

# Ayrık Tekil Konvolusyon Yöntemi ile İki Boyutlu Isı Probleminin MATLAB Ortamında Çözümü

Bahadır Alyavuz

Gazi Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Ankara 06570 Türkiye.  
Tel: +90 (312) 582-3213; Faks: +90 (318) 231-9223, balyavuz@gazi.edu.tr

**Özet—** Bu çalışma ayrık tekil konvolusyon yöntemini ve iki boyutlu ısı yayılma denkleminin uygulanmasını özetlemektedir. Sayısal hesaplamalarda Dirichlet tipi sınır şartları kullanılmıştır. Bir MATLAB® kodu yardımıyla sayısal hesaplamalar ve grafik sunular oluşturulmuştur. Karşılaştırma amaçlı olarak denge durumundaki plak durumu için değişkenlerin ayrıştırılması yöntemiyle de çözüm yapılmıştır.

**Anahtar kelimeler—**Ayrık tekil konvolusyon, ısı iletimi, değişkenlerin ayrıştırılması

**Abstract—** This study summarizes the discrete singular convolution (DSC) method and its implementation to two dimensional transient heat conduction problem. Dirichlet type boundary conditions are used in the calculations. A MATLAB® code is prepared for the numerical calculations and graphical representations. Steady state condition is solved by the method of separation of variables in order to compare the results.

**Index Terms—**Discrete singular convolution, heat conduction, separation of variables

## I. GİRİŞ

Mühendislik problemlerinin yaklaşık yöntemlerle sayısal analizi yoğun olarak araştırılan bir alandır. Yeni çözüm yöntemlerinin oluşturulması ve mevcut yöntemlerin geliştirilmesiyle birlikte gerçek değerlere çok daha yakın sonuçların elde edilmesi mümkün hale gelmiştir. Ancak çok yüksek doğrulukta sonuçlara gerek duyulan alanlarda, uygulamada esnek olan yöntemlerin geliştirilmesi halen bir ihtiyaçtır.

Mevcut sayısal çözümleme yöntemleri içinde global yöntemler olarak adlandırılan metotlar, bir noktadaki diferansiyel ifadenin yaklaşık değerini çözüm alanındaki bütün noktaların kullanılmasıyla ifade ederler. Bu yöntemlere örnek olarak spektral metotlar [1,2], ayrık Fourier dönüşümü [3] ve diferansiyel kuadratur yöntemi [4-6] gösterilebilir. Sonlu elemanlar [7,8], sonlu farklar [9], sonlu hacim yöntemleri [10] gibi yöntemler ise lokal yöntemler olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemlerde bir noktadaki diferansiyel ifadenin yaklaşık değeri noktaya komşu bulunan noktalar kullanılarak

yazılmaktadır. Lokal yöntemler, karmaşık geometri yapılarının analizinde oldukça esnek olarak kullanılan oldukça popüler yaklaşımlardır. Ancak, global yöntemlere göre çözüme daha geç yakınsarlar [11].

Ayrık tekil konvolusyon yöntemi global ve lokal yöntemlerin özelliklerini içerisinde bulundurmaktadır. Bu yöntem, orijinal olarak Wei [12] tarafından oluşturulmuş ve diferansiyel denklemlerin çözümü için geçtiğimiz yıllar içinde oldukça ilgi görmüş bir yöntemdir. Özellikle serbest titreşim problemlerine uygulanarak elde edilen sonuçlar yayınlanmıştır. Wei [13, 14] yay ve elastik çubukların boyuna titreşim problemini, kirişlerin serbest titreşimini, membran ve plakların titreşim problemini ayrık tekil konvolusyon yöntemiyle çözmüştür. Diğer bir çalışmada, kiriş titreşim problemi için ilk 7100 mod değerini, plak titreşim probleminde ilk 4500 mod değerini %1'in altında bir hata oranıyla hesaplamışlardır [15]. Buradaki yönetici denklem, ayrık tekil konvolusyon yöntemi ile matris formunda yazılmakta ve özdeğer problemi çözülmektedir. Benzer şekilde ayrık tekil konvolusyon yöntemi, kompozit plakların [16, 17], konik plakların [18], dik kenarlı olmayan dörtgen levhaların [19] serbest titreşim analizlerine de uygulanmıştır. Titreşim problemleri ile ilgili olarak son yapılan çalışmalar arasında [20], kiriş ve plakların zorlamalı titreşim problemlerinin ayrık tekil konvolusyon - mod birleştirme yöntemi çözümü verilmektedir.

Titreşim problemleri dışında, Wei ve arkadaşları [21], yöntemin ısı denklemi, dalga denklemi ve Navier - Stokes denkleminin uygulanabilirliğini bir spektral yöntemle karşılaştırarak sunmuşlardır. Üç boyutlu dalga yayılması problemi için Maxwell eşitliğinin çözümü [22, 23]'de verilmektedir. Burada bilgisayar hafızası ve hesaplama zamanı açısından elde edilen kazanç vurgulanmaktadır.

