadır. Bu nedenle dağılım bilgisinin olmadığı durumlarda istatistiksel sonuç çıkarımı için asimptotik yöntemler yerine Bootstrap gibi yeniden örnekleme yöntemlerinin kullanılması uygun olacaktır. Hui ve diğ. [12], Bootstrap yöntemini kullanarak yığın ortalamasının SKÖ altında regresyon tahmin edicisi ile güven aralığını oluşturmuşlardır. Ayrıca simülasyon çalışması ile doğrusallık varsayımı altında önerilen yöntemin performansının oldukça iyi olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Modarres ve diğ. [13], SKÖ altında yığın ortalaması için kapsama olasılıklarını, Bootstrap ile üç farklı örnek seçme yöntemi kullanılarak incelenmişlerdir. Bu çalışmada kapsama olasılıkları Ramberg-Schmeiser-Tukey (RST) λ dağılım ailesi için elde edilmiştir. Ancak bu dağılım ailesi literatürde yaygın olarak kullanılan bir dağılım ailesi değildir. Bu nedenle kapsama olasılıklarını güncel hayatta daha sık karşılaşılan dağılımlar kullanarak elde etmek daha uygun olacaktır. Bunun yanında güven aralığı ile ilgili çalışmalarda sadece kapsama olasılıkları değil, aralık genişlikleri de oldukça önemli bir parametredir.

Bu çalışmanın amacı, SKÖ'de bootstrap yöntemi kullanılarak bilinen farklı dağılımlar altında, yığın ortalaması için güven aralığının kapsama olasılıklarını ve genişliklerini incelemektir. Çalışmanın 2. Bölümünde SKÖ' de güven aralığı kavramı açıklanarak SKÖ altında bootstrapa dayalı örnek seçim yöntemleri tanıtılacaktır. 3. Bölümde kapsama olasılıkları ve genişliklerine dayalı Monte Carlo simülasyon çalışması sonuçlarına yer verilecektir. Ayrıca 4. Bölümde bootstrapa dayalı örnek seçim yöntemleri kullanılarak gerçek veri seti üzerinden güven aralıkları oluşturulacaktır. Son bölümde ise sonuçlar ve tartışma yer alacaktır.

2. YIĞIN ORTALAMASI İÇİN SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNE DAYALI GÜVEN ARALIĞI (CONFIDENCE INTERVAL BASED ON RANKED SET SAMPLING FOR POPULATION MEAN)

Bu bölümde, öncelikle SKÖ ile elde edilen örnekten yığın ortalaması için oluşturulacak güven aralığı ele alınacaktır. Daha sonra SKÖ altında bootstrap örnek seçme yöntemleri tanıtılacaktır. Ancak bu yöntemler verilmeden önce SKÖ'de örnek seçimi verilecektir.

SKÖ'de örnek seçim işlemi iki aşamada gerçekleşir. Birinci aşamada ilgili sonlu yığından *m* çaplı *m* küme BTÖ ile seçilir. Daha sonra görsel yolla ya da kesin ölçüm gerektirmeyen bir yöntemle birimler ilgili değişken bakımından küçükten büyüğe sıralanır. İkinci aşamada ilk kümeden ilk sıradaki birim, ikinci kümeden ikinci sıradaki birim ve bu şekilde devam edilerek *m*. kümeden *m*. sıradaki birim alınıp ilgilenilen değişken bakımından istenilen hassaslıktaki bir ölçümle ölçülerek sıralı küme örneği oluşturulur. Bu işlem *r* kez tekrarlandığında $n=mr$ çaplı sıralı küme örneği elde edilir. Elde edilen sıralı küme örneği Tablo 1'de verildiği gibidir.

Tablo 1. $n=mr$ çaplı sıralı küme örneği

	Tekrar			
Küme	**1**	**2**	**…**	***r***
1	$X_{(1)1}$	$X_{(1)2}$	…	$X_{(1)r}$
2	$X_{(2)1}$	$X_{(2)2}$	…	$X_{(2)r}$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
m	$X_{(m)1}$	$X_{(m)2}$	…	$X_{(m)r}$

Burada $X_{(i)j}$; i.küme ve j. tekrardaki X değişkeni bakımından i. sıra istatistiğini ifade eder. Buna göre sıralı küme örneğinden elde edilecek yığın ortalamasına ilişkin tahmin edici

$$\bar{X}_{SKÖ} = \frac{1}{mr}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} X_{(i)j} \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Bu tahmin edicinin beklenen değeri

$$E(\bar{X}_{SKÖ}) = \mu_x \qquad (2)$$

olacaktır. Burada μ_x; X değişkeni bakımından yığın ortalamasıdır.

$\bar{X}_{SKÖ}$ 'ye ilişkin varyans ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Var(\bar{X}_{SKÖ}) = \frac{\sigma^2}{mr} - \frac{1}{m^2 r}\sum_{i=1}^{m}(\mu_{i:m} - \mu_x)^2 \qquad (3)$$

Burada, $\mu_{i:m}$; *m* çaplı kümedeki *i.* sıra istatistiğinin ortalamasını, σ^2; yığın varyansını ifade eder.

SKÖ'de yığın ortalaması hakkında istatistiksel sonuç çıkarımı yapmak için kullanılacak tahmin edici Eş(1)' de verildiği gibidir. Yığın ortalaması için hipotez testi ve güven aralığı gibi istatistiksel sonuç çıkarımı yapılırken Eş(1)' deki tahmin edicinin dağılım varsayımına ihtiyaç duyulur. Bununla birlikte Eş(1)' de verilen ifade sıra istatistiklerinin bir fonksiyonu olduğundan bu ifadenin dağılımını elde etmek birçok durumda oldukça zor hatta imkansızdır. Örnek çapının yüksek olduğu durumlarda istatistiksel sonuç çıkarımı için asimptotik yaklaşımlar kullanılabilir. Yığın ortalaması için SKÖ altında asimptotik güven aralığı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\bar{X}_{SKÖ} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\bar{X}_{SKÖ})}) \qquad (4)$$

Burada $Z_{1-\alpha/2}$; standart normal dağılım için $1-\alpha/2$ 'ye karşılık gelen tablo değeridir.

SKÖ' de örnek seçim işlemi gerçekleştirilirken, özellikle sıralamanın görsel yolla yapılması durumunda, sıralamadaki hatayı azaltmak için küçük örnek çapları ile çalışılması tercih edilir. Bu nedenle yukarıda açıklanan asimptotik güven aralığının kullanılması uygun olmayacaktır. Bu durumda, Bootstrap gibi yeniden örnekleme yöntemleri kullanılabilir. Modarres ve diğ. [13] tarafından verilen SKÖ'de Bootstrap yöntemine dayalı üç farklı örnek seçim yöntemi aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir. 1. yöntem Tablo 1'de verilen sıralı küme örneğinin her bir satırından yerine koyarak rastgele tekrar sayısı kadar örnek seçme temeline dayanır. Bu yöntemin algoritması aşağıda verildiği gibidir:

1. Yöntem

1. $X^*_{(i)1},...X^*_{(i)r}$ Bootstrap örneğini oluşturmak için Tablo 1'deki *i*. satırdan (*i=1,2,…,m*) *r* tane birim $\frac{1}{r}$ olasılıkla yerine koyarak rastgele seçilir.

