



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

Bilim ve Teknoloji Dergisi A-Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik  
Cilt: 14 Sayı: 2 2013  
Sayfa: 119-134

## ARAŞTIRMA MAKALESİ /RESEARCH ARTICLE

Ayşe ARIK<sup>1</sup>, Başak BULUT<sup>1</sup>, Meral SUCU<sup>1</sup>

### FİNANSAL RİSKLERİN UÇ DEĞER KURAMI İLE ÖLÇÜLMESİ

#### ÖZ

Bu çalışmada; finansal piyasalardaki uç durumlar, uç değer teoreminin, *en büyük değerler* ve *eşik sınırın üzerinde kalan değerler* yöntemlerine bağlı olarak incelenmiştir. Risk analizinin ölçülmesinde ise riske maruz değer (VaR), beklenen açık (ES) ve getiri seviyesi gibi risk ölçüm araçlarından faydalanılmıştır. Finansal piyasalarda işlem gören İMKB-100 getiri endeksi üzerine işlem yapan bir yatırımcının riskleri analiz edilerek farklı yüzdelik değerleri için risk ölçümleri yapılmış ve yöntemlerin performansları karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Uç değer kuramı, Riske maruz değer, Beklenen açık, Getiri seviyesi

### MEASURING FINANCIAL RISKS WITH EXTREME VALUE THEORY

#### ABSTRACT

The extreme values in financial markets have been investigated in this study by using two different methods of extreme value theory: *block maxima method* and *peaks over threshold method*. Value at Risk, expected shortfall and return level are the risk tools that are taken benefit for risk analysis. Risks of an investor that has a position on IMKB-100 return index have been analyzed by measuring risk values for different percentages and performances of the methods have been compared.

**Keywords:** Extreme value theory, Value at risk, Expected short-fall, Return level

<sup>1</sup>Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, 06800 Beytepe ANKARA  
E-posta: aysearik@hacettepe.edu.tr,  
E-posta: basakbulut@hacettepe.edu.tr  
E-posta: msucu@hacettepe.edu.tr

## 1. INTRODUCTION

Son yıllarda tüm dünyada yaşanan ekonomik krizler, piyasalarda oluşan dalgalanmalar ve ani değişimler nedeniyle etkin bir risk yönetiminin gerekliliği öne çıkmıştır. Finansal piyasalarda sıklıkla karşılaşılan *piyasa, kredi ve sigorta* risklerinin yanı sıra *uç değer bir olayın ortaya çıkma riski* de risk yönetiminin her aşamasında incelenmesi gereken durumlar arasındadır. Özellikle son yıllarda finansal piyasalarda meydana gelen büyük fiyat değişimleri, risk yönetiminin önemini ortaya koymuştur. Bu nedenle düşük olasılıkla gerçekleşmesine rağmen çok yüksek kazanç ya da kayıplara neden olabilen olayların modellenmesi önem kazanmıştır.

Uç değer olaylar ile ilgili cevaplanması gereken ilk soru, bu olayların “var olan durumu ne ölçüde etkileyeceği ve optimal durumdan ne ölçüde uzaklaşmasına neden olacağı”dır. Uç değerlerin modellenmesinde kullanılabilecek güçlü alt yapıya sahip bir yöntemin bu sorunun cevabı olacağı açıktır (Gilli and Kellezi, 2006). Bu nedenle geçmiş yıllardan bu yana uç değer verilerinin incelenmesinde, uç değer kuramından (UDK) faydalanan çok sayıda makale literatüre katkı sağlamıştır.

1928 yılındaki çalışmasında Fisher-Tippet, UDK’da üç tür limit dağılımı olduğunu, Weibull (1939) ve Gumbel (1941) ise UDK’nın uygun dağılımlara bağlı olarak modellenebileceğini göstermiştir. Longin (2000) çalışmasında UDK’yı VaR hesaplamalarına uygulamıştır. Genç ve Selçuk (2004) gelişmekte olan 9 farklı piyasaya ait günlük borsa getirilerini incelemiş, varyans-kovaryans ve benzetim yöntemlerinden faydalanarak UDK ile VaR tahminlerini elde etmişlerdir. Gilli ve Kellezi (2006) kuyruk riski ölçümlerinin ve ilgili güven aralıklarının hesaplanmasında birçok borsa verisi üzerinde inceleme yapmışlardır. McNeil (1999) eşik sınırın üzerinde kalan aşkın değerler (peaks over treshold, POT) modeli üzerine yoğunlaşmış ve bu model yardımıyla VaR ve ES değerleri için tahminler elde etmiştir. McNeil bu çalışmasında POT yardımıyla elde edilen VaR tahmin edicisini, standard VaR hesaplamasına bir alternatif olarak önermiştir. Embrechts ve arkadaşları ile Beirlant ve arkadaşlarının UDK ile ilgili çalışmaları literatüre önemli bir katkı sağlamıştır (Embrechts et al, 1997), (Beirlant et al, 1996). (Embrecht, 1999). UDK’nın sigorta, reasürans ve finansal risk yönetimi açısından önemli olduğunu belirterek, sigorta sektöründe

karşılaşılabilecek katastrofik risklere bir örnek olan endüstriyel bir yangın hasar verisi ile uygulama yapmıştır.

Çelik ve Kaya (2010) IMKB-100 endeksi için VaR hesaplamaları yapmış ve UDK yardımıyla hesaplanan VaR tahminlerinin volatilitesi yüksek piyasalarda daha güvenilir olduğunu ortaya koymuştur.

Demireli ve Taner (2009) Euro, altın ve ABD Doları’ndan oluşan eşit ağırlıklı bir portföyde VaR ölçümleri yapmış ve portföye ilişkin getiri serilerinin normal dağılım göstermesi durumunda varyans-kovaryans yönteminin daha sağlıklı sonuçlar verdiğini, normal dağılıma uymayan seriler için ise Monte Carlo benzetim yönteminin daha uygun olduğunu belirtmişlerdir.