Burada sunulan çalışmanın [21]'den farkı, iki boyutlu ısı transferi eşitliğini ayrık tekil konvolusyon yöntemi ve analitik bir yöntem ile çözerek karşılaştırmak ve bunu MATLAB ortamına uygun olarak anlatmaktır. Bu doğrultuda bir program yazılmıştır. Programa ait örnek kod ve algoritma sunulmaktadır. Sonraki bölümlerde ayrık tekil konvolusyon yöntemi [21]'e uygun olarak özetlenerek problemin tanımı yapılacaktır. Problemin analitik çözümü yapılacak, sonrasında MATLAB ortamında gerekli bilgiler verilecektir. Son olarak sayısal bir örnek için elde edilen sonuçlar sunulacaktır.

## II. AYRIK TEKİL KONVOLUSYON

$\tau$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının konvolusyonu bir  $F(t)$  fonksiyonu ise, bu konvolusyon ifadesi,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-x)\eta(x)dx, \quad (1)$$

olarak yazılır. Burada tekil konvolusyon söz konusu ise, konvolusyon içinde yer alan iki fonksiyondan  $\tau(t-x)$  tekil çekirdek fonksiyonu ve  $\eta(x)$  test fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir. Çeşitli sürekli ortamlar mekaniği problemlerinin sayısal olarak çözümünde kullanılabilen tekil konvolusyonla ait çekirdek fonksiyonunun şekli önem arz etmektedir. Örneğin, Hilbert tipi tekil çekirdek fonksiyonu  $\tau(x) = 1/x^n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) genel formuna sahiptir ve  $n=-1$  olduğu durumda elektrodinamik problemlerinde,  $n=-2$  durumunda ise tomografide kullanılmaktadır [24]. Diğer bir tekil çekirdek fonksiyonu ise delta tipi tekil çekirdek fonksiyonudur.  $\tau(x) = \delta^{(n)}$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) genel formuna sahip delta tipi tekil çekirdek fonksiyonları  $n \geq 1$  için, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde oldukça önemlidir. Ancak, bahsedilen çekirdek fonksiyonlarının tekilliklere sahip olması nedeniyle, bu fonksiyonların bir dizi yaklaşık fonksiyon ile ifade edilmesi yoluna gidilmektedir.  $\tau_\alpha(x)$  yaklaşık fonksiyonların oluşturduğu dizinin bir elemanı olmak üzere,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \tau_\alpha(x) \rightarrow \tau(x) \quad (2)$$

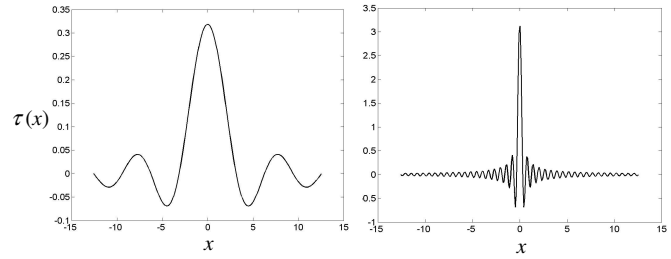
limiti yazılabilir. Burada  $\alpha_0$ , yaklaşık fonksiyonun gerçek çekirdek fonksiyonuna eşit olduğu genel bir limit değeri göstermektedir. Ayrıca, Eşitlik (1)'de verilen  $\tau$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının konvolusyon ifadesi, sayısal ortamda ayrık formda yazılarak kullanılmaktadır. Bu konvolusyonun ayrık formu,

$$F_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau_\alpha(t-x_k) f(x_k) \quad (3)$$

olarak  $k$  alt indisi ile gösterilen ayrık noktadaki ifadelerin toplamı şeklinde yazılır. Eşitlik (3)'de yer alan  $F_\alpha(t)$  fonksiyonu  $F(t)$  için yaklaşık değer ve  $x_k$  ise tekil konvolusyonun tanımlı olduğu ayrık noktalardır. Ayrıca  $f(x_k)$ ,  $\eta(x)$  test fonksiyonu yerine yazılan test fonksiyonudur. Bu fonksiyon matematiksel olarak  $\tau_\alpha$  çekirdek fonksiyonuna göre belirlenecektir.

Daha önce de belirtildiği gibi, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde kullanılan, delta tipindeki önemli bir çekirdek fonksiyon dizisi *Shannon fonksiyon* dizisidir. Bu çekirdek fonksiyon dizisi,

$$\tau_\alpha(x) = \frac{\sin \alpha x}{\pi x}, \quad \alpha = (0,1,2,\dots) \quad (4)$$



Şekil 1. Delta tipi tekil çekirdek fonksiyonu için Shannon fonksiyonu, solda  $\alpha=1$  için ve sağda  $\alpha=10$  için.

ve bu dizideki elemanların ayrık formları,

$$\frac{\sin[\alpha(x-x')]}{\pi(x-x')} \rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\pi(x-x_k)} \quad (5)$$

olarak yazılmaktadır. Şekil 1'de bu dizinin  $\alpha=1$  ve  $\alpha=10$  için grafikleri gösterilmektedir. Burada da görüldüğü gibi Shannon çekirdek fonksiyonunda dizi sonsuza gittikçe, çekirdek fonksiyonu delta fonksiyonuna yaklaşılır.

