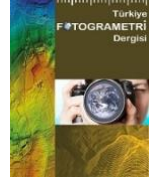




## Türkiye Fotogrametri Dergisi

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/tufod>

e-ISSN 2687-6590



# Mutlak Yöneltilmenin Doğrudan Çözümü İçin Gauss-Helmert Modeli

Ozan Arslan <sup>1\*</sup>

<sup>1\*</sup> Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, 41001, Kocaeli, Türkiye; (oarslan@kocaeli.edu.tr)



\*Sorumlu Yazar:  
oarslan@kocaeli.edu.tr

### Araştırma Makalesi

**Alıntı:** Arslan, O. (2023).  
Mutlak Yöneltilmenin  
Doğrudan Çözümü İçin  
Gauss-Helmert Modeli.  
*Türkiye Fotogrametri Dergisi*,  
5(2), 66-73.

Geliş : 03.11.2023  
Revize : 23.11.2023  
Kabul : 05.12.2023  
Yayınlama : 31.12.2023

### Özet

Mutlak yöneltilme, fotogrametri, bilgisayarlı görü (computer vision) ve robot biliminde eski ve temel görevlerden biridir. Fotoğraf çiftlerinden geliştirilen stereo modelin görüntü koordinat sisteminden nesne koordinat sistemine dönüşümünün elde edilmesini içerir. Mutlak yöneltilmeye yönelik geleneksel çözüm, dönüşüm parametrelerinin iyi bir yaklaşımını gerektiren bir doğrusallaştırma sürecini işleten sayısal (nümerik) yinelemeli en küçük kareler çözümüdür. Bu çalışmada ise mutlak yöneltilmenin çözümü için üç boyutlu benzerlik dönüşümünde kullanılan ve 'doğrudan' çözüm sağlayan Gauss-Helmert Modeli üzerinde durulmuştur. Önerilen doğrudan çözüm yönteminin performansını test etmek üzere; literatürde özellikleri bilinen bir koordinat veri seti sayısal uygulama ve analizler için kullanılmıştır. Geleneksel GMM yöntemiyle kestirilen dönüşüm parametreleri ve doğruluk değerleri, doğrudan çözüm sağlayan GHM modeliyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Genel olarak dönme açılarının nispeten küçük olduğu mutlak yöneltilme problemlerinde doğrudan çözüm yöntemlerinin kullanılması uygun bir tercih olabilir. Örnek sayısal deneylerde GHM modelinin daha az zaman gereksinimiyle, daha duyarlı dönüşüm parametreleri üretebileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Mutlak yöneltilme, en küçük kareler, koordinat dönüşümü, Gauss-Helmert modeli.

## Gauss-Helmert Model for Direct Solution to Absolute Orientation

\*Corresponding Author:  
oarslan@kocaeli.edu.tr

### Research Article

**Citation:** Arslan, O. (2023).  
Gauss-Helmert Model for  
Direct Solution to Absolute  
Orientation. *Turkish Journal  
of Photogrammetry*, 5(2), 66-  
73 (in Turkish).

Received : 03.11.2023  
Revised : 23.11.2023  
Accepted : 05.12.2023  
Published : 31.12.2023

### Abstract

Absolute orientation is an old and fundamental task in photogrammetry, computer vision and robotics. It involves obtaining the transformation of the stereo model developed from pairs of photographs from the image coordinate system to the object coordinate system. The traditional solution for absolute orientation is a numerical iterative least squares solution, which operates a linearisation process that requires a good approximation of the transformation parameters. In this study, we focus on the Gauss-Helmert model, which is used in three-dimensional similarity transformation for solving absolute orientation and provides a 'direct' solution. In order to test the performance of the proposed direct solution method, a coordinate data set with known properties in the literature is used for numerical implementation and analyses. The transformation parameters and accuracy values estimated by the conventional GMM method are compared with the results obtained by the direct solution GHM model. In general, for absolute orientation problems where the rotation angles are relatively small, the use of direct solution methods may be an appropriate choice. Numerical experiments have shown that the GHM model can produce more accurate transformation parameters with less time requirement.