Çifter ve arkadaşları (2007a), Türk parası cinsinden bir yıllık bileşik faiz oranlarına ilişkin VaR hesaplamalarını; normal GARCH, asimetric dağılımlı GARCH, sabit ve değişken eşikli Genelleştirilmiş Pareto dağılımı (GPD) ve beklenen kuyruk kaybı ile modellemişlerdir. Model sonuçları geriye dönük testler yardımıyla karşılaştırılıp, değerlendirilmiştir. Bunu izleyen çalışmalarında ise, günlük ABD Doları/Türk Lirası çapraz kuru için çeşitli yöntemler yardımıyla VaR öngörülerinde bulunmuş; söz konusu modellerin öngörü performansları çeşitli geriye dönük testler ile karşılaştırılmıştır (Çifter et al., 2007b).

Goncu ve arkadaşları (2012) IMKB verilerini UDK yardımıyla modellemiş ve modellemede Gumbel, Frechet ve Weibull dağılımlarından yararlanılarak VaR hesaplamış ve geriye dönük test sonuçlarını incelemişlerdir.

Bu çalışma kapsamında ise IMKB-100 endeksi getiri serisi incelenmiş ve bu getiri endeksine dayalı bir hisse senedinde kısa pozisyona girmiş bir yatırımcının karşı karşıya kalabileceği riskler farklı dağılımlar yardımıyla analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Kupiec ve Christoffersen geriye dönük testleri ile incelenmiş ve bu getiri serisine uygun optimal sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

Çalışmanın İkinci Bölümü’nde, kullanılacak risk ölçüm araçları tanımlanmıştır. Üçüncü Bölüm’de UDK incelenmiştir. Çalışmanın Dördüncü Bölümü’nde, ilk olarak, IMKB-100 endeksi, UDK kapsamında *en büyük değerler kümesi ve eşik değer üzerinde kalan aşkın*

değerler yöntemleri ile modellenmiştir. Bu endekse dayalı bir hisse senedinde kısa pozisyona sahip bir yatırımcının riski de her iki yöntemle göre hesaplanarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

## 2. RİSK ÖLÇÜM ARAÇLARI

Finansal risk yönetiminde karşılaşılan en önemli sorun geleceğin belirsizliğidir. Belirsizliğin öngörülmesinde en sık kullanılan risk ölçüm araçları, uç yüzdelik (extreme percentage) değerlerinin tahmini üzerine kuruludur. Bu tahmin yöntemlerinde bir değişkenin, belirli bir değer üzerinde kalması olasılığı ile ilgilenilmektedir. Diğer taraftan tek bir risk ölçüm yöntemi, genellikle, tek başına tüm yönleriyle risk analizi yapmaya yeterli olmayabilir. Bu nedenle, pratikte tek bir yöntemle bağlı kalımsızın farklı yöntemlerin kullanılması ve risk ölçümünde gözden kaçabilecek durumların en iyi şekilde yorumlanması gerekmektedir (Bozkuş, 2005). Bu kapsamda en çok kullanılan risk ölçüm araçları *VaR*, *ES* ve *getiri seviyesi (return level, RL)*'dir.

### 2.1. Riske Maruz Değer

*VaR*, var olan piyasa koşullarında, belirli bir zaman ve güven düzeyinde ortaya çıkması beklenen maksimum kayıp tutarını gösteren bir risk ölçüm aracıdır (Jorion, 2001). *VaR* günümüzde birçok uluslararası finansal kuruluş tarafından kullanılmaktadır ve Basel standartlarında da riske maruz değer için önerilen risk ölçüm yöntemlerindedir.

Riske maruz değer hesaplaması, genellikle, bir portföyün sermaye yeterliliğini ölçmek için kullanılmakta ve ortaya çıkan hasarların ne ölçüde karşılanabildiğini araştırılmaktadır. Bu yöntemin finansal risk yönetiminde standart ölçü birimi olarak kullanılmasında, kavramsal basitliği ve kolaylığı büyük rol oynamaktadır. *F* sürekli bir dağılım fonksiyonu olmak üzere bir finansal araçtan belirli bir süre içerisinde elde edilen pozitif ya da negatif getirileri gösteren bir *X* rastlantı değişkenine ilişkin riske maruz değer  $VaR_p$ , *F* dağılımının *p*. yüzdeliği olarak tanımlanabilmekte ve

$$VaR_p = F^{-1}(1-p) \quad (1)$$

şeklinde gösterilmektedir. *F* dağılım fonksiyonunun tersini gösteren  $F^{-1}$  fonksiyonu "yüzdelik fonksiyonu" olarak da adlandırılmaktadır

(Gilli and Kellezi, 2006). *VaR* tutarının hesaplanmasında kullanılan parametreler göreceli olup, var olan duruma ve portföyün yapısına bağlı olarak belirlenmektedir. Güven düzeyi parametresi ne kadar yüksek olursa elde edilen *VaR* değerleri de o kadar yüksek olacaktır. Portföyün yapısı hızlı değişimler gösteriyor ya da değişimlerden kolay etkileniyorsa elde tutma süresinin yükselmesi düşük *VaR* sonuçları elde edilmesine neden olabilecektir.

Türkiye'de Bankacılık Düzenleme ve Denetleme Kurumu (BDDK) yönetmeliğine göre bankaların elde tutma süresi 10 gün, güven düzeyi ise %99 olarak belirlenmelidir. Bu çalışmada %99 güven düzeyinin yanında %95 ve %99,9 durumları için de incelemeler yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

### 2.2. Beklenen Kayıp

Bir diğer faydalı risk ölçüm aracı olan *ES*, *kuyruk koşullu beklenen değer (tail conditional expectation, CVaR)* olarak da adlandırılmaktadır. Bu ölçüm aracında, *VaR* değerinin üzerinde gerçekleşmesi beklenen hasarların büyüklüğünün tahmin edilmesi ile ilgilenilmektedir. *Beklenen kayıp* değeri aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Gilli and Kellezi, 2006).

$$ES_p = E(X | X > VaR_p) \quad (2)$$

*ES*'nin etkin bir biçimde risk ölçümü yapabilmesi için verilerin durağanlığı önem taşımaktadır. Ayrıca geçmişteki tahminlerin doğruluğunu sınavan uygun bir *backtesting* yönteminin seçimi de, *ES*'nin etkinliğini belirleyen faktörler arasındadır.