Eşitlik (3)'de verilen ayrık tekil konvolusyon ifadesinde Shannon çekirdek fonksiyonunun yerine yazılmasıyla ve Shannon örnekleme teoreminin sonucunda [25],

$$f(x) \cong \sum_{-\infty}^{\infty} f(x_k) \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} \quad (6)$$

elde edilir. Buna göre, sonsuz sayıda ayrık noktadan alınan fonksiyonunun örneklerinden  $f(x_k)$ , fonksiyonun kendisi  $f(x)$  yeniden elde edilmektedir. Shannon örnekleme teoremi bilişim kuramı ve sinyal işlemede önemli bir yere sahiptir [26].

Eşitlik (6) sonsuz sayıda ayrık nokta kullanılarak yazılmıştır. Burada tekil çekirdek fonksiyonunun türevlerinin sürekli hale getirilmesi için bir düzgünleştirici kullanılmaktadır. Bu düzgünleştirici,  $\exp(-x^2/2\sigma^2)$  delta düzgünleştiricisidir. Düzgünleştirme sonucunda ayrık tekil konvolusyon ifadesi aşağıdaki hali alır.

$$f(x) \cong \sum_{-\infty}^{\infty} f(x_k) \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} e^{-(x-x_k)^2/(2\sigma^2)} \quad (7)$$

Yukarıda verilen ayrık tekil konvolusyon eşitliğinde kullanılan sonsuz tanım alanı bilgisayar ortamında sınırlandırılarak kullanılmaktadır. Tanım alanının  $k=0$  etrafında simetrik olarak sınırlandırılmasıyla,

$$f^{(n)}(x) \cong \sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta, \sigma}^{(n)}(x-x_k) f(x_k), \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

eşitliği yazılır. Bu ifadede yer alan ayrık nokta sayısı  $2M+1$  ile sınırlıdır ve  $\delta_{\pi/\Delta, \sigma}^{(n)}(x-x_k)$ , Shannon çekirdek fonksiyonunun  $n$ . türevini ifade etmektedir.  $x, x_k$  ayrık noktaların merkezinde yer alır. Shannon çekirdek fonksiyonunun ikinci türevi,  $x \neq x_k$  ve

$x = x_k$  için sırasıyla Eşitlik (9) ve (10)'daki gibi hesaplanır.

$$\delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(2)}(x-x_k) = \left[ \begin{aligned} &-\frac{\pi}{\Delta} \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{(x-x_k)} - 2 \frac{\cos \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{(x-x_k)^2} \\ &- 2 \frac{\cos \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\sigma^2} + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)^3} + \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)\sigma^2} \\ &+ \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}\sigma^4}(x-x_k) \end{aligned} \right] e^{-(x-x_k)^2/(2\sigma^2)} \quad (9)$$

ve  $x = x_k$  için,

$$\delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(2)}(0) = \frac{1}{3} \frac{3 + \frac{\pi^2}{\Delta^2}\sigma^2}{\sigma^2} \quad (10)$$

Düzgünleştirilmiş daltasal Shannon çekirdek fonksiyonunun türevleri sürekli fonksiyonlardır.

### III. İKİ BOYUTLU ISI PROBLEMİ

Homojen ve izotrop bir ortam için ısı yayılma eşitliği ikinci mertebeden doğrusal kısmi diferansiyel denklemdir. Şekil 2' de boyutları ve sınır şartları verilen bu tip bir levha için, tanım alanı  $(0 < x, y < 1)$  olan iki boyutlu zamana bağlı ısı yayılma eşitliği,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

olarak yazılır. Levha için örnek Dirichlet tipi sınır şartları,

$$T(0,y,t) = 0, (0 \leq y \leq 1) \quad (12)$$

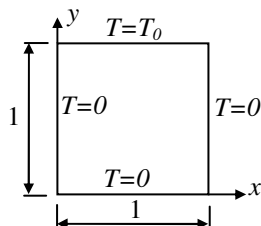
$$T(1,y,t) = 0, (0 \leq y \leq 1) \quad (13)$$

$$T(x,0,t) = 0, (0 \leq x \leq 1) \quad (14)$$

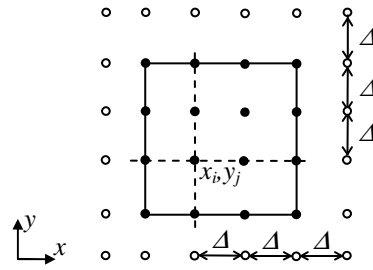
$$T(x,1,t) = T_0, (0 \leq x \leq 1) \quad (15)$$

ve  $t=0$  anındaki başlangıç şartı ise aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$T(x,y,0) = 0, (0 \leq x,y \leq 1) \quad (16)$$