2. $\{X^*_{(i)j}\}$ bootstrap sıralı küme örneğini oluşturmak için Adım 1**,** *i=1,2,..,m* için *m* kez tekrar edilir.

Modarres ve diğ. [13] tarafından önerilen 2.Yöntem ise Tablo 1'de verilen sıralı küme örneğinden yerine koyarak küme çapı kadar rastgele örnek seçilip, örneğin küçükten büyüğe sıralanması temeline dayanır. Diğer bir deyişle sıra istatistikleri arasından yerine koyarak rastgele örnekler elde edilir. Bu yöntemin algoritması aşağıdaki gibi ifade edilir.

2. Yöntem

1. Tablo 1'teki sıralı küme örneğindeki her bir birime $\frac{1}{mr}$ olasılığı atanır.

2.Tablo 1'teki birimlerden rastgele *m* birim seçilir. Bu birimler $y_1, y_2,...y_m \overset{i.i.d.}{\sim} F_n$ olmak üzere, birimler küçükten büyüğe sıralanır. $y_{(1)} \le y_{(2)} \le ... \le y_{(m)}$ olmak üzere $X^*_{(i)1} = y_{(i)}$ elde edilir.

3. Adım 2 *i=1,2,…,m* kez tekrar edilir.

4. Adım 2 ve Adım 3, $\{X^*_{(i)j}\}$ yi elde etmek için *r* kez tekrar edilir.

Bu yöntemin 1. yöntemden farklılığı, seçilen örneğin bir kez daha sıralanmasıdır.

3. yöntemde ise Tablo 1'de verilen sıralı küme örneğinin her bir satırından yerine koyarak rastgele bir örnek seçilir ve seçilen örnekler küçükten büyüğe sıralanır.

3. Yöntem

1. Tablo 1'deki *i*. satırdan $y^*_1, y^*_2,..., y^*_m$ örneğini oluşturmak için $\frac{1}{r}$ olasılıkla bir birim seçilir. (*i=1,2,…,m*)

2. Seçilen $y^*_1, y^*_2,..., y^*_m$ örneği küçükten büyüğe sıralanır. Buna göre $y^*_1 \le y^*_2 \le ... \le y^*_m$ ve $X^*_{(i)1} = y^*_{(i)}$ oluşturulur.

3. Adım 1 ve Adım 2 $X^*_{(1)1}, X^*_{(2)1},..., X^*_{(m)1}$ örneğini elde etmek için *i=1,2,…,m* kez tekrar edilir.

4. Adım 1-3, $\{X^*_{(i)j}\}$ yi elde etmek için *r* kez tekrar edilir.

SKÖ altında yığın ortalaması hakkında sonuç çıkarımı yapmak için kullanılabilecek bootstrap yöntemlerinin güven aralığındaki performanslarını incelemek amacıyla Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması sonucunda verilen üç farklı bootstrap örnek seçim algoritmasına dayalı olarak oluşturulan güven aralığı şu şekilde elde edilmiştir.

1. Yığın dağılımından *m* küme çaplı *r* tekrara sahip SKÖ örneği seçilir.

2.Bölüm 2'de tanıtılan yöntemler ile bootstrap sıralı küme örnekleri elde edilir.

3. Oluşturulan herbir örnek için örnek ortalaması istatistiği hesaplanır. Hesaplanan ortalamalar küçükten büyüğe sıralanır ve B bootstrap tekrarını göstermek üzere sıralı verinin (B+1)*α 'ya karşılık gelen değeri alt sınır, (B+1)*(1-α)' ya karşılık gelen değeri üst sınır olarak belirlenir.

4. Tüm bootstrap tekrarları için alt ve üst sınır belirlenerek güven aralığı kapsama olasılıkları ve ortalama güven aralığı genişliği elde edilir.

Yukarıda açıklanan bootstrap yöntemlerini daha detaylı olarak incelemek bakımından izleyen bölümde simülasyon çalışmasına yer verilecektir.

3. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI (SIMULATION STUDY)

Bu simülasyon çalışmasında, ikinci bölümde ele alınan SKÖ'de Bootstrapa dayalı örnek seçim yöntemleri kullanılarak, yığın ortalaması için güven aralığı kapsama olasılıkları ve güven aralığı genişlikleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçları karşılaştırmak amacıyla asimptotik yaklaşıma göre de sonuçlar elde edilmiştir. Küme çapı *m=2,3,4,5,6* ve tekrar sayısı *r=2,4,6,8,10* olmak üzere, simetrik dağılımlar için Normal ve Uniform simetrik olmayanlar için ise Gamma ve Ters Gauss dağılımları kullanılmıştır. Bu dağılımlar için aynı çarpıklık değerini elde etmek üzere farklı parametreler kullanılmıştır. Dağılımlara ilişkin parametreler ve çarpıklık değerleri Tablo 2' deki gibidir.

Tablo 2. Kullanılan dağılımlara ait parametreler ve çarpıklık değerleri

Dağılımlar	**Parametre**	**Çarpıklık değerleri**
Normal (μ, σ^2)	(0,1)	0
Uniform *(a,b)*	(0,1)	0
Gamma (α, β)	(0.1,1)	6.32
	(0.5,1)	2.82
	(1,1)	2
	(4,1)	1
Ters Gauss (μ, λ)	(1,0.22)	6.32
	(1,1.13)	2.82
	(1,2.27)	2
	(1,9.09)	1

Tablo 2'de verilen dağılımlar kullanılarak Bootstrap tekrar sayısı (B) 2000 ve genel tekrar sayısı (T) 10000 olmak üzere örnekler elde edilmiştir. Yığın ortalaması için oluşturulan tüm güven aralıklarında güvenilirlik düzeyi %95 olarak alınmıştır. Simülasyon çalışması MATLAB programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kullanılan program kodları ek (1)'de yer almaktadır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3-12 'de verilmiştir.

Tablo 3'te Normal dağılıma göre elde edilen güven aralığı kapsama olasılıkları ve güven aralığı genişlikleri Tablo 5 ve Tablo 9'da en yüksek çarpıklık değerine sahip Gamma (0.1,1) ve Ters Gauss (1,0.22) dağılımına ait sonuçlar yer almaktadır. Burada çarpıklık değeri fazla iken, küme çapı m ve tekrar sayısı r'nin küçük olduğu durumda Ters Gauss dağılımından elde edilen güven aralığı kapsama olasılıkları yüksek olmakla birlikte, m ve r arttıkça Gamma ve Ters Gauss dağılımları için elde edilen güven aralığı kapsama olasılıkları birbirine yaklaşmaktadır. Bununla birlikte Gamma dağılımı ile elde edilen güven aralığı genişliğinin Ters Gauss dağılımı ile elde edilen güven aralığı genişliğine göre oldukça dar olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca Tablo 6 ve Tablo 10, Tablo 7 ve Tablo 11, Tablo 8 ve Tablo 12 çiftleri aynı çarpıklık değerine sahip dağılımların sonuçlarını içermektedir. Bu tablolar incelendiğinde ise çarpıklık değeri azaldıkça Gamma ve Ters Gauss dağılımları için güven aralığı kapsama olasılıkları birbirine oldukça yaklaşmaktadır. Bunun yanında dağılımın çarpıklığı azaldıkça; güven aralığı genişliği bakımından incelendiğinde ise Ters Gauss dağılımı için elde edilen güven aralığı genişliğinin Gamma dağılımı ile elde edilen güven aralığı genişliğine göre oldukça daraldığı gözlemlenmiştir.