**Keywords:** Absolute orientation, least squares, coordinate transformation, Gauss-Helmert model.

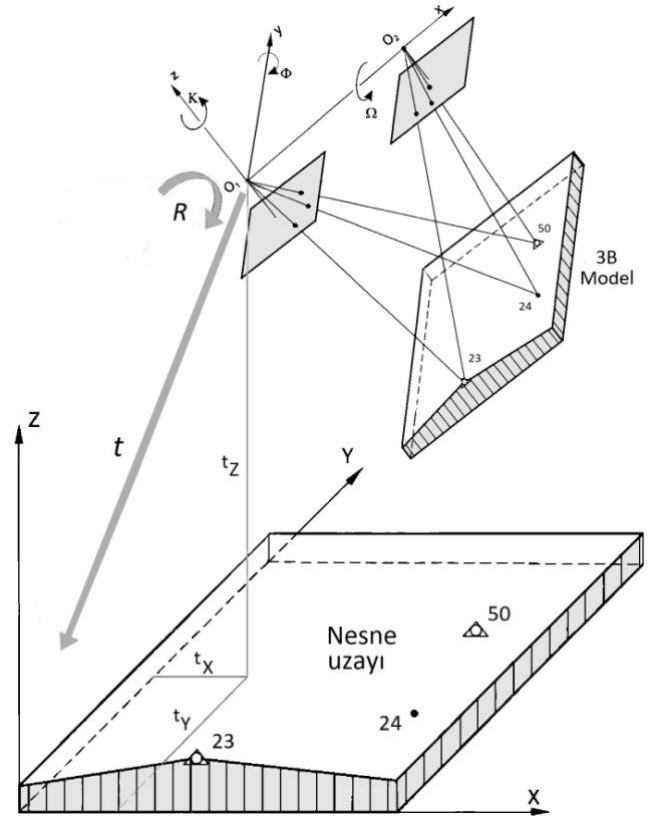
## 1. Giriş

Karşılıklı ölçü kümelerini kullanarak görüntü ve nesne (cisim) koordinat sistemleri arasındaki ilişkinin belirlenmesi mutlak yöneltme problemi olarak bilinmektedir ve en az yüz yıllık bir geçmişe sahiptir. Fotogrametri, bilgisayarlı görü (computer vision), robotik, nesne hareket analizi ve tanımlanmış bir nesnenin konumunun ve kamera yöneltmesinin tahmin edilmesi (poz kestirimi) gibi birçok alanda yaygın biçimde kullanılmaktadır [1-9]. Fotoğrafların yöneltme parametrelerinin belirlenmesi için çeşitli yöntemler başarıyla uygulanmıştır. Yöneltme işlemi aşamalı olarak gerçekleştirilebilmektedir ancak bu alanda eş zamanlı yöntemler de (demet dengelemesi vb.) mevcuttur. Stereoskopik ölçümlere dayalı sistemler için üç boyutlu modeller karşılıklı yöneltmeden türetilir. Bu adımda, nokta koordinatları keyfi bir model koordinat sisteminde tanımlanır. Nesne koordinat sistemindeki noktalar mutlak yöneltme aşamasında üç boyutlu benzerlik dönüşümü uygulanarak belirlenmektedir [10,11].

Mutlak yöneltmede, dönüşümü temsil etmek üzere yedi (7) parametrelilik dönüşümü kullanan iki kontrol noktası koordinat seti verildiğinde optimum dönüşüm parametreleri kestirilmeye çalışılır (Şekil 1). Bu yöntem aynı zamanda robotik camiasında da önemlidir zira kamera koordinatları ile mekanik bir cihaza bağlı keyfi bir koordinat sistemi arasında ilişki kurulmasını sağlar. Geleneksel olarak mutlak yöneltme probleminin doğrusallaştırma sürecinde - özellikle de dönme açılarının iyi bir yaklaşımını gerektiren- sayısal (nümerik) iteratif bir çözüm yöntemi kullanılmaktadır. Bu nedenle mutlak yöneltme problemi için doğrudan (yani iteratif olmayan) bir çözüm geliştirmek yararlı bir çalışma olacaktır. Literatürde bilinen bazı doğrudan (direct) yöntemler arasında; doğrudan birim kuaterniyon çözümü, matris kare-kök çözümü, tekil değer ayrışımı (SVD)'na dayalı doğrudan çözüm ve doğrusal alt uzay yöntemine bağlı kapalı- form çözümü sayılabilir [11-15]. Bilgisayarlı görü araştırmalarında mutlak yöneltme, minimum nesne bilgisini kullanarak poz kestirimi (pose estimation) problemine doğrudan çözümler getirmeyi amaçlamaktadır. Poz kestirimi için kullanılan doğrusal doğrudan çözümler çoğunlukla cebirsel projektif geometri kavramlarına dayanmaktadır. Yöntemin yaklaşık çözümleri, metrik olmayan kameraların kullanıldığı durumlarda olduğu gibi; kesin tasarım ve veri kestirimi gerektirmeyen uygulamalarda etkili olmaktadır. Tüm bu çözümler, aslında; görüntü ve nesne (cisim) koordinatları arasındaki ilişkide olduğu biçimiyle 'doğrusal olmayan bir problemin doğrusal çözümü'nü içermektedir. Kalibre edilmiş bir kameraya veya parametreler için başlangıç yaklaşık değerlerine

gereksinim yoktur. Bu tür çözümler, genellikle; daha hassas hesaplamalar için gerekli olan dış yöneltme parametrelerinin 'yaklaşık değerleri'ni hesaplamak amacıyla kullanılır [16].

Mutlak yöneltmede geleneksel çözüm, doğrusallaştırma sürecinde dönüşüm parametrelerinin iyi bir yaklaşımını gerektiren 'sıradan en küçük kareler (EKK)' yinelemeli çözümüdür [17,18]. Bu nedenle, mutlak yöneltmede doğrudan çözüm sağlayan, kesin bir çözüm yöntemi tercih edilebilir. Uzaysal dönüşümün yaklaşık çözümünü içeren ve özellikle kontrol noktaları yetersiz olduğunda kullanımı uygun olan bir yöntem Kraus [19] tarafından önerilmiştir. Yaygın olarak bilindiği üzere; dönüşüm parametreleri, iki sistemde de ölçülen koordinat kümeleri kullanılarak klasik EKK yöntemiyle çözülebilir. Genel olarak yalnızca bir sistemdeki (yani hedef) koordinatların hatalara tabi olduğu varsayılırken, diğerindeki (yani orijinal sistem) koordinatların hatasız olduğu varsayıldığında bu yaklaşım Gauss-Markov (GMM) modeliyle sonuçlanır. Bu temel dönüşüm probleminin en genel modeli geleneksel karışık (mixed) dengelemedir.



Şekil 1. Mutlak yöneltme [18, 34].