Şekil 2. Plak geometrisi ve sınır şartları



Şekil 3. Eşit kenarlı plak içerisindeki noktalar • ve plak dışındaki noktalar o

### IV. ISI EŞİTLİĞİNİN AYRIK TEKİL KONVOLUSYON İLE ÇÖZÜMÜ

$x$  doğrultusunda  $N$  noktaya ayrılmış olan plak için  $x_i$  noktasındaki sıcaklık fonksiyonunun  $x$ 'e göre  $n$ . türevi ayrık tekil konvolusyon kullanılarak,

$$T^{(n)}(x_i) \cong \sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(n)}(x_i-x_k) T(x_{i+k}) \quad (17)$$

olarak yazılır. Burada kullanılan ayrık nokta sayısı  $2M+N'$ 'dir. Ayrık noktalar arası eşittir ve  $\Delta = a/(N-1)$  olarak belirlidir.  $k\Delta = (x_i-x_k)$  özelliği kullanılarak, Eşitlik (17) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$T^{(n)}(x_i) \cong \sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(n)}(k\Delta) T(x_{i+k}) \quad (18)$$

Sıcaklık fonksiyonunun  $x$ 'e ve  $y$ 'e göre ikinci türevlerinin ayrık tekil konvolusyon ifadeleri,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x_i,y_j} \cong \sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta) T(x_{i+k}, y_j) \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{x_i,y_j} \cong \sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta) T(x_i, y_{j+k}) \quad (20)$$

ve Eşitlik (11)'de verilen iki boyutlu ısı eşitliğinin ayrık tekil konvolusyon formu,

$$\sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta) T(x_{i+k}, y_j, t_l) + \sum_{k=-M}^M \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta) T(x_i, y_{j+k}, t_l) = \frac{T(x_i, y_j, t_l) - T(x_i, y_j, t_{l-1})}{dt}, \quad i, j = 0, \dots, N-1 \quad (21)$$

olarak yazılır. Eşitlik (19) ve (20), plak üzerindeki bütün ayrık noktalar için matris formunda gösterilebilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x_i,y_j} \cong \mathbf{C}_x \mathbf{T}_x \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{x_i, y_j} \cong \mathbf{C}_y \mathbf{T}_y \quad (23)$$

Burada  $\mathbf{C}_x$  ve  $\mathbf{C}_y$  ayrık tekil konvolusyon matrisleri ve  $\mathbf{T}_x$  ve  $\mathbf{T}_y$  sıcaklık matrisleridir. Konvolusyon matrisleri bant matrislerdir ve bant genişliği  $(2M+1)$ , boyutları ise  $N \times (2M+N)$  dir. Sıcaklık matrislerinin boyutları  $(2M+N) \times N$  dir.  $n=2$  için konvolusyon matrislerinin bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlıdır [16].

$$\mathbf{C}_x \Big|_{s+1, r+M+1} = \begin{cases} \delta_{\pi/\Delta, \sigma}^{(2)}((r-s)\Delta), & \text{if } -M \leq r-s \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $r = -M, \dots, 0, \dots, N-1+M$  ve  $s = 0, \dots, N-1$  olarak yazılabilir.  $x$  ve  $y$  yönlerinde eşit sayıda ayrık nokta olan plak için  $\mathbf{C}_x = \mathbf{C}_y$  dir.

#### A. Sınır koşullarının eklenmesi

Plak sol kenarındaki sınır şartları ayrık tekil konvolusyon eşitliği içine aşağıdaki bağıntıyla yerleştirilebilir.

$$T(x_{-m}, y_j) = a_m T(x_m, y_j) + (1 - a_m) T(x_0, y_j) \quad (25)$$

Sağ kenar için sınır şartı,

$$T(x_{N-1+m}, y_j) = a_m T(x_{N-1-m}, y_j) + (1 - a_m) T(x_{N-1}, y_j) \quad (26)$$

ve alt kenar için sınır şartı,

$$T(x_i, y_{-m}) = a_m T(x_i, y_{-m}) + (1 - a_m) T(x_i, y_{-m}) \quad (27)$$

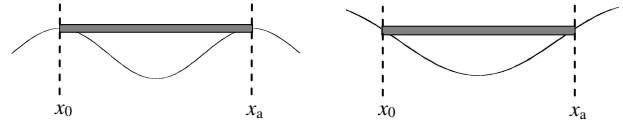
ve üst kenar için sınır şartı,

$$T(x_i, y_{N-1+m}) = a_m T(x_i, y_{N-1-m}) + (1 - a_m) T(x_i, y_{N-1}) \quad (28)$$