Bozkuş (Bozkuş, 2005) *VaR* yöntemlerinin, kalın kuyruk özelliğine sahip portföylerde pozitif sapma gösterdiği sonucuna ulaşmıştır. Çalışmasında beklenen kayıp yönteminin kuyruk riski taşıması ve *VaR* yöntemine göre daha tutarlı olması nedeniyle daha uygulanabilir olduğu sonucuna ulaşmıştır.

### 2.3. Getiri Seviyesi

Birbirinden bağımsız ve eşit uzunluktaki dönemlerin her birinden elde edilen en büyük gözlem değerlerinin dağılım fonksiyonu  $H$  olmak üzere getiri seviyesi,

$$R_n^k = H^{-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

olarak ifade edilmektedir. Bu hesaplama,  $n$  uzunluğundaki bir veri setinin her bir  $k$ 'nci periyodunda ortaya çıkması beklenen aşkın değerlerin elde edilmesi için yapılmaktadır. Bir portföyde ortaya çıkabilecek maksimum hasarın hesaplanmasında kullanılan bu yöntem, *riske maruz değer* yönteminden daha ihtiyatlı sonuçlar üretmektedir (Gilli and Kellezi, 2006).

### 3. UÇ DEĞER KURAMI

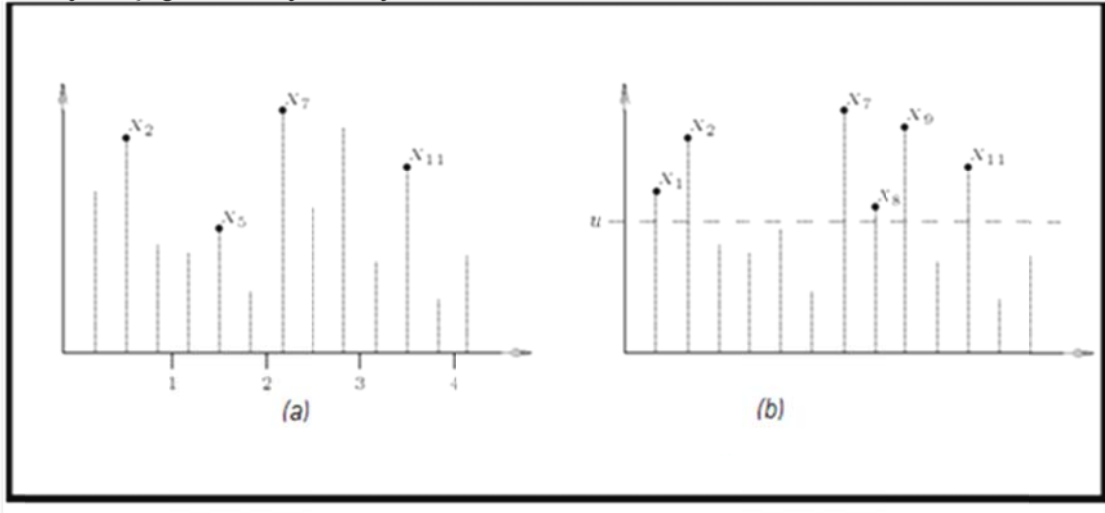
UDK; oluşması olası uç durumların istatistiksel olarak incelenbilmesine ve getiri sürecinin temelinde yatan dağılım ne olursa olsun, çok büyük değerlerin gerçekleşme olasılıklarının, basit bir fonksiyon yardımıyla açıklanabilmesine olanak sağlamaktadır (Caserta and De Vries, 2003).

UDK uç değerlerin modellenmesinde, merkezi limit teoreminin, bağımsız ve özdeş rastlantı değişkenlerin toplamlarının modellenmesinde oynadığı gibi temel bir rol oynamaktadır (Gilli and Kellezi, 2000). Merkezi limit teoremi, örneklem toplamı ya da ortalamaların limitteki dağılımlarının *normal dağılıma* yaklaştığını ortaya koymaktadır.

Benzer şekilde uç değer kuramı da rastlantı değişkenlerinin limitteki davranışlarını ele almaktadır (McNeil, 1997). UDK örneklem büyüklüğü arttıkça, minimum ve maksimum rastlantı değişkenlerinin dağılımları hakkında bilgi vermekte ve limit teoreminin uygulanmasına olanak sağlamaktadır (Caserta and De Vries, 2003).

Gerçek bir veri kümesindeki uç değerler, iki farklı yaklaşım ile saptanmaktadır. İlk yaklaşımda; günlük kayıpları ya da getirileri gösteren bir rastlantı değişkeninin ardışık bir zaman süresi (ay ya da yıl) içerisinde aldığı en büyük (ya da en küçük) değerler ile ilgilenilmektedir. Seçilen bu gözlem değerleri uç olayları oluşturmakta ve en büyük değerler kümesi (block maxima) olarak adlandırılmaktadır. Şekil (1) (a)'daki  $x_2, x_5, x_7$  ve  $x_{11}$  gözlem değerleri, üç gözlemin dört yıllık bir zaman diliminde aldığı en büyük değerleri göstermektedir.

İkinci yaklaşımda ise, verideki bir eşik değerinin aşılması durumundaki gözlem değerleri ile ilgilenilmektedir. Şekil (1) (b)'deki  $x_1, x_2, x_7, x_8, x_9$  ve  $x_{11}$  değerleri ise  $u$  eşik değerini aşan uç olayları göstermektedir.



Şekil 1. En büyük değerler (a),  $u$  eşik değerinin üzerinde kalan aşkın değerler (b)

### 3.1. Fisher-Tippet Teoremi

Bu teorem; örneklem uç değerlerinin limitteki davranışlarını tanımlamakta olup, uç değer kuramının en temel sonuçlarından biridir.

$(X_1, X_2, \dots)$  herhangi bir  $F(x)$  dağılımından gelen, bağımsız ve özdeş dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olmak üzere, ilk  $n$  gözlem içerisinde yer alan en büyük değer  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  ile gösterilmektedir.