Bu model, herhangi bir koşul eklenmeksizin; ölçüler ve parametreler kapalı, doğrusal olmayan veya doğrusal bir fonksiyonla ilişkilendirildiğinde en küçük kareler çözümü sağlar [20]. Tanımlanan bu model, Gauss-Helmert modeli (GHM) olarak bilinir ve son zamanlarda "hata- değişmezleri" modeli veya "toplam

en küçük kareler" modeli olarak genel istatistik literatürüne yeniden dahil edilmiştir [21, 22, 23]. Ölçülerin (nokta koordinatları) yanı sıra, katsayılar matrisi elemanlarının da hata içerdiği problemlerin çözümü için önerilen bir yöntemdir [24]. Çeşitli uygulamalarda hem kaynak hem de hedef koordinatlardaki olası hataların dikkate alınması daha gerçekçi ve hatta tek uygun modelleme olarak değerlendirilebilir. İki referans sistemini ilişkilendirmek için biri ölçek, üç eksenler yönünde öteleme ve üç dönüklük olmak üzere yedi parametrenin kullanılabilmesi bilinmektedir. Her iki sistemdeki hataları dikkate alan benzerlik dönüşümü problemi GHM modeli ile çözülebildiği gibi bu yöntemin doğrudan çözümü de mümkündür [25,27,33,34].

Bu çalışmada sayısal bir uygulama ile; standart GMM modeliyle hesaplanan mutlak yönelme çözüm sonuçlarının, doğrudan (yinelemesiz) GHM modeli ile kestirilen sonuç değerleri ile karşılaştırılması hedeflenmiştir. Literatürde mevcut bilinen bir koordinat veri seti [18] üzerinde; GMM yöntemiyle kestirilen dönüşüm parametreleri ve doğruluk değerleri, GHM modeliyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak yorumlanmış ve ayrıca GHM modelinin olumlu sayısal özellikleri üzerinde durulmuştur. GHM modelinin kapalı formunun, esnek bir fonksiyonel modele sahip olması, doğrudan ve kararlı çözüm sağlaması nedeniyle, mutlak yönelme problemlerinde kullanılabilmesi kanaatine varılmıştır.

## 2. Gauss-Helmert Modeli

Bilindiği gibi koordinat dönüşümü problemi, kaynak ve hedef sistemdeki kontrol noktası koordinat çiftleri kullanılarak bilinmeyen dönüşüm parametrelerinin belirlenmesi esasına dayanmaktadır. Problem genellikle verilen değişken sayısının bilinmeyen dönüşüm parametrelerinin sayısını aşması durumunda EKK teorisinin uygulanmasıyla çözülmektedir. Koordinat dönüşümü, her iki koordinat sistemindeki kontrol noktası koordinatlarının hatasız değerler olarak kabul edildiği, EKK dengeleme teorisi ile çözüm bulunan, bilinmeyen dönüşüm parametrelerinin belirlenmesine yönelik bir basit matematik problemi olarak ele alınmaktadır. Koordinat dönüşümü, öncelikli olarak fonksiyonel dönüşüm modelinin seçimi ve seçilen modelin dönüştürülmüş veri üzerindeki etkileri açısından değerlendirilmesi gerektiğinde; bu oldukça kabul edilebilir bir durumdur. Hem ölçü vektörü ve hem de katsayılar (dizayn) matrisinin elemanları (tamamı veya bir kısmı) stokastik özelliklere sahip olabilir ve bu durum sıradan EKK çözüm yaklaşımında belirsizliklere yol açar. EKK teorisini kullanırken çoğu uygulamada, her iki koordinat sistemindeki

koordinatların ölçü olarak ele alındığını ve dolayısıyla rastgele hatalara tabi olduğunu varsaymak gerekir. Çözüm için Gauss-Helmert modeli (GHM) olarak adlandırılan, her iki sistemdeki koordinatların hata içerebildiği daha gerçekçi bir model kullanılabilir. Koordinatların her iki koordinat sisteminde bu şekilde ele alınmasına matematik literatüründe "değişkenlerdeki hata modeli" (EIV) adı verilir. Teunissen [ 26 ] tarafından yapılan bir çalışmada, ilk kez; her iki sistemde ölçülen koordinatların hata içerdiğinin dikkate alınması gerektiği belirtilmiş ve bu datum dönüşüm yöntemi 'simetrik Helmert dönüşümü' olarak adlandırılmıştır. GHM modeli için en küçük kareler çözümünün aynı zamanda 'toplam en küçük kareler' (TLS) çözümü olarak da adlandırıldığı unutulmamalıdır. Yukarıda adı geçen çalışmadan, TLS çözümünün aslında yeni bir dengeleme yöntemi olmadığı, yalnızca GHM' ye yönelik geleneksel (doğrusal olmayan) bir EKK çözümü olduğu açıktır ve bu bakış açısı diğer bazı yazarlar tarafından da vurgulanmıştır [ 27, 28, 29]. Doğrusal EKK (linear LS) yöntemi birçok uygulayıcı için en uygun yöntemdir zira bu yöntem bilinmeyen parametrelerin geometrik bağlantısını ve bilinmeyenler ile ortak nokta koordinatları arasındaki ilişkileri açıkça yansıtmaktadır. Dolaylı veya parametrik durumda ise sadece dönüştürülen koordinat sisteminin stokastik olduğu varsayılan Gauss-Helmert yöntemi seçilmelidir [ 30 ].

Bu bölümde Gauss-Helmert modeli ile 3 boyutlu benzerlik dönüşümünün fonksiyonel dengeleme modeli üzerinde durulacaktır [ 27 ]. Gauss-Helmert modelinde datum dönüşümüne yönelik en küçük kareler probleminin doğrudan (yinelemesiz) çözüm şekli aşağıda verilmektedir: 3 boyutlu bir vektör hem orijinal hem de hedef sistemlerde ölçüldüğünde iki sistemdeki ölçü vektörleri aşağıdaki fonksiyon aracılığıyla ilişkilendirilir:

$$y_i - e_i = t + kR(x_i - \varepsilon_i) \quad (1)$$

Burada  $y_i$  hedef sistemde ölçülen  $i$ 'inci noktanın ( $3 \times 1$ ) boyutlu vektörüdür ve  $e_i$  karşılık gelen ölçü hatası vektörüdür; benzer şekilde  $x_i$  ve  $\varepsilon_i$  orijinal sistemde sırasıyla ( $3 \times 1$ ) ölçü ve hata vektörüdür.  $k$  : ölçek parametresi ( $k > 0$ ),  $t$  : öteleme vektörü ( $3 \times 1$ ) boyutunda ve  $R$  : dönüklük matrisi ( $3 \times 3$ ) boyutunda ortogonal matris, parametrelerini temsil eder. Yani hesaplanacak parametreler  $k$ ,  $t$  ve  $R$  olacaktır. Amaç, aşağıdaki amaç (yitim) fonksiyonunu ( $L_f$ ) minimum yapacak şekilde  $k$ ,  $t$  ve  $R'$  yi seçmektir.