verilmiştir. Tablo 3'ten görüldüğü gibi küme çapı m=2 iken 1. yöntem, 2. yöntem ve asimptotik yöntemle hemen hemen aynı sonucu vermekte olup, 3. yöntem oldukça düşük kapsama olasılığı vermiştir. Bununla birlikte, küçük tekrar sayılarında tüm yöntemlerin nominal güvenilirlik düzeyi %95'ten oldukça uzak sonuçlar verdiği görülmektedir. Özellikle 3. yöntem kapsama olasılığı bakımından nominal güvenilirlik düzeyinden oldukça düşük sonuçlar vermiştir. Küme çapı artarken özellikle küçük tekrar sayılarında asimptotik yöntemin güvenilirlik düzeyi çok fazla artmazken, 1. ve 2. yöntemin güvenilirlik düzeyinin nominal güvenilirlik düzeyine oldukça yaklaştığı görülmektedir. 1. ve 2. yöntemin güvenilirlik düzeyinin asimptotik yönteme göre daha yüksek olduğu ve bu farklılığın % 5'e yakın olduğu bkz. (m=5, r=2) gözlemlenmiştir. Ayrıca bu farklılığın tekrar sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir.

Tablo 4 Uniform dağılımına ait sonuçları içermektedir. Uniform dağılım için de normal dağılıma benzer şekilde m=2 için 1. ve 2. yöntemin asimptotik yönteme yakın sonuçlar verdiği, fakat küme çapı arttıkça özellikle düşük tekrar sayılarında 1. ve 2. yöntemin daha yüksek güvenilirliğe sahip olduğu söylenebilir.

Özetle, incelenen simetrik dağılımlarda küme çapı ve tekrar sayısı arttıkça özellikle 1. ve 2. yöntemin kapsama olasılıklarının %95 düzeyine yaklaştığı görülmektedir. Bununla birlikte, kullanılan yöntemler arasında 3. yöntemin uygun sonuçlar vermediği görülmektedir.

Tablo 5-8 incelendiğinde, Gamma dağılımının şekil parametresi çok düşük olduğu zaman(0.1 ve 0.5), tüm yöntemlerin kapsama olasılıklarının beklenildiği gibi oldukça düşük sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte şekil parametresi arttıkça diğer bir deyişle dağılım simetrikleştikçe kapsama olasılıkları artmakta ve %95'e yakınsamaktadır. Şekil parametresi arttıkça tüm yöntemlerin kapsama olasılıkları artmasına rağmen, özellikle küçük tekrar sayılarında 1. ve 2. yöntemin asimptotik yönteme göre oldukça yüksek kapsama olasılığına sahip olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin Gamma(1,1) için m=6 ve r=2 alındığında 1. ve 2. yöntemin kapsama olasılıklarının %88'den fazla, asimptotik yöntemin ise %83 civarında olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla aralarında %5'den fazla farklılık olduğu söylenebilir.

Tablo 9-12 Ters Gauss dağılımına ait sonuçları içermektedir. Ters Gauss dağılımı için, çarpıklık katsayısı düştükçe, diğer bir deyişle şekil parametresi arttıkça, kapsama olasılıkları tüm yöntemler için artmaktadır. Bununla birlikte özellikle küçük tekrar sayılarında 1. ve 2. yöntemin asimptotik yönteme göre daha yüksek güvenilirlik düzeyine sahip olduğu söylenebilir. 3. yönteme göre güven aralığı kapsama olasılıkları oldukça düşüktür. Güven aralığı genişlikleri ise diğer yöntemlere göre elde edilen güven aralığı genişliklerinden daha yüksektir. Bu anlamda 3. yöntemin iyi bir bootstrap örnek seçim yöntemi olduğu söylenemez.

Tablo 3. Normal (0,1) dağılıma ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2.yöntem**		**3.yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.8502	1.4246	0.8340	1.3833	0.8314	1.3833	0.6487	0.8741
	r=4	0.9072	1.0613	0.9065	1.0613	0.9048	1.0619	0.8347	0.8603
	r=6	0.9209	0.8922	0.9200	0.8892	0.9204	0.8891	0.8657	0.7532
	r=8	0.9301	0.7836	0.9282	0.7805	0.9284	0.7806	0.8840	0.6747
	r=10	0.9361	0.7035	0.9365	0.7031	0.9361	0.7032	0.8933	0.6125
m=3	*r=2*	0.8756	1.0117	0.8973	1.0821	0.8970	1.0821	0.6727	0.6318
	r=4	0.9156	0.7881	0.9274	0.7935	0.9263	0.7935	0.9263	0.5937
	r=6	0.9230	0.6391	0.9303	0.6536	0.9303	0.6536	0.8477	0.5136
	r=8	0.9305	0.5591	0.9342	0.5686	0.9342	0.5686	0.8615	0.4569
	r=10	0.9385	0.5036	0.9434	0.5104	0.9429	0.5105	0.8828	0.4153
m=4	*r=2*	0.8817	0.7866	0.9155	0.8744	0.9169	0.8743	0.6758	0.4920
	r=4	0.9177	0.5974	0.9369	0.6294	0.9366	0.6292	0.8191	0.4473
	r=6	0.9351	0.4980	0.9428	0.5150	0.9429	0.5150	0.8555	0.3857
	r=8	0.9344	0.4371	0.9393	0.4488	0.9400	0.4487	0.8591	0.3439
	r=10	0.9386	0.3940	0.9421	0.4022	0.9426	0.4020	0.8637	0.3122
m=5	*r=2*	0.8926	0.6458	0.9310	0.7314	0.9319	0.7316	0.6906	0.4015
	r=4	0.9219	0.4908	0.9418	0.5223	0.9404	0.5223	0.7982	0.3576
	r=6	0.9281	0.4108	0.9411	0.4276	0.9423	0.4276	0.8284	0.3088
	r=8	0.9418	0.3595	0.9470	0.3705	0.9464	0.3703	0.8472	0.2737
	r=10	0.9348	0.3241	0.9417	0.3316	0.9437	0.3316	0.8399	0.2489
m=6	*r=2*	0.8873	0.5465	0.9350	0.6319	0.9366	0.6314	0.6817	0.3362
	r=4	0.9241	0.4174	0.9441	0.4466	0.9437	0.4466	0.7894	0.2973
	r=6	0.9289	0.3492	0.9430	0.3650	0.9432	0.3650	0.8148	0.2561
	r=8	0.9391	0.3057	0.9452	0.3162	0.9458	0.3160	0.8401	0.2272
	r=10	0.9412	0.2758	0.9469	0.2826	0.9485	0.2827	0.8425	0.2062