$c_n > 0$  ve  $d_n \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $(M_n - d_n)/c_n$  normalleştirilmiş uç değer dizisini ifade etmektedir. Bozulmamış (non-degenerate) bir  $H$  dağılım fonksiyonu için,  $n \rightarrow \infty$  iken

$\Pr\{c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x\} = F^n(c_n x + d_n) \xrightarrow{d} H(x)$  olarak yazılabilmesi, "*F dağılımı H'nin maksimum çekim yöresindedir.*" biçiminde açıklanmakta ve  $F \in MDA(H)$  ile gösterilmektedir.

$$P[X \leq x] = \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}, \quad 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad \sigma > 0 \quad (3)$$

Fisher-Tippet teoremi aşkın değerlerin dağılımının nerede değerlendirilmesi gerektiği ile ilgili bir yaklaşım sunmaktadır. Bu yöntem eşik sınırın üzerinde kalan en büyük değerler (*peaks over threshold, POT*) olarak da adlandırılmaktadır.

Bir  $X$  rastlantı değişkenine ilişkin  $F(x)$  dağılım fonksiyonunun nerede ele alınması gerektiği ile ilgili sorun Şekil (2)'de ifade edilmeye çalışılmıştır. Buna göre belirli bir  $u$  eşik değerinin üzerinde kalan  $x$  değerlerinden elde edilen  $F_u(x)$  dağılım fonksiyonu ile ilgilenilmektedir.

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (4)$$

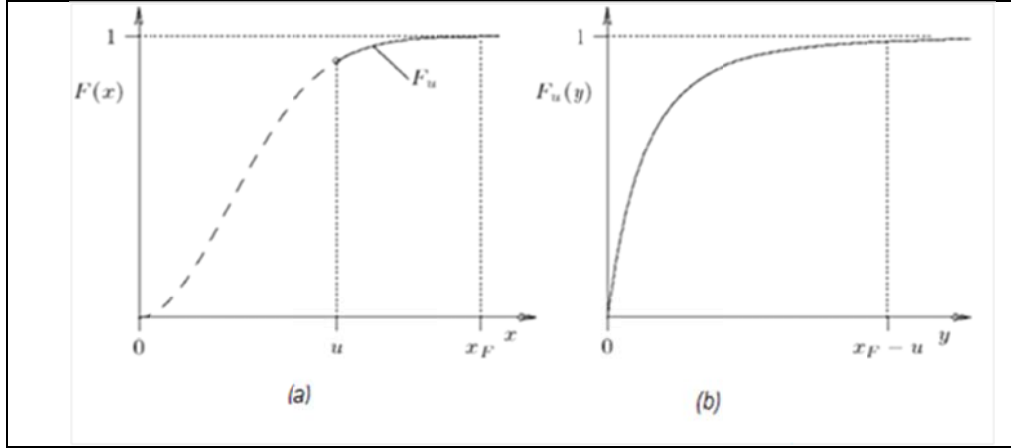
olarak ifade edilmektedir.

Fisher ve Tippet (1928) çalışmasında;  $F \in MDA(H)$  olması durumunda,  $H$ 'nin uygun  $\xi$  değerleri için  $H_\xi$  türünde olduğunu göstermiştir (McNeil, 1997).

Normalleştirilmiş uç değerlerin böyle bir  $H$  dağılımına yakınsadığı biliniyorsa limitteki dağılım, uygun  $\xi, \mu$  ve  $\sigma$  parametreleri ile bir uç değer dağılımı gösterecektir.

Bu dağılımlar aşağıdaki gibi tek bir genelleştirilmiş dağılım ailesinin üyesi olarak gösterilebilir:

$F_u(x)$  dağılım fonksiyonu, "*koşullu aşkın değer fonksiyonu*" (conditional excess distribution function) adını almaktadır.  $X$  rastlantı değişkeni için;  $u$ , verinin eşik değerini,  $y = x - u$  aşkın değerlerini ve  $x_F \leq \infty$  ise  $F(x)$  dağılım fonksiyonunun sağ bitim noktasını göstermek üzere, koşullu aşkın değer fonksiyonu,



Şekil 2.  $F(x)$  dağılım fonksiyonu (a) ve  $u$  koşulunda  $F_u(x)$  dağılım fonksiyonu (b)

Eşik değerin üzerinde çok az sayıda gözlem değerinin bulunması durumunda  $F_u(y)$  dağılım fonksiyonunun tahmin edilmesinde çeşitli zorluklarla karşılaşılabilir. UDK, koşullu aşkın değer fonksiyonu  $F_u(y)$ 'nin tahmin edilmesinde karşılaşılan sorunların çözümünde oldukça faydalıdır (Gilli and Kellezi, 2000).

Pickands-Balkema-de Haan Teoremi, yüksek bir eşik değerini aşan gözlemlerin limitteki dağılımlarının GPD yardımıyla modellenebileceğini ortaya koymaktadır (McNeil, 1997).

$u$ , büyük bir eşik değeri göstermek üzere, koşullu aşkın değer dağılım fonksiyonu  $F_u(y)$ , GPD yardımıyla yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty \text{ ve } 0 \leq y \leq (x_F - u)$$

$$G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Genellikle finansal kayıplara ilişkin bir üst sınır konulamayacağından, kalın kuyruklu dağılımların modellenmesinde, yalnızca, şekil parametresi olan  $\xi$ 'nin pozitif değerler aldığı dağılımların uygun olacağı yorumu yapılabilir (Gilli and Kellezi, 2000).

### 3.2. Tanısal Yöntemler

Eşik değere dayalı yöntemlerde karşılaşılan en büyük zorluklardan biri eşik değer seçiminde kullanılacak kesin bir ölçütün bulunmamasıdır.

Eşik değerin çok yüksek seçilmesi durumunda, etkin uç değer parametrelerinin elde edilebilmesi için gereken yeterli sayıda uç değer bulunamayacak ve tahmin edicilerin varyansı yüksek çıkacaktır. Diğer taraftan eşik değerin çok küçük seçilmesi durumunda ise GPD, eşik değerin üzerinde kalan uç değerlere iyi uyum gösteremeyecek ve buna bağlı olarak yanlış tahmin ediciler elde edilebilecektir. Veri kümesinin modele uyum sağlamasına bağlı olarak, optimal eşik değerin seçimi ile ilgili literatürde oldukça çok sayıda çalışma vardır (Smith, 2003).