$$L_f(k, t, R, e_i, \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i + \varepsilon_i^T \varepsilon_i) \quad (2)$$

Bilinmeyen değerlerin bir kısmı için bu minimizasyon probleminin kısıtları çözülebilirse, elde edilen sonuç amaç fonksiyonuna yerleştirilebilir. Bu

durumda, ilgili kısıtlar ve bilinmeyenler olmadan eşdeğer bir minimizasyon problemi elde edilir. Kısıtlar için Lagrange çarpanları literatürde açık şekilde tanıtılmıştır. Mevcut problemde Lagrange fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$\Psi(k, t, \mathbf{R}, e_i, \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i + \varepsilon_i^T \varepsilon_i + 2\lambda_i^T (y_i - e_i - \mathbf{t} - k\mathbf{R}x_i + k\mathbf{R}\varepsilon_i)) \quad (3)$$

burada  $\lambda_i$ :  $i$ 'inci Lagrange çarpanları vektörü ( $3 \times 1$ ) dır. Kısaltmak gerekirse,  $\Psi$  ve  $Lf$  argümanları sonradan ihmal edilebilir.

$$\lambda_i = \frac{1}{1+k^2} (y_i - \mathbf{t} - k\mathbf{R}x_i) \quad (4)$$

$$Lf = \frac{1}{1+k^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{t} - k\mathbf{R}x_i)^T (y_i - \mathbf{t} - k\mathbf{R}x_i) \quad (5)$$

Yukarıdaki (5) denklemini minimize edecek şekilde, gerekli koşul yazılırsa öteleme vektörü şu şekilde oluşur:

$$\mathbf{t} = \bar{y} - k\mathbf{R}\bar{x} \quad (6)$$

$$\text{burada } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \text{ ve } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

İki koordinat sisteminin orijininin nokta kümesi ağırlık merkezlerine taşınmasıyla problem basitleştirilir ve ardından aşağıdaki gibi bir amaç fonksiyonu elde edilir:

$$Lf = \frac{1}{1+k^2} \sum_{i=1}^N (\Delta y_i - \mathbf{t} - k\mathbf{R}\Delta x_i)^T (\Delta y_i - \mathbf{t} - k\mathbf{R}\Delta x_i) = \frac{1}{1+k^2} (ak^2 - 2ck + b) \quad (7)$$

$$\text{Burada } \Delta y_i = y_i - \bar{y} \text{ ve } \Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

$$a = \sum_{i=1}^N \|\Delta x_i\|^2 \text{ ve } b = \sum_{i=1}^N \|\Delta y_i\|^2 \quad (8)$$

$$c = \sum_{i=1}^N \Delta x_i^T \mathbf{R}^T \Delta y_i = \sum_{i=1}^N \Delta y_i^T \mathbf{R} \Delta x_i \quad (9)$$

Kabul edilebilir  $e_i$  ve  $\varepsilon_i$ , ile  $\mathbf{R}\Delta x_i$  değeri  $\Delta y_i$  ile yaklaşık olarak paralel olmalıdır, dolayısıyla  $c > 0$  dır.  $k$  değeri aşağıdaki şekilde elimine edilebilir:

$$ck^2 + (a - b)k - c = 0 \quad (10)$$

Böylece ölçek parametresi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$k = \frac{-d+f}{2c} \text{ burada } d = a - b, f = \sqrt{d^2 + 4c^2} \quad (11)$$

$\mathbf{R}$ ' nin tekil değer ayrışımı yoluyla 'doğrultu kosinüs matrisi' olarak hesaplanması işlemi aşağıda aşamalı olarak sunulmuştur. Bu süreç [ 31,32 ] literatür kaynaklarına uygun biçimde aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$c = \text{tr}[\mathbf{R} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i^T] = \text{tr}[\mathbf{R}\mathbf{H}] \quad (12)$$

Burada kapalı olarak yazılan denklemde  $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i^T$  olarak tanımlanmıştır. Bilindiği üzere burada "tr" kısaltması 'matrisin izi' anlamında kullanılmaktadır.  $\mathbf{H}$ ' nin tekil değer ayrışımı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \text{diag}[\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \mathbf{V}^T \quad (13)$$

burada  $\mathbf{U}$  ve  $\mathbf{V}$  ortogonal matrisleri: sırasıyla sol ve sağ özvektörlerdir ve  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$  tekil değerlerdir. (13) nolu denklemi, denklem (12) de yerine yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$c = \text{tr}[\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{U} (\text{diag}[\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3])] \quad (14)$$

(14) nolu denklemi maksimum yapmak için,  $\mathbf{R}$ ' nin uygun olduğu (yani  $\det[\mathbf{R}] = 1$ ) düşünülerek, aşağıdaki koşulu sağlama şartıyla dönüklük parametre vektörü elde edilir:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \text{diag} [1 \ 1 \ \det[\mathbf{U}]\det[\mathbf{V}]] \mathbf{U}^T \quad (15)$$

$[\mathbf{R} = 1]$  koşulunu sağlamak için basitçe 1 dışında  $\det[\mathbf{U}]\det[\mathbf{V}]$  nin gerekli olduğuna dikkat edilmelidir, aksi halde  $\det[\mathbf{R}] = -1$  olabilir ve bu durumda  $\mathbf{R}$  artık bir dönüklüğü değil, bir yansımayı (reflection) temsil edecektir.  $\mathbf{R}$  kestirildikten sonra sonra  $k'$  yi denklem (11) aracılığıyla ve ardından  $t'$  yi denklem (6) aracılığıyla hesaplayabiliriz.