olarak konvolusyon matrislerine yerleştirilir. Burada  $m=1, \dots, M$ , ve  $i, j=0, \dots, N-1$ 'dir. Ayrık tekil konvolusyon yönteminde levha dışında kalan ayrık noktadaki sıcaklık değerlerinin, levha içindeki sıcaklıklar ile bağlantısı için iki farklı kabul yapılmaktadır. Bunlardan anti-simetrik kabule göre [12],  $a_m$  sabiti  $-1$ 'dir ve bu kabul Dirichlet tipi sınır şartları için kullanılır. Neumann tipi sınır şartı durumunda  $a_m$  sabiti  $1$ 'dir ve bu durum simetrik kabule karşılık gelmektedir. Sınır şartlarının konvolusyon matrislerine yerleştirilmesinin ardından Eşitlik (21) aşağıdaki matris formda yazılabilir.

$$\left[ \left( \mathbf{D}_x - \frac{1}{2\alpha dt} \mathbf{I}_x \right) \otimes \mathbf{I}_x \right] \mathbf{T}_t + \left[ \mathbf{I}_y \otimes \left( \mathbf{D}_y - \frac{1}{2\alpha dt} \mathbf{I}_y \right) \right] \mathbf{T}_t = \mathbf{T}_{t-1} \quad (29)$$

Bu eşitlikte  $\mathbf{D}_x$  ve  $\mathbf{D}_y$  karakteristik matrisler olarak adlandırılır.  $\mathbf{I}_x$  and  $\mathbf{I}_y$  ise birim matrislerdir.  $\mathbf{T}_t$ ,  $t$  anındaki sıcaklık vektörü ve  $\mathbf{T}_{t-1}$  ise  $t-1$  anındaki sıcaklık vektörüdür.



Şekil 4.  $x_0$  ve  $x_a$  sınırları için simetrik sınır şartı (solda) ve anti-simetrik sınır şartı (sağda)

$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{B}$  matrislerinin tansör çarpımıdır. Buradaki  $\mathbf{T}_t$  sıcaklık vektörü,

$$\mathbf{T}_t = \{T(x_0, y_0), T(x_0, y_1), \dots, T(x_0, y_{N-1}), T(x_1, y_0), T(x_1, y_1), \dots, T(x_{N-1}, y_{N-1})\} \quad (30)$$

olarak yazılır.

### V. ISI DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Levha içindeki sıcaklığın denge durumuna ulaştığı  $t$  anında Eşitlik (11) zamandan bağımsız hale gelir. Bu durum,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (31)$$

Laplace eşitliği ile belirlidir. Değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi ile bu eşitliğe analitik bir çözüm bulunabilir. Değişkenlerin ayrıştırılması ile sıcaklık fonksiyonu iki farklı fonksiyonun çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$T(x, y) = P(x)S(y) \quad (32)$$

Yukarıdaki sıcaklık fonksiyonunun Eşitlik 31'de yerine yazılması sonucunda iki ayrı diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{1}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = a \quad (33)$$

Burada  $a$  bir sabiti göstermektedir. Bu diferansiyel denklemlerin genel çözümü

$$P = A \cos \sqrt{a}x + B \sin \sqrt{a}x \quad (34)$$

$$S = C \cosh \sqrt{a}y + D \sinh \sqrt{a}y \quad (35)$$

olarak verilmektedir. Eşitlik (34) ve (35)'in, Eşitlik (32)'de yerine yazılmasıyla dengeye ulaşmış ısı eşitliği için aşağıdaki genel çözüm elde edilir.

$$T(x, y) = (A \cos lx + B \sin lx)(C \cosh ly + D \sinh ly) \quad (36)$$

Burada  $l = \sqrt{a}$ 'dir. Sağ, sol ve alt kenar sınır şartlarını yukarıdaki eşitliğe yazacak olursak,

$$T(x, 0) = C(A \cos lx + B \sin lx) = 0 \rightarrow C = 0 \quad (37)$$

$$T(0, y) = A(C \cosh ly + D \sinh ly) = 0 \rightarrow A = 0 \quad (38)$$

$$T(l, y) = B \sin l = 0 \rightarrow l = n\pi, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

elde edilir. Çözüm fonksiyonları,

$$T_n(x, y) = D_n \sin n\pi x \sinh n\pi y, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

olarak yazılarak genel çözüm ise bu fonksiyonların doğrusal bileşimi olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$T(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \sin n\pi x \sinh n\pi y \quad (41)$$

Üst kenar için verilen sınır şartını da genel çözüm içine yerleştirecek olursak,

$$T(x, 1) = \sum_{\pi=-\infty}^{\infty} D_n \sin n\pi x \sinh n\pi = T_0 \quad (42)$$

ve Fourier serisi ile üst kenar için verilen sabit sıcaklık sınır şartını yazarak,

$$T_0 \approx T_0 \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi x, \quad 0 < x < 1 \quad (43)$$

genel çözümdeki bilinmeyen sabit terim,

$$D_n = \frac{4T_0}{n\pi \sinh n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (44)$$

olarak belirlenir. Sonuç olarak verilen sınır şartları altında plak içindeki dengeye ulaşmış sıcaklık dağılımı için çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T(x, y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4T_0}{n\pi \sinh n\pi} \sin n\pi x \sinh n\pi y \quad (45)$$