Şu ana dek  $u$  eşik değerinin seçiminde beklenen performansın otomatik olarak elde edilmesini sağlayan bir algoritma geliştirilememiştir. Diğer taraftan eşik değer seçiminde; Gumbel grafikleri, QQ grafikleri, ortalama fazlalık grafiği gibi çeşitli veri çözümlemesi (exploratory data analysis) araçlarından da faydalanılmaktadır (Gilli and Kellezi, 2000).

Ortalama fazlalık grafiği (mean excess plot) herhangi bir modele uyum kestirimi yapılmadan önce kullanılmaktadır (Smith, 2003).  $u$  eşik değeri göstermek üzere,  $X$  rastlantı değişkenine ilişkin ortalama fazlalık fonksiyonu  $e(u)$  aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir (Bensalah, 2000);

$$e(u) = E(X - u | X > u), \quad 0 \leq u < x_F \quad (6)$$

### 4. GERİYE DÖNÜK TESTLER

Kullanılan risk ölçüm yöntemlerinin performansı geriye dönük testler yardımıyla değerlendirilebilmektedir. Goorbergh ve Vlaar

(1999) geriye dönük testleri, *VaR* hesaplamasının yapıldığı örnekleme ortaya çıkan ve öngörülenden daha yüksek olarak gerçekleşen olayların sayılması olarak tanımlanmaktadır. *VaR* değerini aşan gözlem değerleri “*VaR break*” olarak adlandırılmaktadır (Costello, Asem ve Gardner, 2008).

Kupiec ve Christoffersen testleri bu amaçla kullanılan popüler geriye dönük test yöntemleri olarak karşımıza çıkmaktadır.

#### 4.1. Kupiec Testi

Yaygın kullanıma sahip Kupiec testi, belirli bir güven aralığı ve örneklem büyüklüğü için ortaya çıkan *VaR break* sayısının binom dağılımına uyacağı varsayımına dayanmaktadır. Bu testte,  $T$  toplam gözlem sayısını,  $x$  aşım sayısını,  $\alpha$  testte önceden tanımlı beklenen aşım oranını ve  $f = \frac{x}{T}$  gözlenen aşım oranını ifade etmek üzere,  $f$  ile  $\alpha$  değerinin birbirine eşit olup olmadığı test edilmektedir. Kupiec (Kupiec,1995) bu testin en iyi şekilde olabilirlik oranına (likelihood ratio) göre ifade edilebileceğini açıklamıştır. Test istatistiği,

$$LR=2 \left\{ \log[f^x(1-f)^{T-x}] - \log[\alpha^x(1-\alpha)^{T-x}] \right\} \quad (7)$$

şeklinde olup, test sonucu serbestlik derecesi 1 olan  $\chi^2$  dağılım tablo değeri ile karşılaştırılmaktadır.

#### 4.2. Kristoffersen Testi

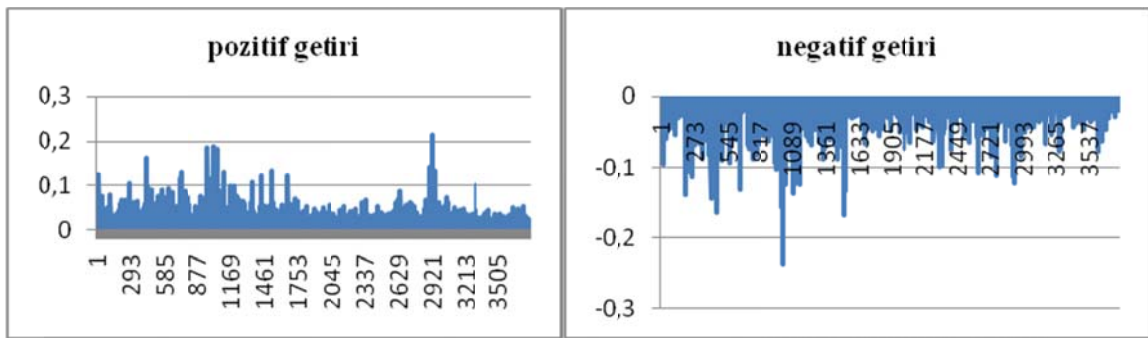
Christoffersen testi, *VaR break* sayısı ve aşım oranının hesaplanmasından çok aşımın ortaya çıkma olasılığı ile ilgilenmektedir. Christoffersen testi de Kupiec testine benzer şekilde olabilirlik oran testinden yararlanmaktadır. Ancak bu testte aşımın bağımsızlık durumları için ayrı bir istatistik değeri eklenmiştir. Christoffersen testi için test istatistiği;

$$LR = -2 \ln(L(\alpha)) / L(p) \quad (8)$$

biçiminde ifade edilmektedir. (Christoffersen,1998)

### 5. UYGULAMA

Çalışmanın bu bölümünde; 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasında İMKB-100 endeksi günlük kapanış fiyat değerlerinden elde edilen getiri değerleri, uç değer kuramının *en büyük değerler kümesi* ve *eşik değerin üzerinde kalan değerler* yöntemleri ile ayrı ayrı incelenmiş ve risk analizleri yapılmıştır. Yapılan analizde İMKB-100 endeksi üzerine yazılmış bir hisse senedinde kısa pozisyona girmiş bir yatırımcının durumu ele alınmış ve yorumlar bu kapsamda yapılmıştır. Bu hisse senedi endeksinden elde edilen günlük pozitif ve negatif getiri oranlarına Şekil.3'te yer verilmiştir.



Şekil 3. 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasındaki günlük İMKB-100 getiri endeksinin pozitif ve negatif getiri oranları

Şekil 3'teki grafikler incelendiğinde getiri oranlarının -0,2 ile 0,2 arasında değişim gösterdiği ve sıfır ortalama etrafında yoğunlaştığı, ancak çok sayıda uç değer de olduğu gözle çarpılmaktadır. Ayrıca 1000'inci ve 3000'inci değerlere karşılık gelen günlerde

sırasıyla minimum ve maksimum sapmaların meydana geldiği görülmektedir. Getiri serisinin incelenen dönem içerisinde durağan bir yapıya sahip olmadığı zaman serisi analizi teknikleri ile elde edilmiştir.