Tablo 4. Uniform (0,1) dağılıma ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1. yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.8561	0.4198	0.8489	0.4204	0.8467	0.4200	0.6520	0.2472
	r=4	0.9054	0.3107	0.9115	0.3121	0.9099	0.3121	0.8315	0.2445
	r=6	0.9237	0.2574	0.9302	0.2590	0.9305	0.2590	0.8700	0.2124
	r=8	0.9273	0.2248	0.9348	0.2266	0.9341	0.2266	0.8828	0.1894
	r=10	0.9317	0.2023	0.9404	0.2329	0.9415	0.2031	0.8908	0.1721
m=3	*r=2*	0.8859	0.2945	0.9115	0.3214	0.9115	0.3211	0.6698	0.1757
	r=4	0.9116	0.2176	0.9305	0.2288	0.9298	0.2288	0.8152	0.1615
	r=6	0.9268	0.1815	0.9402	0.1876	0.9407	0.1875	0.8500	0.1400
	r=8	0.9327	0.1586	0.9440	0.1625	0.9432	0.1626	0.8618	0.1242
	r=10	0.9358	0.1427	0.9454	0.1458	0.9465	0.1457	0.8682	0.1127
m=4	*r=2*	0.8965	0.2265	0.9350	0.2553	0.9355	0.2553	0.6732	0.1344
	r=4	0.9208	0.1686	0.9469	0.1802	0.9464	0.1802	0.8008	0.1193
	r=6	0.9294	0.1402	0.9434	0.1464	0.9433	0.1465	0.8198	0.1025
	r=8	0.9370	0.1225	0.9505	0.1267	0.9494	0.1266	0.8368	0.0907
	r=10	0.9377	0.1104	0.9466	0.1133	0.9457	0.1133	0.8419	0.0823
m=5	*r=2*	0.8941	0.1841	0.9371	0.2111	0.9376	0.2110	0.6743	0.1069
	r=4	0.9279	0.1376	0.9491	0.1478	0.9487	0.1478	0.7857	0.0934
	r=6	0.9325	0.1144	0.9467	0.1202	0.9485	0.1203	0.8079	0.0799
	r=8	0.9364	0.0999	0.9492	0.1038	0.9492	0.1038	0.8213	0.0707
	r=10	0.9361	0.0902	0.9445	0.0927	0.9450	0.0937	0.8234	0.0641
m=6	*r=2*	0.8961	0.1545	0.9479	0.1800	0.9477	0.1800	0.6598	0.0879
	r=4	0.9231	0.1159	0.9489	0.1253	0.9486	0.1253	0.7635	0.0760
	r=6	0.9284	0.0967	0.9501	0.1018	0.9495	0.1018	0.7864	0.0650
	r=8	0.9345	0.0847	0.9487	0.0879	0.9491	0.0879	0.8029	0.0575
	r=10	0.9432	0.0761	0.9543	0.0785	0.9546	0.0785	0.8146	0.0521

Tablo 5. Gamma (0.1,1) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.4785	0.2784	0.4779	0.2270	0.4783	0.2282	0.3803	0.1606
	r=4	0.6073	0.2614	0.6138	0.2339	0.6141	0.2338	0.5955	0.2214
	r=6	0.6772	0.2371	0.6886	0.2129	0.6870	0.2129	0.6732	0.2061
	r=8	0.7163	0.2204	0.7243	0.2024	0.7246	0.2025	0.7133	0.1963
	r=10	0.7453	0.2055	0.7578	0.1915	0.7578	0.1945	0.7496	0.1868
m=3	*r=2*	0.5432	0.2363	0.5787	0.2362	0.5783	0.2368	0.4309	0.1455
	r=4	0.6712	0.2201	0.6862	0.2068	0.6855	0.2075	0.6599	0.1905
	r=6	0.7281	0.2006	0.7416	0.1887	0.7417	0.1897	0.7206	0.1776
	r=8	0.7618	0.1858	0.7736	0.1767	0.7717	0.1768	0.7536	0.1680
	r=10	0.7929	0.1723	0.8086	0.1654	0.8093	0.1667	0.7932	0.1583
m=4	*r=2*	0.5838	0.2077	0.6377	0.2211	0.6360	0.2218	0.4696	0.1336
	r=4	0.7085	0.1959	0.7284	0.1902	0.7283	0.1902	0.6858	0.1709
	r=6	0.7618	0.1733	0.7758	0.1674	0.7766	0.1673	0.7456	0.1541
	r=8	0.7966	0.1592	0.8082	0.1545	0.8091	0.1546	0.7835	0.1442
	r=10	0.8245	0.1492	0.8353	0.1456	0.8357	0.1455	0.8150	0.1371
m=5	*r=2*	0.6091	0.1869	0.6682	0.2066	0.6691	0.2067	0.4866	0.1240
	r=4	0.7331	0.1747	0.7565	0.1738	0.7562	0.1738	0.7075	0.1525
	r=6	0.7927	0.1555	0.8101	0.1533	0.8101	0.1533	0.7730	0.1382
	r=8	0.8116	0.1416	0.8263	0.1394	0.8270	0.1394	0.7974	0.1280
	r=10	0.8220	0.1360	0.8354	0.1290	0.8400	0.1290	0.8090	0.1170
m=6	*r=2*	0.6320	0.1727	0.7021	0.1967	0.7019	0.1967	0.5138	0.1171
	r=4	0.7509	0.1559	0.7749	0.1573	0.7752	0.1573	0.7133	0.1356
	r=6	0.8053	0.1405	0.8240	0.1400	0.8233	0.1400	0.7811	0.1245

	r=8	0.8267	0.1279	0.8378	0.1272	0.8382	0.1272	0.8000	0.1151
	r=10	0.8444	0.1181	0.8560	0.1173	0.8544	0.1173	0.8217	0.1074