Genel olarak GHM' nin küçük dönme açılarına sahip üç boyutlu dönüşüm problemlerinde daha iyi performans gösterdiği kabul edilmektedir. Ayrıca bazı çalışmalarda da belirtildiği gibi, doğrusallaştırılmış GHM modelinin bu kapalı form çözümü, keyfi büyük dönüklükler için de geçerlidir. Parametrelerin başlangıç değerleri, büyük dönüklük açıları için bile iterasyon işlemlerini başlatmak üzere kolaylıkla hesaplanabilir ve stokastik modelde herhangi bir kısıtlamaya gerek yoktur [ 25 ].

### 3. Gauss-Markov Modeli

Ölçülerin rastlantısal değişkenler olarak ele alındığı, ölçüler (gözlemler) ve bilinmeyen parametrelerin ümit değerlerine sadık kestirimlerinin elde edildiği Gauss- Markov modeli; gözlem hatalarının veya ölçülere getirilecek düzeltmelerin karelerinin ağırlıklı toplamının minimum olması esasına dayanır. Teorem olarak Gauss-Markov modeli, doğrusal modeldeki hataların korelasyonsuz, eşit varyanslı ve ümit değerinin sıfır olması durumunda, sıradan EKK kestirimcisinin; doğrusal yansız kestiriciler sınıfı içinde en düşük örneklem varyansına sahip olduğunu ifade etmektedir.

Bilindiği şekliyle bu standart modelde üç boyutlu benzerlik dönüşümünün doğrusallaştırılmış formu şu şekilde oluşturulur:

$$\mathbf{X}_i = dt + (1 + dk)d\mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_i^0 \quad (16)$$

Mutlak yöneltmenin yedi parametresi için başlangıç değerlerinin bilindiği varsayılmaktadır. Denklemden orijinal model koordinatları  $(xyz)$ , burada  $(\mathbf{X}_i^0)$  ile gösterilen nesne (cisim) koordinat sistemine dönüştürülür. Dolaylı ölçüler yöntemiyle en küçük kareler kestirimi için, yedi bilinmeyendeki bu eş zamanlı doğrusal denklemler aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} V_{xi} &= dt_x + X^0 dk + Z^0 d\phi - Y^0 d\kappa - (X - X^0) \\ V_{yi} &= dt_y + Y^0 dk - Z^0 d\Omega + X^0 d\kappa - (Y - Y^0) \\ V_{zi} &= dt_z + Z^0 dk + Y^0 d\Omega - X^0 d\phi - (Z - Z^0) \end{aligned} \quad (17)$$

Yukarıdaki gözlem denklemleri basit olarak matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{l}$$

Tam bir kontrol noktası için bu tür üç denklemin her biri (yani tümü) yazılmış olur. Dönüşüm parametrelerinin kestirimi için amaç fonksiyonuna uygun kestirim değerlerinin çözümü, normal dağılımdaki hataların en iyi doğrusal ümit değere sadık kestirimidir:

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}$$

(17) denklemleri yalnızca doğrusal yaklaşımlar olduğundan, başlangıçtaki yaklaşımlar çok iyi olmadığı sürece normal olarak daha fazla yineleme gerektirir. Kestirilen  $x$  bilinmeyenleri, tüm  $l$  gözlemleri için hesaplanan  $v$  düzeltmelerini elde etmek amacıyla kullanılır. Tüm  $v$  düzeltmelerinden birim ağırlığın standart sapması için bir kestirim değeri elde edilir; bu aynı zamanda ağırlık matrisinde ağırlığı 1 olan ölçünün referans varyansının karekökü olarak da adlandırılır ( $\tilde{\sigma}_0^2$ : birim ölçünün varyansdır).

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{V^T V / (n - u)}$$

Birim ağırlığın  $\tilde{\sigma}_0$  standart sapması ve  $q_{kk}$  ağırlık katsayıları ile  $x_k$  bilinmeyenlerin standart hatası  $\tilde{\sigma}_{xk}$  aşağıdaki gibi kestirilebilir:

$$\tilde{\sigma}_{xk} = \tilde{\sigma}_0 \sqrt{q_{kk}}$$

Ağırlık katsayıları  $q_{kk}$  basitçe normal denklem matrisinin tersinin ana köşegeninde karşılık gelen elemanlardır:

$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$$

### 3.1. Sayısal Örnek ve Denemeler

Bu çalışmada önerilen doğrudan çözüm yönteminin performansını test etmek üzere; literatürde özellikleri bilinen bir koordinat veri seti [18] sayısal uygulama ve analizler için kullanılmıştır. Geleneksel GMM yöntemiyle kestirilen dönüşüm parametreleri ve doğruluk değerlerinin, doğrudan çözüm sağlayan GHM modeliyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması amaçlanmıştır. Fotogrametri literatüründe kaynak kitap [18] olarak kullanılan bir eserde yer alan örnek nokta seti koordinat verileri (Tablo 1) kullanılarak; üç noktadan oluşan bir mutlak yöneltme problemi, GHM yöntemi ile çözülmüştür. Ayrıca aynı veri kümesi üzerinde karşılaştırmalı analizler yapmak için dönüşüm parametreleri klasik iteratif GMM modeli aracılığıyla da hesaplanmıştır. Mutlak yöneltme için seçilen bu sayısal örnek Tablo 1'de sunulan model koordinatları  $(x_i, y_i, z_i)$  ile nesne koordinatlarını  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i)$  içermektedir. Model koordinatları genel olarak fotogrametride karşılıklı yöneltme (relative orientation) işleminden türetilen stereomodellerden elde edilmektedir. Her iki koordinat sistemindeki koordinatlar eşit ağırlıklı ve korelasyonsuz gözlemlerdir. Bir model noktasının nesne koordinat sistemine dönüşümü sırasıyla üç dönme açısı  $\Omega, \Phi$  ve  $\kappa$  cinsinden tanımlanır. (Daha sonra toplam dönme matrisi  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\Omega \mathbf{R}_\Phi \mathbf{R}_\kappa$  olarak oluşturulur.)