## VI. MATLAB ORTAMINDA AYRIK TEKİL KONVOLUSYON

Yöntemin bilgisayar ortamına aktarılmasında MATLAB® yazılımı kullanılmıştır. Bu program C ve Fortran gibi programlama dillerine göre yüksek seviyededir, yani kullanıcının bilgisayarın CPU ve hafıza birimlerine ulaşmasına büyük ölçüde gerek kalmadan herhangi bir program kodu hazırlanabilir. Bu gibi nedenlerle MATLAB ortamında program kodunun hazırlanması ve sonuçların hesaplanarak görsel çıktıların elde edilmesi çok kısa zamanda gerçekleşir.

Ayrık tekil konvolusyon yöntemi için Şekil 5’de bir algoritma sunulmuştur. Hazırladığımız program içerisinde, düzeltilmiş Shannon çekirdek fonksiyonunun ikinci türevi için MATLAB fonksiyonu ve ayrık tekil konvolusyon matrisinin oluşturulması için fonksiyon ve karakteristik matrisin oluşturulması için fonksiyon ana program altında

çalışmaktadır. Örnek program satırları Tablo 1 ve Tablo 2’de verilmektedir. Sınır şartları, karakteristik matrisin oluşturulması sırasında sisteme eklenmektedir. Global matrisin oluşturulması için MATLAB içinde hazır olarak bulunan “kron(A,B)” fonksiyonu kullanılabilir. Bu fonksiyon A ve B matrislerinin tansör çarpımlarını gerçekleştirmektedir.

TABLO I  
ÇEKİRDEK FONKSİYONUNUN İKİNCİ TÜREVI İÇİN MATLAB KODU

```
function [del_2]=delta_2(k,d,sigma)
if k == 0 del_2= -1/sigma^2-pi^2/(3*d^2);
else del_2=(pi/d*sin(k*pi)/(k*d)-2*cos(k*pi)/(k*d)^2-
2*cos(k*pi)/sigma^2+2*sin(k*pi)/(pi/d*k^3*d^3)+
sin(k*pi)/(k*pi*sigma^2)+sin(k*pi)*(k*d)/(pi/d*sigma^4))
*exp(-(k*d)^2/(2*sigma^2));
end
```

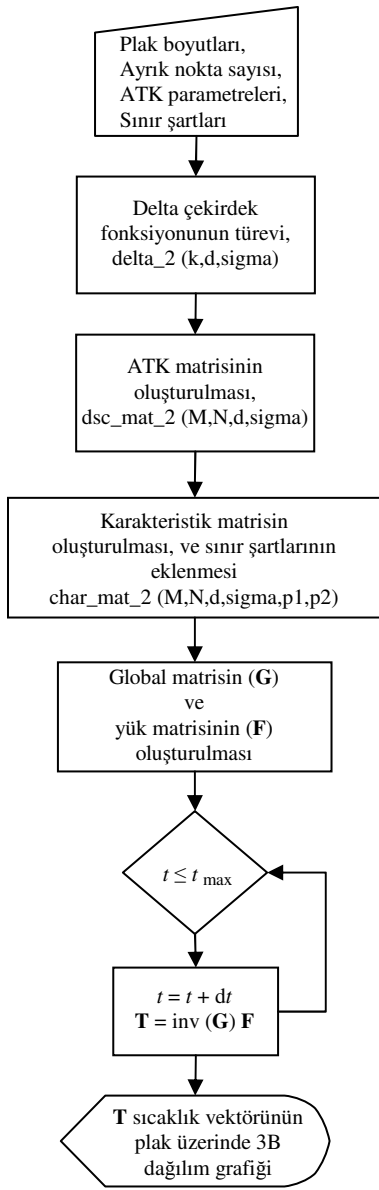
TABLO II  
AYRIK TEKİL KONVOLUSYON MATRİSİ İÇİN MATLAB KODU

```
function [mat]=dsc_mat_2(M,N,d,sigma)
mat=zeros(N,2*M+N);
for j=1:N
k=-M;
for i=j:2*M+j
mat(j,i)=delta_2(k,d,sigma);
k=k+1;
end
end
```