Tablo 6. Gamma (0.5,1) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	r=2	0.7105	0.8509	0.7004	0.7740	0.7011	0.7695	0.5405	0.5015
	r=4	0.8260	0.7169	0.8206	0.6897	0.8267	0.6801	0.7710	0.5972
	r=6	0.8542	0.6201	0.8518	0.5970	0.8505	0.5945	0.8190	0.5396
	r=8	0.8793	0.5700	0.8842	0.5592	0.8792	0.5560	0.8525	0.5090
	r=10	0.8878	0.5100	0.8880	0.4900	0.8870	0.4916	0.8624	0.4554
m=3	r=2	0.7575	0.6732	0.7910	0.7133	0.7908	0.7133	0.5736	0.4190
	r=4	0.8254	0.5516	0.8381	0.5519	0.8389	0.5520	0.7614	0.4550
	r=6	0.8692	0.4773	0.8781	0.4761	0.8774	0.4760	0.8217	0.4084
	r=8	0.8780	0.4199	0.8872	0.4184	0.8871	0.4184	0.8374	0.3662
	r=10	0.8926	0.3822	0.8964	0.3804	0.8969	0.3805	0.8557	0.3371
m=4	r=2	0.7674	0.5484	0.8186	0.6083	0.8182	0.6084	0.5915	0.3516
	r=4	0.8456	0.4465	0.8622	0.4576	0.8627	0.4575	0.7742	0.3630
	r=6	0.8792	0.3883	0.8899	0.3932	0.8905	0.3930	0.8231	0.3265
	r=8	0.8625	0.3446	0.8994	0.3467	0.8998	0.3467	0.8416	0.2946
	r=10	0.9030	0.3146	0.9069	0.3157	0.9088	0.3158	0.8541	0.2718
m=5	r=2	0.7871	0.4630	0.8389	0.5260	0.8392	0.5259	0.6046	0.3015
	r=4	0.8603	0.3812	0.8825	0.3977	0.8820	0.3976	0.7803	0.3062
	r=6	0.8785	0.3261	0.8934	0.3341	0.8926	0.3340	0.8142	0.2701
	r=8	0.9009	0.2923	0.9096	0.2969	0.9108	0.2968	0.8405	0.2468
	r=10	0.9038	0.2639	0.9107	0.2668	0.9098	0.2667	0.8488	0.2239
m=6	r=2	0.7907	0.4037	0.8487	0.4697	0.8490	0.4698	0.6112	0.2649
	r=4	0.8584	0.3321	0.8834	0.3511	0.8827	0.3511	0.7670	0.8641
	r=6	0.8892	0.2856	0.9015	0.2944	0.9012	0.2945	0.8164	0.2333
	r=8	0.9053	0.2548	0.9158	0.2605	0.9163	0.2606	0.8412	0.2117
	r=10	0.9125	0.2312	0.9175	0.2350	0.9171	0.2349	0.8535	0.1937

Tablo 7. Gamma (1,1) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	r=2	0.7728	1.3192	0.7682	1.2507	0.7687	1.2530	0.5801	0.7827
	r=4	0.8444	1.0481	0.8495	1.0169	0.8487	1.0167	0.7844	0.8612
	r=6	0.8781	0.8881	0.8793	0.8682	0.8792	0.8679	0.8356	0.7635
	r=8	0.8848	0.7880	0.8879	0.7739	0.8878	0.7743	0.8497	0.6930
	r=10	0.8982	0.7148	0.8997	0.7036	0.8996	0.7036	0.8662	0.6367
m=3	r=2	0.8094	0.9796	0.8372	1.0404	0.8381	1.0397	0.6215	0.6108
	r=4	0.8673	0.7733	0.8817	0.7861	0.8796	0.7856	0.7872	0.6208
	r=6	0.8871	0.6592	0.8961	0.6638	0.8949	0.6637	0.8265	0.5503
	r=8	0.8983	0.5827	0.9032	0.5860	0.9045	0.5861	0.8479	0.4965
	r=10	0.9117	0.5313	0.9145	0.5326	0.9141	0.5325	0.8624	0.4577
m=4	r=2	0.8190	0.7787	0.8572	0.8623	0.8571	0.8621	0.6299	0.4948
	r=4	0.8779	0.6247	0.8986	0.6501	0.8963	0.6502	0.7876	0.4928
	r=6	0.8943	0.5281	0.9045	0.5387	0.9054	0.5387	0.8253	0.4305
	r=8	0.9101	0.4681	0.9177	0.4750	0.9174	0.4752	0.8481	0.3884
	r=10	0.9151	0.4247	0.9217	0.4296	0.9221	0.4296	0.8591	0.3561
m=5	r=2	0.8277	0.6569	0.8752	0.7461	0.8764	0.7459	0.6337	0.4193
	r=4	0.8763	0.5243	0.9005	0.5511	0.8999	0.5512	0.7820	0.4065

	r=6	0.9020	0.4449	0.9133	0.4589	0.9137	0.4589	0.8181	0.3565
	r=8	0.9119	0.3933	0.9210	0.4016	0.9207	0.4016	0.8411	0.3199
	r=10	0.9198	0.3559	0.9242	0.3617	0.9246	0.3616	0.8470	0.2922
m=6	*r=2*	0.8310	0.5692	0.8881	0.6576	0.8890	0.6575	0.6458	0.3646
	r=4	0.8851	0.4516	0.9070	0.4807	0.9058	0.4806	0.7765	0.3452
	r=6	0.9051	0.3845	0.9201	0.3984	0.9210	0.3985	0.8227	0.3030
	r=8	0.9163	0.3378	0.9230	0.3469	0.9243	0.3469	0.8408	0.2700
	r=10	0.9233	0.3064	0.9288	0.3125	0.9281	0.3126	0.8501	0.2473

Tablo 8. Gamma (4,1) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.8202	2.7868	0.8124	2.7013	0.8134	2.6999	0.6200	1.6913
	r=4	0.8875	2.1281	0.8889	2.0954	0.8903	2.0954	0.8201	1.7212
	r=6	0.9045	1.7793	0.9037	1.7641	0.9030	1.7646	0.8534	1.5088
	r=8	0.9155	1.5700	0.9169	1.5593	0.9159	1.5580	0.8709	1.3596
	r=10	0.9251	1.4155	0.9238	1.4074	0.9232	1.4071	0.8875	1.2408
m=3	*r=2*	0.8560	2.0105	0.8781	2.1401	0.8793	2.1404	0.6621	1.2537
	r=4	0.9023	1.5382	0.9138	1.5790	0.9137	1.5784	0.8117	1.2001
	r=6	0.9169	1.2862	0.9247	1.3109	0.9245	1.3111	0.8462	1.0453
	r=8	0.9252	1.1306	0.9299	1.1466	0.9287	1.1465	0.8623	0.9360
	r=10	0.9297	1.0234	0.9340	1.0336	0.9345	1.0337	0.8775	0.8552
m=4	*r=2*	0.8709	1.5785	0.9074	1.7484	0.9084	1.7484	0.6724	0.9903
	r=4	0.9046	1.2107	0.9210	1.2721	0.9225	1.2726	0.8067	0.9198
	r=6	0.9179	1.0123	0.9287	1.0456	0.9284	1.0457	0.8331	0.7966
	r=8	0.9238	0.8938	0.9328	0.9145	0.9338	0.9146	0.8520	0.7149
	r=10	0.9341	0.8050	0.9368	0.8200	0.9368	0.8199	0.8626	0.6500
m=5	*r=2*	0.8700	1.3028	0.9142	1.4789	0.9141	1.4794	0.6708	0.8154
	r=4	0.9027	0.9986	0.9258	1.0629	0.9255	1.0625	0.7931	0.7415
	r=6	0.9203	0.8400	0.9320	0.8726	0.8326	0.8729	0.8230	0.6443
	r=8	0.9303	0.7391	0.9393	0.7609	0.9380	0.7611	0.8495	0.5757
	r=10	0.9346	0.6672	0.9409	0.6824	0.9424	0.6825	0.8565	0.5243
m=6	*r=2*	0.8739	1.1049	0.9195	1.2720	0.9183	1.2716	0.6688	0.6865
	r=4	0.9147	0.8548	0.9349	0.9136	0.9349	0.9138	0.7890	0.6226
	r=6	0.9247	0.7164	0.9350	0.7483	0.9350	0.7483	0.8181	0.5386
	r=8	0.9298	0.6323	0.9367	0.6517	0.9375	0.6519	0.8312	0.4816
	r=10	0.9304	0.5705	0.9371	0.5843	0.9356	0.5845	0.8404	0.4380