GMM çözümünde dönüşüm parametrelerinin kestirimi için yaklaşık değerler dikkatle seçilmiştir. Nihai sonuçlar birkaç iterasyonla elde edilebilmiştir. Kaynak kitapta verilen yaklaşık değerlerin kullanılması durumunda, kesin değerlerin elde edilmesi daha fazla iterasyon ve zaman gerektirmiştir. Tablo 2, iki çözüm yöntemi kullanılarak hesaplanan dönüşüm parametrelerini ve doğruluklarını standart sapmalar cinsinden göstermektedir. Tablodan görüldüğü gibi iki çözüm yönteminin kestirim sonuçları arasında farklılık gözlenmektedir. Farkın bir kısmının ortak noktaların koordinat doğruluğundan veya katsayılar matrisinin içerdiği koordinatların kovaryansından kaynaklanmış olabileceği ileri sürülebilir. Örnek verisi için yapılan hesaplama sonucunda; GHM ve GMM modelleri için kestirilen dönüklük parametrelerinde eşdeğerlik olduğu tespit edilmiştir. Bu iki çözümde dönüklük parametresi aynı kalırken, ölçek ve öteleme parametreleri birbirinden biraz farklı çıkmıştır. Teunissen [26], Felus ve Burtch [33] tarafından yapılan çalışmalarda da; GHM ile gerçekleştirilen 3B benzerlik dönüşümü EKK çözümünde elde edilen dönüklük parametresinin, GMM çözümü ile aynı olduğunun tespit edildiğine dikkat edilmelidir. Daha önce de belirtildiği üzere; her iki sistemdeki koordinatların hata içerebildiği GHM modeli, yalnızca orijinal koordinat sisteminin hata

içerdiğini varsayan GMM yönteminden fonksiyonel model açısından farklı olması nedeniyle, sayısal deneylerde elde edilen bu sonuçlar şaşırtıcı değildir.

GHM ve GMM yöntemlerinden elde edilen benzerlik dönüşümü parametrelerinin doğruluk karşılaştırması da Tablo 2' de gösterilmektedir. Grafikselsel karşılaştırma yapmak amacıyla iki modelin doğrulukları Şekil 2'de gösterilmektedir. Kestirilen öteleme parametrelerinin hassasiyet değerleri şeklin sol kısmında, hesaplanan dönüklük değerleri ise sağ kısmında gösterilmektedir. Mevcut örnekte GHM'nin kestirilen parametreler için GMM'den daha duyarlı (düşük standart sapma) değerler verdiği açıkça görülmektedir. Yapılan örnek hesaplamalarda farklı veri setlerinden benzer sonuçlar elde edilmiş olup, genel olarak GHM modelinin doğruluğunun daha yüksek olduğu söylenebilir. İki yöntem için nesne noktalarına ilişkin hesaplanan düzeltme değerleri Tablo 3'te görülmekte olup hemen hemen aynı düzeltme değeri sonuçları elde edilmiştir.

GHM' den türetilen benzerlik dönüşüm parametrelerinin doğruluk karşılaştırmasını özetlemek gerekirse, GHM modeli sayısal deneylerde daha az zaman gereksinimiyle daha duyarlı dönüşüm

parametreleri üretmiştir. Genel olarak bu örnekte de olduğu gibi, dönme açılarının nispeten küçük olduğu mutlak yöneltme problemlerinde doğrudan çözüm yöntemlerinin kullanılması uygun bir tercih olacaktır. Yinelemeli GMM çözümü ise hesaplama açısından daha zahmetlidir ve başarılı bir çözüm için yakınsama özelliği başlangıç parametrelerinin kalitesine bağlıdır. Bu dezavantajlı özellikleri ortadan kaldırmak için çeşitli tekrarlı olmayan (doğrudan LS) yöntemler önerilmiştir. Ancak Kurt [30] tarafından yapılan bir çalışmada; yinelemeli olmayan tüm yöntemlerin istatistiksel olarak "dönüklük değişmezliği" koşulu altında geliştirildiğine dikkat çekilmiştir. İlgili veriler üzerinde koşul sağlanamıyorsa, kullanılan çözüm yöntemlerinin doğrusal yöntemlerle desteklenmesi gerekir; aksi takdirde kestirilen çözümler yalnızca parametrelerin başlangıç değerleri niteliğinde olacaktır. Buna göre eğer bir mutlak yöneltme problemi yinelemeli çözüm planının ön koşullarını karşılamıyorsa, iteratif bir yöntemin başlangıç değerlerinin belirlenmesinde doğrudan çözüm yöntemi tercih edilebilir. Benzer biçimde daha hızlı ve daha güvenilir EKK kestirimleri için hibrit yöntemlerin (doğrudan ve yinelemeli yöntemlerin kombinasyonu) seçilmesi de olasıdır.