Risk analizleri yapılırken ilk olarak *VaR* hesaplamasına başvurulmuştur. Diğer taraftan yöntemde kullanılan normallik varsayımı nedeniyle kalın kuyruklu dağılımlara ilişkin potansiyel maksimum kayıp *gerçek değerinin altında* tahmin edileceğinden (Tsay, 2010), *ES* ve *RL* yöntemlerine göre de hesaplamalar yapılmıştır.

### 5.1. En Büyük Değerler Kümesi Yöntemi

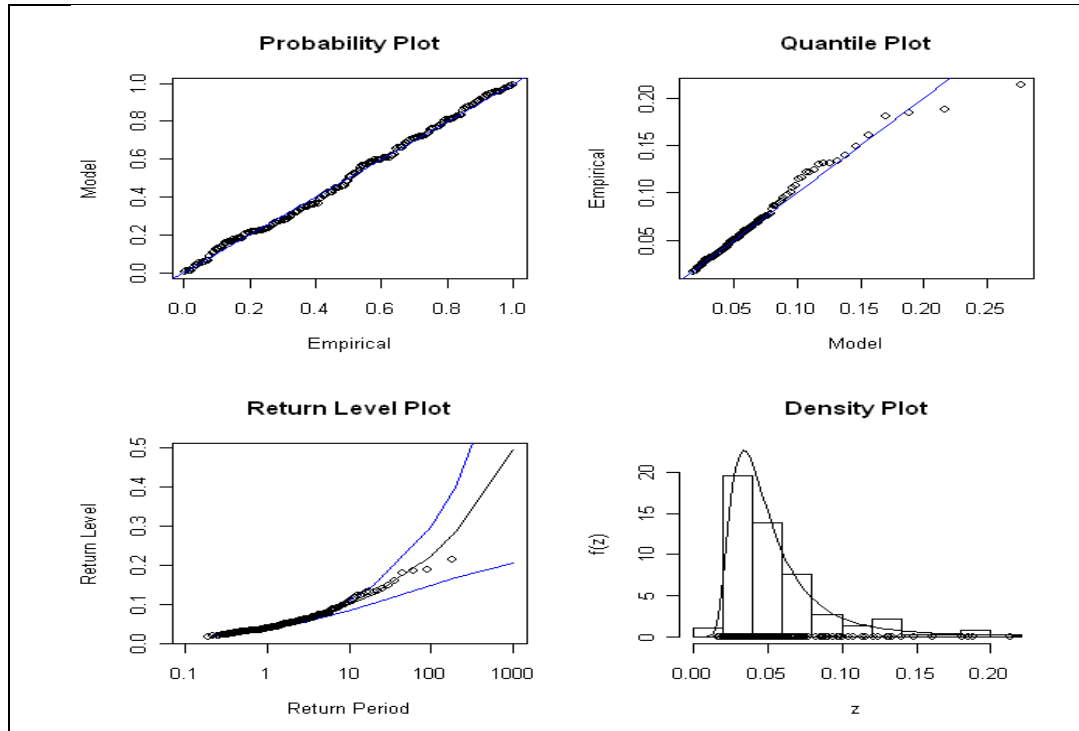
En büyük değerler kümesi yöntemi ile analiz yapabilmek için öncelikle verinin belirli alt gruplara ayrılması gerekmektedir. Bu nedenle 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasındaki getiri serisinin, aylık ve haftalık maksimum getiri endeksleri elde edilmiş ve incelemeler bu veriler doğrultusunda yapılmıştır.

Aylık maksimum getiri endeksi elde edilirken (hafta sonları çıkarıldığından) 21 günlük periyotlar dikkate alınırken, haftalık maksimum getiri değerlerinin oluşturulmasında ise 5'er günlük periyotlar dikkate alınmıştır.

Aylık ve haftalık maksimum getiri değerleri genelleştirilmiş uç değer dağılımına (generalized extreme value distribution, GEV) göre modellenmiştir. En çok olabilirlik tahmin yöntemi ile elde edilen yer (location), ölçek (scale) ve şekil (shape) parametre tahmin değerleri ile standart hataları Tablo 1' de verilmiştir.

Tablo 1. Aylık ve Haftalık maksimum getiri değerlerinin GEV dağılımına göre en çok olabilirlik tahmin yöntemiyle elde edilen parametre değerleri ve standart hataları

Parametre	Aylık Maksimum Getiri Endeksi		Haftalık Maksimum Getiri Endeksi	
	Tahmin Değeri	Standart Hata	Tahmin Değeri	Standart Hata
Yer (Location)	0,03877	0,00143	0,04120873	0,00171908
Ölçek (Scale)	0,01704	0,00120	0,01900558	0,00142011
Şekil (Shape)	0,33095	0,06719	0,29543145	0,07135312