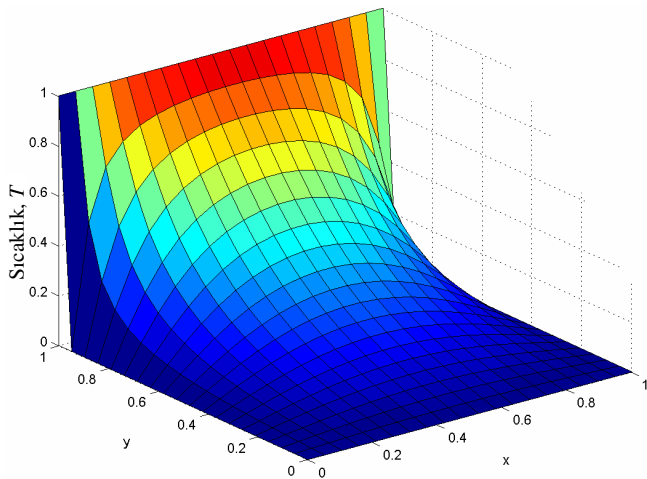
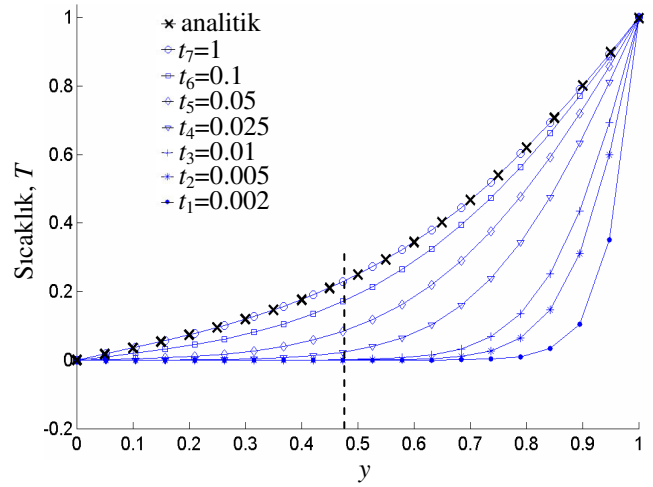
## VII. SAYISAL ÖRNEK

Bu çalışmada ısı denkleminin sayısal olarak çözümünde kullanılan zaman adımı  $dt = 0.002$ , plak içindeki ayrık nokta sayısı  $N = 20$  olarak alınmıştır. Nokta aralığı  $\Delta = 0.0526$  olmaktadır. Ayrık tekil konvolusyon parametrelerinden  $M = 20$  olarak ve  $\sigma = 3.8 \Delta$  olarak alınmıştır. Şekil 2’de verilen levhada belirtilen sınır şartlarını kullanılarak ayrık tekil konvolusyon çözümü sonucunda hesaplanan sıcaklık dağılımı  $t = 1s$  için Şekil 6’da gösterilmektedir.

Levha içerisindeki sıcaklık dağılımının denge durumuna ulaşana kadar farklı zamanlarda hesaplanan sıcaklık dağılımları ile denge durumundaki analitik çözüm ile elde edilen dağılım Şekil 7’de gösterilmektedir. Denge durumu  $t = 0.51s$  için elde edilmektedir (Şekil 8).



Şekil 5. Ayrık tekil konvolusyon yöntemi için örnek bir algoritma

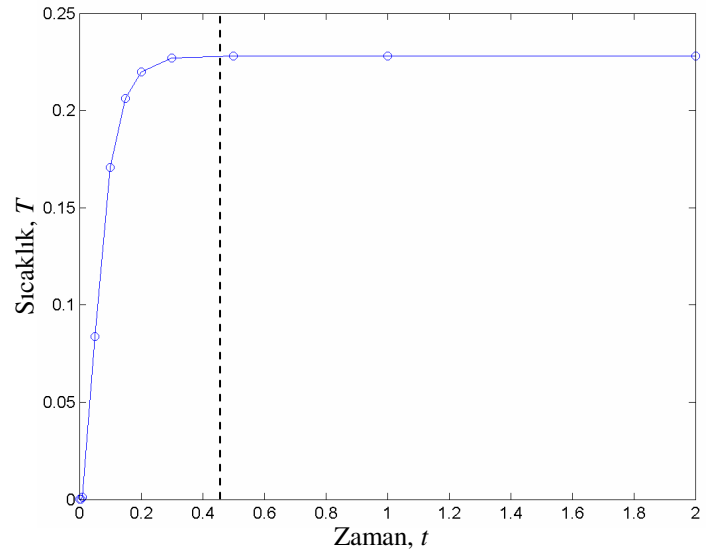
Şekil 6. Denge durumundaki plakta sıcaklık dağılımı,  $T_0=1$ Şekil 7.  $x=0,47$  için  $y$  doğrultusundaki sıcaklık dağılımı

### VIII.SONUÇ

Burada ayrık tekil konvolusyon yöntemi özetlenerek zamana bağlı ısı yayılması denkleminde uygulanması anlatılmıştır. Yöntem MATLAB ortamında hazırlanan bir bilgisayar programı ile tanıtılmıştır.