Tablo 9. Ters Gauss (1,0.22) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.5706	2.0530	0.5721	1.7832	0.5714	1.7815	0.4293	1.1972
	r=4	0.6742	1.8087	0.67	1.6558	0.6787	1.6555	0.6479	1.5268
	r=6	0.7307	1.6407	0.7383	1.5149	0.7365	1.5147	0.7123	1.4290
	r=8	0.7506	1.4775	0.7615	1.3806	0.7612	1.3807	0.7441	1.3163
	r=10	0.7709	1.3898	0.7821	1.3096	0.7822	1.3103	0.7660	1.2584
m=3	*r=2*	0.6117	1.6730	0.6469	1.7016	0.6458	1.7050	0.4769	1.0444
	r=4	0.7064	1.4714	0.7202	1.4096	0.7209	1.4096	0.6693	1.2553
	r=6	0.7578	1.3473	0.7671	1.2889	0.7682	1.2881	0.7316	1.1803
	r=8	0.7953	1.2244	0.8052	1.1766	0.8046	1.1768	0.7746	1.0942
	r=10	0.8071	1.1307	0.8180	1.0916	0.8170	1.0913	0.7958	1.0254
m=4	*r=2*	0.6344	1.4478	0.6827	1.5549	0.6826	1.5556	0.5040	0.9376

	r=4	0.7437	1.3104	0.7604	1.2878	0.7594	1.2879	0.7012	1.1222
	r=6	0.7759	1.1527	0.7902	1.1227	0.7910	1.1230	0.7455	1.0097
	r=8	0.8122	1.0478	0.8234	1.0238	0.8227	1.0237	0.7901	0.9356
	r=10	0.8289	0.9553	0.8413	0.9353	0.8400	0.9349	0.8070	0.8631
m=5	*r=2*	0.6414	1.2605	0.6965	1.3921	0.6954	1.3909	0.5035	0.8374
	r=4	0.7928	1.1415	0.7772	1.1455	0.7765	1.1450	0.7017	0.9773
	r=6	0.7945	1.0122	0.8089	1.0012	0.8076	1.0011	0.7622	0.8856
	r=8	0.8296	0.9232	0.8343	0.9087	0.8338	0.9098	0.7937	0.8204
	r=10	0.8360	0.8439	0.8467	0.8327	0.8463	0.8326	0.8100	0.7593
m=6	*r=2*	0.6624	1.1270	0.7291	1.2814	0.7282	1.2815	0.5289	0.7599
	r=4	0.7658	1.0298	0.7919	1.0494	0.7915	1.0494	0.7145	0.8809
	r=6	0.8057	0.9045	0.8220	0.9032	0.8210	0.9028	0.7659	0.9028
	r=8	0.8273	0.8223	0.8415	0.8164	0.8416	0.8168	0.7974	0.7277
	r=10	0.8504	0.7590	0.8608	0.7542	0.8605	0.7543	0.8200	0.6795

Tablo 10. Ters Gauss (1,1.13) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.7414	1.1762	0.7376	1.0941	0.7360	1.0916	0.5684	0.7022
	r=4	0.8111	0.9549	0.8157	0.9140	0.8170	0.9143	0.7519	0.7922
	r=6	0.8491	0.8168	0.8493	0.7906	0.8499	0.7907	0.8074	0.7067
	r=8	0.8681	0.7302	0.8683	0.7108	0.8703	0.7111	0.8388	0.6468
	r=10	0.8800	0.6636	0.8824	0.6483	0.8819	0.6482	0.8520	0.5960
m=3	*r=2*	0.7683	0.8911	0.8025	0.8357	0.8013	0.9356	0.5941	0.5578
	r=4	0.8454	0.7204	0.8551	0.7211	0.8542	0.7212	0.7734	0.5892
	r=6	0.8652	0.6250	0.8727	0.6230	0.8740	0.6228	0.8094	0.5311
	r=8	0.8803	0.5486	0.8856	0.5462	0.8862	0.5465	0.8363	0.4750
	r=10	0.8946	0.5027	0.8991	0.5001	0.8989	0.5000	0.8564	0.4409
m=4	*r=2*	0.7884	0.7189	0.8264	0.7886	0.8265	0.7886	0.6057	0.4658
	r=4	0.835	0.5881	0.8696	0.6047	0.8699	0.6048	0.7697	0.4752
	r=6	0.8786	0.5090	0.8873	0.5156	0.8873	0.5157	0.8135	0.4262
	r=8	0.8883	0.4498	0.8956	0.4528	0.8943	0.4530	0.8314	0.3829
	r=10	0.9034	0.4103	0.9067	0.4119	0.9084	0.4120	0.8517	0.3532
m=5	*r=2*	0.7931	0.6117	0.8428	0.6912	0.8442	0.6915	0.6122	0.3960
	r=4	0.8586	0.4981	0.8787	0.5191	0.8797	0.5191	0.7683	0.3978
	r=6	0.8845	0.4298	0.8962	0.4392	0.8949	0.4393	0.8157	0.3549
	r=8	0.8931	0.3788	0.9037	0.3848	0.9026	0.3847	0.8332	0.3176
	r=10	0.9070	0.3479	0.9116	0.3514	0.9098	0.3515	0.8493	0.2951
m=6	*r=2*	0.7927	0.5308	0.8504	0.6099	0.8490	0.6098	0.6167	0.3462
	r=4	0.8583	0.4343	0.8823	0.4572	0.8848	0.4571	0.7642	0.3434
	r=6	0.8882	0.3757	0.8995	0.3865	0.9015	0.3866	0.8113	0.3067
	r=8	0.9056	0.3315	0.9121	0.3383	0.9107	0.3383	0.8375	0.2746
	r=10	0.9085	0.3035	0.9148	0.3079	0.9155	0.3078	0.8453	0.2542

Tablo 11. Ters Gauss (1,2.27) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.7803	0.8697	0.7795	0.8268	0.7799	0.8271	0.5894	0.5239
	r=4	0.8533	0.6948	0.8563	0.6740	0.8544	0.6741	0.7862	0.5693
	r=6	0.8794	0.5881	0.8799	0.5748	0.8802	0.5749	0.8326	0.5046
	r=8	0.9005	0.5205	0.9013	0.5121	0.9016	0.5120	0.8628	0.4575
	r=10	0.9039	0.4717	0.9029	0.4655	0.9033	0.4655	0.8720	0.4202
m=3	*r=2*	0.8045	0.652	0.8342	0.6812	0.8349	0.6806	0.6177	0.4041