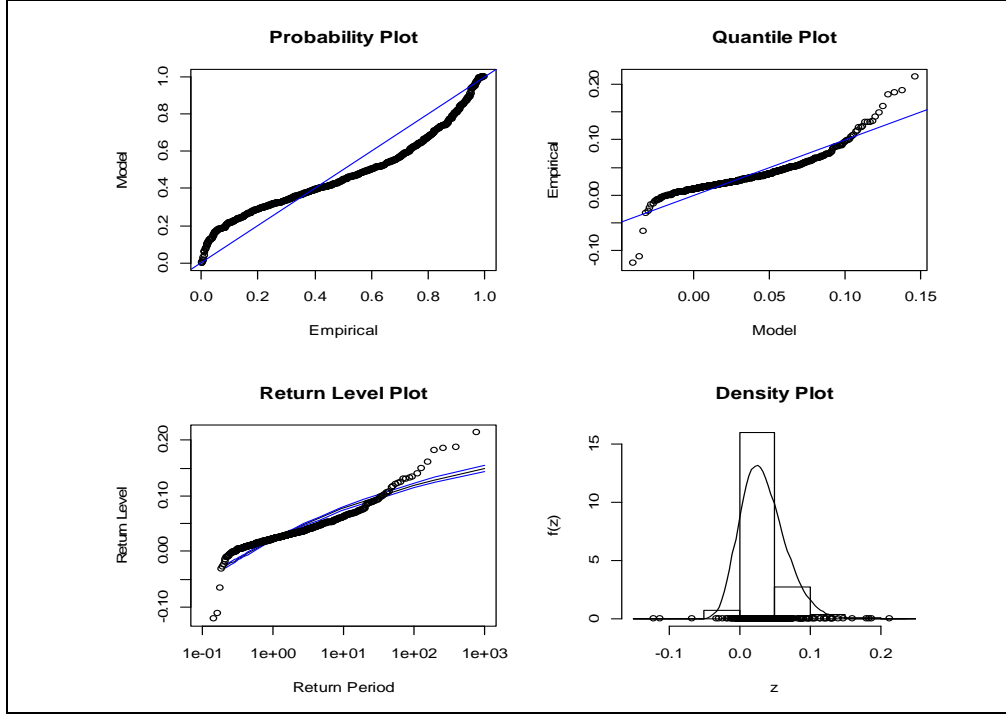


Şekil 4. 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasındaki aylık maksimum getiri değerlerinin GEV dağılımına göre çizilmiş PP, QQ, RL ve olasılık grafikleri



Aylık maksimum getiri endeksinin GEV dağılımına uyup-uyumadığının araştırıldığı *PP* ve *QQ* grafikleri incelendiğinde; dağılımın, veri kümesinin 1'inci ve 3'üncü çeyrek değerleri arasındaki bölgeye uyumunun son derece iyi olduğu *PP* grafiğinden görülmektedir. Kuyruk bölgesinde yer alan aykırı değerlerin ayırt edilmesinde oldukça faydalı bir araç olan *QQ*

grafiği incelendiğinde ise, uç değerlerin gözlemlendiği göze çarpmaktadır. Buna göre GEV dağılımının, verinin kuyruk kısmını merkezindeki gibi başarıyla temsil edemediği söylenebilmektedir. Getiri seviyesi grafiği ise, maksimum kaybın %95 güven düzeyi ile tahmin edilebildiğini göstermektedir.



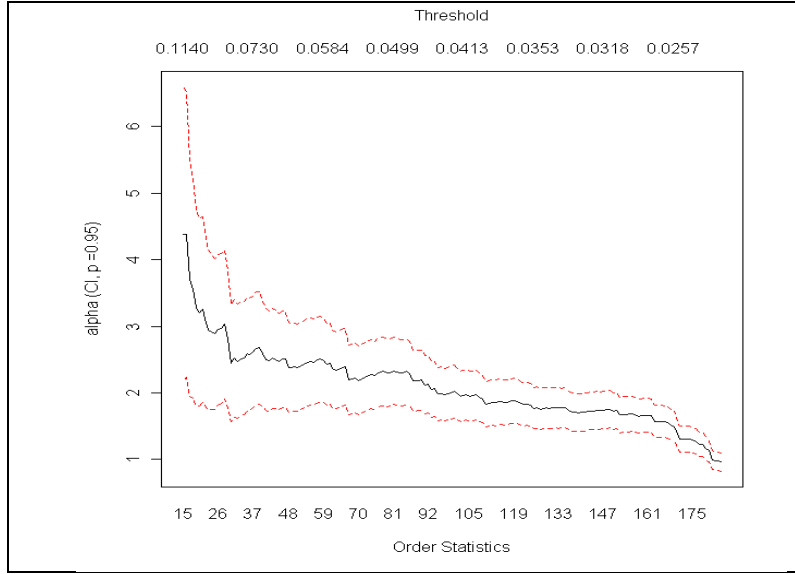
Şekil 5. 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasındaki haftalık maksimum getiri değerlerinin GEV dağılımına göre çizilmiş *PP*, *QQ*, *RL* ve olasılık grafikleri

Haftalık maksimum getiri endeksinin GEV dağılımına uyumunun yetersiz olduğu yorumu *PP* ve *QQ* grafikleri yardımıyla yapılabilir. Maksimum kayba ilişkin tahminlerin yapılmasında da modellemenin yetersiz kaldığı dikkat çekmektedir. Bu nedenle en büyük değerler kümesi yöntemi analizinde aylık maksimum getiri değerleri ile çalışılmasının daha uygun olacağına karar verilmiştir.

Aylık maksimum getiri serisinin GEV dağılımına uygunluğunun bulunmasından sonra veri setinin uç değer dağılımlarından hangi türe yakınsadığı incelenmiştir. Bu amaçla veri setinin ilk olarak Gumbel dağılımına uyumu incelenmiş ve %95 güven düzeyinde yapılan *olabilirlik oran testine* göre  $p$  değeri  $3,434648 \times e^{-9}$  olarak bulunmuştur. Buna göre aylık maksimum getiri serisinin Gumbel dağılımına uyumunun %95

güven düzeyinde kabul edilemeyeceğine karar verilmiştir.

Veri kümesinin Frechet tipi dağılıma uyum sağlayıp sağlamadığını incelemek için Hill grafiğinden yararlanılmıştır. Hill grafiği; Frechet tipi dağılımlar için şekil parametresi  $\xi$ 'nin grafiksel olarak elde edilmesini sağlayan non-parametrik bir yöntemdir (Tsay, 2010). %95 güven düzeyi için çizilen Hill grafiği Şekil 6'da gösterilmektedir. Grafiğin  $x$  ekseninde pozitif  $q$  değerleri,  $y$  ekseninde ise  $\xi_n(q)$  hill tahmin edicileri olmak üzere hill değerlerinin 105. ve 161. sıralı istatistikler arasında durağanlaştığı görülmektedir. Artan  $q$  değerleri ile birlikte durağanlaşan hill değerleri Frechet dağılımına uyuma işaret etmektedir. Bu sonuç, pratikte oldukça sık kullanılan normallik varsayımının bu analizde geçerli olamayacağını da göstermektedir.