**Tablo 1.** Sayısal örnek için kullanılan nokta veri seti [18].

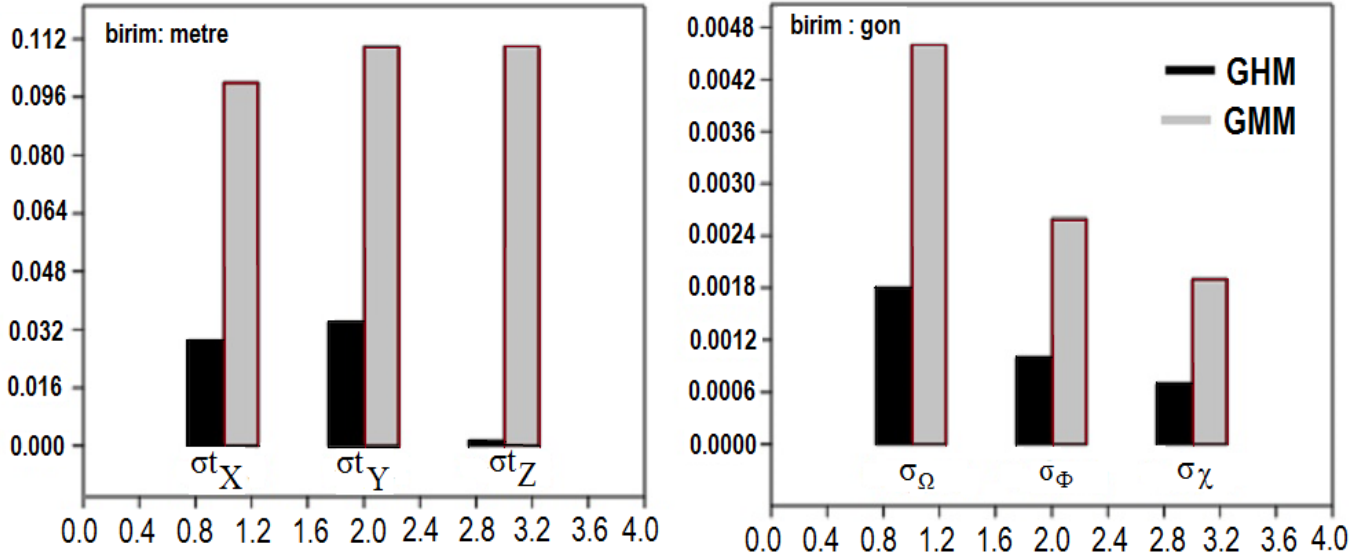
Nokta No	Model koordinatları (m)			Nesne Koordinatları (m)		
	23	24	50	23	24	50
x / X	0,303532	0,192638	0,303848	3321,65	3402,84	1776,75
y / Y	0,595068	0,602834	0,403493	1167,56	2061,10	1196,79
z / Z	0,034298	0,034116	0,026903	579,48	576,80	493,19

**Tablo 2.** Hesaplanan dönüşüm parametreleri ve doğrulukları.

Kestirilen parametreler	GHM çözümü	GMM çözümü	Doğruluk değerleri	GHM	GMM
t <sub>x</sub> (m)	-1424,406281	-1424,492394	σ <sub>tX</sub> (m)	0,0290	0,1000
t <sub>y</sub> (m)	3715,597273	3715,564272	σ <sub>tY</sub> (m)	0,0340	0,1100
t <sub>z</sub> (m)	213,752663	213,752516	σ <sub>tZ</sub> (m)	0,0015	0,1100
dk <sub>z</sub>	8071,8438247	8071,8438250	s <sub>k</sub>	0,00003	0,00003
d <sub>α</sub> (gon)	-0,1854	-0,1854	σ <sub>dα</sub> (gon)	0,0018	0,0046
d <sub>φ</sub> (gon)	-1,0920	-1,0920	σ <sub>dφ</sub> (gon)	0,0010	0,0026
dk <sub>α</sub> (gon)	298,6799	298,6799	sk <sub>α</sub> (gon)	0,0007	0,0019

**Tablo 3.** Nesne koordinat sisteminde modellerden elde edilen düzeltme değerleri.

Yöntem	GMM (m)			GHM (m)		
	23	24	50	23	24	50
X	-0,04093	0,01452	0,02641	-0,04090	0,01450	0,02640
Y	-0,03815	0,04470	-0,00655	-0,03820	0,04470	-0,00650
Z	-0,00197	0,00045	0,00152	-0,00200	0,00040	0,00150



Şekil 2. İki yöntem için kestirilen parametrelerin doğruluk değerleri.

#### 4. Sonuçlar

Mutlak yönlüde 3-boyutlu benzerlik dönüşümü parametrelerinin kestirimi problemi için sıradan yinelemeli en küçük kareler yöntemi (GMM) yerine alternatif olarak Gauss- Helmert modeli önerilmiştir. Çalışmada mevcut katkı, mutlak yöneltme probleminde kaynak ve hedef (yani model ve nesne) koordinat sistemindeki koordinatların stokastik olarak ele alınması ve yapılacak EKK dengelemesinin kesin ve doğrudan çözümüne odaklanılmış olmasıdır. Doğrudan çözüme kıyasla yinelemeli GMM çözümü, başarılı bir yakınsama için başlangıç parametrelerinin kalitesine bağlı olup hesapsal işlem yükü de daha fazladır. Sayısal uygulama örneğinde açıklandığı üzere; eğer problem iteratif çözüm tasarım planının ön koşullarını karşılamıyorsa, başlangıç değerlerinin belirlenmesinde doğrudan çözüm yöntemine başvurulabilir. GHM modeli esnek bir fonksiyonel modele sahiptir ve dönüklük açılarının nispeten büyük olduğu mutlak yöneltme problemlerinde dahi, 'tercih edilebilir' nitelikte olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.

#### Yazarların Katkısı

Makale tek yazarlıdır.