	r=4	0.8771	0.5154	0.8908	0.5243	0.8906	0.5246	0.7984	0.4136
	r=6	0.8948	0.4382	0.9021	0.4415	0.9016	0.4415	0.8314	0.3657
	r=8	0.9028	0.3829	0.9078	0.3846	0.9076	0.3845	0.8498	0.3254
	r=10	0.9053	0.3485	0.9117	0.3497	0.9110	0.3496	0.8602	0.2998
m=4	*r=2*	0.8250	0.5213	0.8600	0.5730	0.8617	0.5735	0.6398	0.3321
	r=4	0.8753	0.4096	0.8940	0.4251	0.8957	0.4252	0.7880	0.3222
	r=6	0.9027	0.3498	0.9137	0.3573	0.9138	0.3572	0.8270	0.2856
	r=8	0.9115	0.3097	0.9198	0.3146	0.9211	0.3147	0.8502	0.2575
	r=10	0.9169	0.2780	0.9227	0.2811	0.9233	0.2811	0.8615	0.2330
m=5	*r=2*	0.8310	0.4302	0.8754	0.4850	0.8739	0.4851	0.6418	0.2746
	r=4	0.8826	0.3463	0.9055	0.3628	0.9065	0.3626	0.7902	0.2685
	r=6	0.9035	0.2928	0.9149	0.3017	0.9139	0.3016	0.8263	0.2348
	r=8	0.9132	0.2599	0.9172	0.2648	0.9185	0.2649	0.8383	0.2119
	r=10	0.9213	0.2341	0.9245	0.2376	0.9257	0.2377	0.8527	0.1925
m=6	*r=2*	0.8289	0.3713	0.8824	0.4273	0.8830	0.4273	0.6287	0.2374
	r=4	0.8913	0.2995	0.9094	0.3170	0.9100	0.3169	0.7815	0.2296
	r=6	0.9029	0.2537	0.9159	0.2628	0.9150	0.2629	0.8112	0.2006
	r=8	0.9160	0.2237	0.9260	0.2293	0.9260	0.2294	0.8372	0.1795
	r=10	0.9251	0.2030	0.9371	0.2070	0.9329	0.2069	0.8534	0.1645

Tablo 12. Ters Gauss (1,9.09) dağılımına ilişkin güven aralığı kapsama olasılığı ve genişliği

		Asimptotik yöntem		**1.yöntem**		**2. yöntem**		**3. yöntem**	
		Kapsama Olasılığı	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**	**Kapsama Olasılığı**	**Genişliği**
m=2	*r=2*	0.8286	0.4624	0.8205	0.4466	0.8197	0.4475	0.6341	0.2818
	r=4	0.8875	0.3518	0.8839	0.3459	0.8836	0.3460	0.8139	0.2845
	r=6	0.9078	0.2951	0.9075	0.2931	0.9069	0.2929	0.8571	0.2506
	r=8	0.9203	0.2601	0.9198	0.2585	0.9195	0.2585	0.8799	0.2256
	r=10	0.9202	0.2341	0.9224	0.2330	0.9214	0.2329	0.8820	0.2054
m=3	*r=2*	0.8547	0.3323	0.8792	0.3536	0.8786	0.3535	0.6559	0.2079
	r=4	0.8977	0.2535	0.9117	0.2609	0.9105	0.2611	0.8059	0.1980
	r=6	0.9136	0.2149	0.9203	0.2185	0.9201	0.2185	0.8438	0.1751
	r=8	0.9202	0.1875	0.9255	0.1900	0.9258	0.1900	0.8599	0.1554
	r=10	0.9350	0.1701	0.9366	0.1718	0.9376	0.1719	0.8806	0.1424
m=4	*r=2*	0.8683	0.2626	0.9057	0.2907	0.9040	0.2906	0.6697	0.1659
	r=4	0.9074	0.2011	0.9281	0.2111	0.9274	0.2111	0.8089	0.1531
	r=6	0.9225	0.1686	0.9314	0.1738	0.9305	0.1739	0.8386	0.1331
	r=8	0.9267	0.1478	0.9325	0.1513	0.9348	0.1513	0.8579	0.1185
	r=10	0.9299	0.1337	0.9356	0.1361	0.9375	0.1361	0.8577	0.1082
m=5	*r=2*	0.8706	0.2160	0.9172	0.2454	0.9167	0.2453	0.6740	0.1355
	r=4	0.9059	0.1655	0.9296	0.1756	0.9286	0.1757	0.7926	0.1231
	r=6	0.9261	0.1396	0.9379	0.1448	0.9386	0.1449	0.8327	0.1073
	r=8	0.9342	0.1230	0.9401	0.1261	0.9413	0.1261	0.8492	0.0960
	r=10	0.9350	0.1108	0.9398	0.1133	0.9398	0.1133	0.8495	0.0874
m=6	*r=2*	0.8719	0.1843	0.9226	0.2122	0.9223	0.2122	0.6661	0.1152
	r=4	0.9108	0.1422	0.9326	0.1517	0.9319	0.1516	0.7878	0.1039
	r=6	0.9222	0.1193	0.9378	0.1244	0.9390	0.1245	0.8187	0.0899
	r=8	0.9288	0.1050	0.9391	0.1082	0.9392	0.1082	0.8353	0.0802
	r=10	0.9328	0.0945	0.9399	0.0968	0.9400	0.0968	0.8425	0.0728

4. UYGULAMA (APPLICATION)

Bu bölümde 2. Bölümde tanıtılan bootstrap örnek seçim yöntemleri ve asimptotik yöntem kullanılarak gerçek bir veri seti üzerinde güven aralıkları oluşturulacaktır. Bunun için Keban Baraj Gölü'nde yaşayan Alburnus mossulensis Heckel 1843 balık türünün otolit biyometrisi verileri kullanılmıştır [14]. Balığın yaşının tespit edilmesi için otolit kemiğinin çıkarılıp gerekli bazı ölçümlerin laboratuvar ortamında yapılması gerekmektedir. Bu durum hem balığın ölmesine sebep olmakta hem de maliyeti artırarak zaman kaybına sebep olmaktadır. Ancak balık yaşının balık boyu ve balık ağırlığı ile yüksek derecede ilişkili olduğu bilinmektedir [14]. Bu anlamda balık boyu değişkeni dikkate alınarak balığın yaşı tahmin edilebilir.

Uygulama verisi olarak balıkların boyu ilgilenilen değişken değeri olarak alınmıştır. Küme çapı $m=4$ ve tekrar sayısı $r=4$ olacak şekilde SKÖ ile elde edilen örnek Tablo 13'te verilmiştir.

Tablo 13. $m=4,r=4$ olan Alburnus mossulensis Heckel 1843 balık türünün boy (mm.) verileri

115	125	121	125
123	127	125	123
127	124	128	127
133	128	138	137

Oluşturulan SKÖ örneğinden faydalanarak 2. Bölümde tanıtılan üç farklı bootstrap örnek seçim yöntemi ve asimptotik yöntem kullanılarak güven aralığı alt ve üst sınırları bulunmuştur. Güven aralığı genişlikleri üst sınır ile alt sınır farkı alınarak oluşturulmuştur. Sonuçlar Tablo 14'te verilmiştir.