Kabul edilen Dirichlet tipi sınır şartları altında yöntem ile elde edilen sonuçlar ile denge durumuna ulaşmış levha için analitik çözüm karşılaştırılmıştır. 0,002s zaman aralıkları ile yapılan ayrık tekil konvolusyon çözümü sonrasında  $t=0,51s$ 'de levha içindeki sıcaklık dağılımı denge durumuna ulaşmıştır. Denge durumunda elde edilen ayrık tekil konvolusyon çözümü ile değişkenlerin ayrıştırılması yöntemiyle elde edilen sonuçlar uyumluluk göstermektedir.

Ayrıca bu çalışmada, MATLAB ortamında ayrık tekil konvolusyon yönteminin uygulanabilmesi için bir algoritma verilmektedir.

Şekil 8.  $x=y=0,47$  noktası için sıcaklığın zaman ile değişimi

## IX. KAYNAKLAR

- [1] S. A. Orszag, Comparison of pseudospectral and spectral approximations, *Studies in Applied Mathematics*, Vol 51, pp. 253–259, 1972.
- [2] D. Gottlieb, S. A. Orszag, “Numerical analysis of spectral methods: theory and applications”, SIAM, 1987.
- [3] R. Vichnevetsky, J. B. Bowles, “Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations”, SIAM, Philadelphia, 1982.
- [4] C. Shu, “Differential quadrature and its applications in engineering”, Springer Verlag, 2000.
- [5] CW, Bert, M. Malik, “Differential quadrature in computational mechanics: a review”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol 49, pp. 1–27, 1996.
- [6] R.E. Bellman, J. Casti “Differential quadrature and long-term integration”, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 34, pp. 235–238, 1971.
- [7] O.C. Zienkiewicz, “The finite element method in engineering science”, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [8] J.N. Reddy, “An introduction to the finite element method”, McGraw-Hill, New York, 2005.
- [9] G.E. Forsythe, W.R. Wasow, “Finite difference methods for partial differential equations”, Wiley, New York, 1960.
- [10] R.J., LeVeque, “Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems”, *Cambridge Texts in Applied Mathematics* (No. 31), 2002.
- [11] D. C. Wan, B. S. V. Patnaik, and G. W. Wei, “A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol 40, pp. 199–228, 2001.
- [12] G. W. Wei, “Discrete singular convolution for the solution of the Fokker–Planck equation”, *J. Chem. Phys.* Vol 110, pp. 8930, 1999.
- [13] G. W. Wei, “Vibration analysis by discrete singular convolution”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 244 (3), pp. 535–553, 2001.
- [14] Y. B. Zhao, G.W. Wei, Y. Xiang, “Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol 39, pp.65–88 (2002).
- [15] G. W. Wei, Y. B. Zhao, Y. Xiang, “A novel approach for the analysis of high-frequency vibrations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 257(2), pp. 207–246, 2002.
- [16] A. Seçgin, A. Saide Sargül, "Free vibration analysis of symmetrically laminated thin composite plates by using discrete singular convolution (DSC) approach: Algorithm and verification", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 315, pp. 197–211, 2008.
- [17] Ö. Civalek, “Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol 44, pp. 725–731, 2008.
- [18] Ö. Civalek, "Vibration analysis of conical panels using the method of discrete singular convolution", *Commun. Numer. Meth. Engng*, Vol 24, pp. 169–181, 2008.
- [19] Ö. Civalek, “A four-node discrete singular convolution for geometric transformation and its application to numerical solution of vibration problem of arbitrary straight-sided quadrilateral plates”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol 33, pp. 300–314, 2009.
- [20] A. Seçgin, A. Saide Sargül, "A novel scheme for the discrete prediction of high-frequency vibration response: Discrete singular convolution–mode superposition approach", *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2008.08.031
- [21] S. Y. Yang, Y. C. Zhou, G. W. Wei, “Comparison of the discrete singular convolution algorithm and the Fourier pseudospectral method for solving partial differential equations”, *Computer Physics Communications*, Vol 143, pp. 113–135, 2002.
- [22] Z. Shao, Z. Shen, "A Generalized Higher Order Finite-Difference Time-Domain Method and Its Application in Guided-Wave Problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol 51 (3), pp. 856–861, 2003.
- [23] Z. Shao, G. W. Wei, S. Zhao, "DSC time-domain solution of Maxwell's equations", *Journal of Computational Physics*, Vol 189, pp. 427–453, 2003.
- [24] D.A. Popov, D.V. Sushko, “Computation of singular convolutions”, *Applied Problems of Radon Transform* (Editör: Simon Gindikin) *American Mathematical Society Translations, Series 2*, Vol 162, pp. 43–128, 1994.
- [25] C.E. Shannon, “Communication In The Presence Of Noise”, *Proceedings of the IEEE*, Vol 86 (2), pp. 447 – 457, 1998.
- [26] A.J. Jerri, “The Shannon sampling theorem—Its various extensions and applications: A tutorial review”, *Proceedings of the IEEE*, Vol 65 (11), pp.1565 – 1596, 1977.