#### Çıkar Çatışması Beyanı

Herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

#### Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

#### Kaynaklar

- [1] Eggert, D. W., Lorusso, A., & Fisher, R. B. (1997). Estimating 3-D rigid body transformations: a comparison of four major algorithms. *Machine vision and applications*, 9(5-6), 272-290.
- [2] Horn, B. K. (1987). Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Josa a*, 4(4), 629-642.
- [3] Guo, K., Ye, H., Zhao, Z., & Gu, J. (2021). An efficient closed form solution to the absolute orientation problem for camera with unknown focal length. *Sensors*, 21(19), 6480.
- [4] Ansar, A., & Daniilidis, K. (2003). Linear pose estimation from points or lines. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(5), 578-589.
- [5] Fiore, P. D. (2001). Efficient linear solution of exterior orientation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(2), 140-148.
- [6] Kumar, R., & Hanson, A. R. (1994). Robust methods for estimating pose and a sensitivity analysis. *CVGIP: Image understanding*, 60(3), 313-342.
- [7] Yang, L., Sheng, Y., & Wang, B. (2016). 3D reconstruction of building facade with fused data of terrestrial LiDAR data and optical image. *Optik*, 127(4), 2165-2168.
- [8] Zhou, L., & Kaess, M. (2019, November). An efficient and accurate algorithm for the perspective-n-point problem. In *2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* (6245-6252). IEEE.
- [9] Lepetit, V., Moreno-Noguer, F., & Fua, P. (2009). EP n P: An accurate O (n) solution to the P n P problem. *International journal of computer vision*, 81, 155-166.

- [10] Li, J., Hu, Q., Zhong, R., & Ai, M. (2017). Exterior orientation revisited: A robust method based on lq-norm. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 83(1), 47-56.
- [11] Horn, B. K. (1987). Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Josa a*, 4(4), 629-642.
- [12] Jiang, G., Wang, J., & Zhang, R. (2007). A close-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Journal of Zhengzhou Institute of Surveying and Mapping*, 24(3), 193-195.
- [13] Horn, B. K., Hilden, H. M., & Negahdaripour, S. (1988). Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices. *Josa a*, 5(7), 1127-1135.
- [14] Arun, K. S., Huang, T. S., & Blostein, S. D. (1987). Least-squares fitting of two 3-D point sets. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, (5), 698-700.
- [15] Zeng, H., & Yi, Q. (2012). Simple and Efficient Direct Solution to Absolute Orientation. In *Future Control and Automation: Proceedings of the 2nd International Conference on Future Control and Automation (ICFCA 2012)*, 2, 19-25. Springer Berlin Heidelberg.
- [16] Grussenmeyer, P., & Khalil, O. A. (2002). Solutions for exterior orientation in photogrammetry: a review. *The photogrammetric record*, 17(100), 615-634.
- [17] Ghilani, C. D. (2017). Adjustment computations: spatial data analysis. *John Wiley & Sons*.
- [18] Kraus, K. (2007). Photogrammetry: geometry from images and laser scans (1). *Walter de Gruyter*.
- [19] Kraus, K. (1997). Photogrammetry: Advanced methods and applications. *Dümmler*.
- [20] Leick, A., Rapoport, L., & Tatarnikov, D. (2015). GPS satellite surveying. *John Wiley & Sons*.
- [21] Xu, P., Liu, J., & Shi, C. (2012). Total least squares adjustment in partial errors-in-variables models: algorithm and statistical analysis. *Journal of geodesy*, 86, 661-675.
- [22] Mahboub, V. (2012). On weighted total least-squares for geodetic transformations. *Journal of geodesy*, 86(5), 359-367.
- [23] Schaffrin, B., & Felus, Y. A. (2008). On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformations. Three algorithms. *Journal of Geodesy*, 82, 373-383.
- [24] Akyılmaz, O., Acar, M., & Özlüdemir, M. (2007). Koordinat dönüşümünde En Küçük Kareler ve Toplam En Küçük Yöntemleri. *Jeodezi ve Jeoinformasyon Dergisi*, (97), 15-22.
- [25] Chang, G., Xu, T., & Wang, Q. (2017). Error analysis of the 3D similarity coordinate transformation. *GPS Solutions*, 21, 963-971.
- [26] Teunissen, P. J. (1985). The geometry of geodetic inverse linear mapping and non-linear adjustment. *Netherlands Geodetic Commission*, 8(1).
- [27] Chang, G. (2015). On least-squares solution to 3D similarity transformation problem under Gauss-Helmert model. *Journal of Geodesy*, 89(6), 573-576.
- [28] Neitzel, F. (2010). Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation. *Journal of geodesy*, 84, 751-762.
- [29] Schaffrin, B. (2006). A note on constrained total least-squares estimation. *Linear algebra and its applications*, 417(1), 245-258.
- [30] Kurt, O. (2018). An integrated solution for reducing ill-conditioning and testing the results in non-linear 3D similarity transformations. *Inverse problems in science and engineering*, 26(5), 708-727.
- [31] Grafarend, E. W., & Awange, J. L. (2003). Nonlinear analysis of the three-dimensional datum transformation [conformal group  $C 7 (3)$ ]. *Journal of Geodesy*, 77, 66-76.
- [32] Teunissen, P. J. G. (1985). Generalized inverses, adjustment, the datum problem and S-transformations. *Optimization of Geodetic Networks*.
- [33] Felus, Y. A., & Burtch, R. C. (2009). On symmetrical three-dimensional datum conversion. *GPS solutions*, 13, 65-74.
- [34] Yan, L., Wan, J., Sun, Y., Fan, S., Yan, Y., & Chen, R. (2016). A novel absolute orientation method using local similarities representation. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 5(8), 135.



© Author(s) 2023.

This work is distributed under <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>