Tablo 14. Bootstrap örnek seçim yöntemlerine ve asimptotik yönteme dayalı güven aralığı alt- üst sınırları ve genişlikleri

	Alt sınır	Üst sınır	Genişlik
Asimptotik Yöntem	123.8921	126.9826	3.0908
1. Yöntem	124.1250	126.8125	2.6825
2. Yöntem	123.7500	127.2500	3.3750
3. Yöntem	124.3125	126.6250	2.3125

Uygulama çalışması tek bir örnek üzerinden yapıldığı için güven aralığı kapsama olasılıklarına yer verilememiştir. Tablo 14'te sadece güven aralığı alt- üst sınırları ve genişlikleri yer almaktadır. Güven aralığı genişliklerine bakıldığında en dar aralığın 3. Yönteme ait olduğu bununla birlikte 1. Yöntemin asimptotik yöntem ve 2. Yöntemden daha dar bir aralığa sahip olduğu söylenebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER (RESULTS AND SUGGESTIONS)

Bu çalışmada SKÖ altında farklı Bootstrap yöntemleri kullanılarak bilinen farklı simetrik ve simetrik olmayan dağılımlar altında yığın ortalaması için güven aralığı kapsama olasılığı ve güven aralığı genişliği incelenmiştir. Yapılan simülasyon çalışmasında simetrik dağılımlar için özellikle 1. ve 2. yöntemin küçük küme çapında asimptotik yöntemle benzer, küme çapı arttığında ise asimptotik yönteme göre daha yüksek güvenilirliğe sahip sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Simetrik olmayan dağılımlarda ise özellikle çarpıklık katsayısının fazla olduğu durumda tüm yöntemlerin kapsama olasılıklarının oldukça düşük olduğu, çarpıklık katsayısı azaldıkça ise (dağılım simetrikleştikçe) tüm yöntemlerin güvenilirlik düzeyinin yükseldiği görülmüştür. Ayrıca aynı çarpıklık katsayısına sahip Gamma ve Ters Gauss dağılımlarının güven aralığı kapsama olasılıkları ve genişliklerine bakıldığında, Gamma dağılımının *m* küme çapı arttıkça daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. İleriki çalışmalarda bootstrap seçim yöntemleri düzenlenerek daha yüksek kapsama olasılığı veren yöntemler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] McIntyre, G.A.,"A method of unbiased selective sampling using ranked sets". Australian Journal of Agricaltural Research, vol. 3, 385-390, 1952.

[2] Takahasi, K.;Wakimoto, K.,"On Unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering". Annals of The Institute of Statistical Mathematics, vol. 21, 249-255, 1968.

[3]
ll,D.R.; Clutter, J.L.,"Ranked set sampling theory with order statistics background". Biometrics, vol. 28, 545-555, 1972

[4] Shen, W. H.,"On estimation of a log-normal mean using a ranked set sample". Sankhya, vol. 54,B :323-333, 1994.

[5] Bhoj, D.S.; Absanullah, M.,"Estimation of parameters of the generalized geometric distribution using ranked set sampling". Biometrics, 52: 685-694, 1996.

[6] Deshpande, JV; Frey, J.; Özturk, Ö.,"Nonparametric ranked-set sampling confidence intervals for quantiles of a finite population". Environmental and Ecological Statistics, vol. 13, no. 1, pp. 25-40, 2006.

[7] Muttlak, H. A.; Abu-Dayyeh, W. A.; Al-Sawi, E.; Al-Momani. "Confidence interval estimation of the location and scale parameters of the logistic distribution using pivotal method". Journal of Statistical Computaion and Simulation. vol. 81 Issue: 4 Pages: 391-409, 2011.

[8] Albatineh,A.N.; Golam Kibria, B.M.; Meredith L Wilcox; Bashar Zogheib, "Confidence interval estimation for the population coefficient of variation using ranked set sampling: a simulation study". Journal of Applied Statistics, 41:4, 733-751, 2014.

[9] Aissa, A.O.; Ibrahim, K; Abu Dayyeh, W; Zin, W.Z.W. ''On the comparison of the interval estimation of the pareto parameter under simple random sampling and ranked set sampling'', 2nd ISM Conference 2014, Malaysia.

[10] Özdemir, Y.A.; Ebegil, M; Gökpınar, F.,"A test statistic based on ranked set sampling for two normal means" Journal of Communications in Statistics - Simulation and Computation (in press).2016.

[11] Efron, B. Bootstrap methods: Another look at Jackknife, Institute Of Mathematical Statistics, 7, 1-26, 1979.

[12] Hui, T.P.; Modarres, R; Zheng, G.,"Bootstrap confidence interval estimation of mean via ranked set sampling linear regression" Journal of the Statistical Computaion and Simulation. vol. 75 Issue:7 Pages:543-553,2005.

[13] Modarres, R.; Hui, T.P.; Zheng, G.,"Resampling methods for ranked set samples", Computational Statistics and Data Analysis, 51, 1039-1050,2006.

[14] Bütün, S., "Keban Baraj Gölü'nde Yaşayan Alburnus mossulensis Heckel, 1843'de Otolit Biyometrisi" Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.

Ek (1): Kullanılan algoritmaların MATLAB program kodları

Asimptotik Yöntem

```
function [diff, alt,
ust]=asymtotic_tekgrup_ga(x1,alfa)
    [n r]=size(x1);
    y2=mat2vec(x1);
y3=mean(y2);
z=std(y2)^2;
    y4=mean(x1,2);
    y5 =(y4-y3);
    y6=y5.^2;
    y7=sum(y6);
    y8=y7/n;
    se=(z-y8)/(n*r);
alt=y3-norminv(1-alfa)*sqrt(se);
ust=y3+norminv(1-alfa)*sqrt(se);
diff=ust-alt;
```

1. Yöntem

```
function [diff, alt,
ust]=algoritm1_tekgrup_ga(x1,den,alfa)
[n r]=size(x1);
for s=1:den
    for j=1:n

y=randsample(x1(j,1:r),r,'true');
        x2(j,:)=y;
    end
    y2=mat2vec(x2);
    meanx=mean(y2);
    x5(s,:)=meanx;
end
y3=sort(x5);
alt=y3(ceil((den+1)*alfa));
ust=y3(fix((den+1)*(1-alfa)));
diff=ust-alt;
```

2. Yöntem

```
function [diff, alt,
ust]=algoritm2_tekgrup_ga(x1,den,alfa)
[n r]=size(x1);
z=[];e=[];g=[];
for s=1:den
    for t=1:r
        for l=1:n
            for k=1:r
                z=[z; x1(:,k)];
            end
```

```
            y=randsample(z,n,'true');
            e(:,l)=y;
        end
        f=sort(e);
        d=diag(f);
        g(:,t)=d;
    end
    y2=mat2vec(g);
    meanx=mean(y2);
    x5(s,:)=meanx;
end
y3=sort(x5);
alt=y3(ceil((den+1)*alfa));
ust=y3(fix((den+1)*(1-alfa)));

diff=ust-alt;
```

3. Yöntem

```
function [diff, alt, 
ust]=algoritm3_tekgrup_ga(x1,den,alfa)
[n, r]=size(x1);
for c=1:den
    for t=1:r
        for l=1:n
            for j=1:n

y=randsample(x1(j,1:r),1,'true');
                x2(j,:)=y;
            end
            x3(:,l)=x2;
        end
        s=sort(x3);
        d=diag(s);
        b(:,t)=d;
    end
    y2=mat2vec(b);
    meanx=mean(y2);
    x5(c,:)=meanx;
end
y3=sort(x5);
alt=y3(ceil((den+1)*alfa));
ust=y3(fix((den+1)*(1-alfa)));
diff=ust-alt;
```