Şekil 6. Aylık maksimum getiri endeksinin Hill grafiği

Son olarak bu endekse dayalı bir hisse senedinde kısa pozisyona girmiş olan yatırımcının karşı karşıya olduğu risk; *klasik VaR*, *uç değer kuramına dayanan VaR* ve *ES*

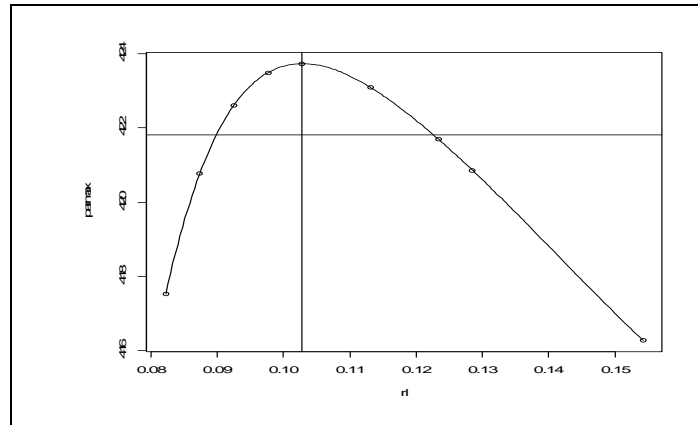
(*CVaR*) değerleri yardımıyla %5 yüzdelik değeri için öngörülme çalışılmıştır. R yazılımından elde edilen değerler Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Aylık maksimum getiri değerlerinin GEV dağılımına göre VaR, klasik VaR ve ES değerleri

$P$	$VaR_p$	$GEV\_VaR_p$	$ES$ ya da $CVaR_p$
0,95	0,1309944	0,03751892	0,0502863
0,990	0,1878118	0.07344015	0,05448866
0,999	0,2132459	0.1721648	0,05580268

10.000 TL’lik bir finansal pozisyonun %5 ve %1’lik kuyruk olasılıklarına göre hesaplanan *klasik VaR* değerleri, sırasıyla, 1.309,944 ve 1.878,118 TL iken; aynı yüzdelik değerleri için uç değer yaklaşımı kullanılarak hesaplanan *VaR* değerleri ise; 375,1892 ve 734,4015 TL olarak

bulunmuştur. Klasik yaklaşıma göre hesaplanan *VaR* değerlerinin çok daha temkinli sonuçlar ürettiği söylenebilir. İlgili finansal pozisyona ilişkin %5 ve %1’lik yüzdelik değerleri için hesaplanan beklenen açık değerleri ise 698,5263 TL ve 1.155,2296 TL olarak bulunmuştur.



Şekil 7. Aylık maksimum getiri endeksinin getiri seviyesi grafiği

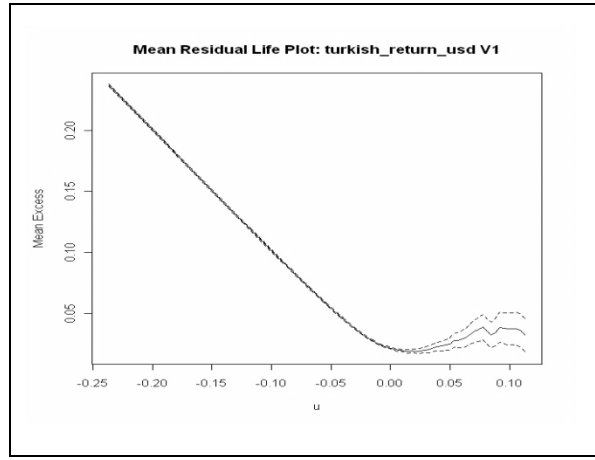
Bir diğer risk ölçüm aracı olan getiri seviyesi yardımı ile aylık getiri oranları alt periyotlara ayrılıp incelenebilmektedir. Bu amaçla 12 günlük alt periyotlar için getiri

düzeyleri elde edilmiş ve sonuçlar Şekil 7’de verilmiştir. Buna göre her 12 günde bir ortaya çıkabilecek aşkın bir değer %8 ile %15 arasında değişmesinin beklendiği söylenebilir.

## 5.2. Eşik Değerin Üzerinden Kalan Değerler Yöntemi

Bu bölümde yapılacak olan uç değer analizinin diğer yöntemden temel farkı, verinin alt gruplara ayrılmadan bir bütün olarak değerlendirilmesi ve seçilecek olan optimal bir eşik değer üzerinde kalan veri kümesinin GPD’ye yakınsayıp-yakınsamadığının araştırılmasıdır. İlk adım optimal eşik değer belirlenmesi

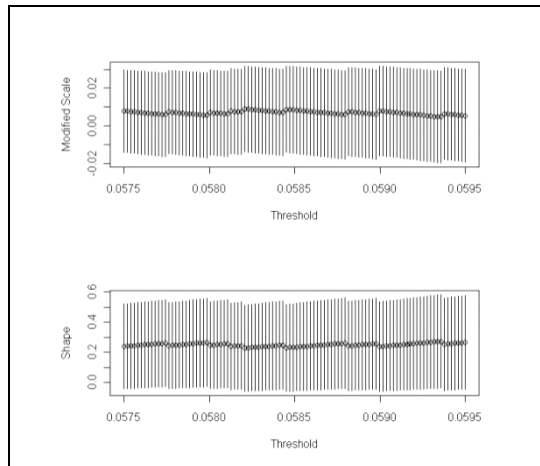
olduğundan, grafiksel yöntemler yardımıyla olası eşik değer seçimi yapılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla, eşik değer seçiminde en çok kullanılan yöntemlerden biri olan *ortalama fazlalık grafiği*’nden faydalanılmıştır. Ortalama fazlalık grafiği Şekil 8’de verilmiştir.



Şekil 8. Günlük getiri endeksinin ortalama fazlalık grafiği

Bu yöntemle göre rastlantı değişkeninin GPD’ye uyması durumunda  $u$  eşik değerinin üzerinde kalan grafik değerlerinin  $u$ ’nun bir fonksiyonu olması beklenmektedir. Şekil 8’e göre optimal eşik değer 0,0575 ile 0,0595 değerleri arasında olması gerektiği yorumu yapılabilir.

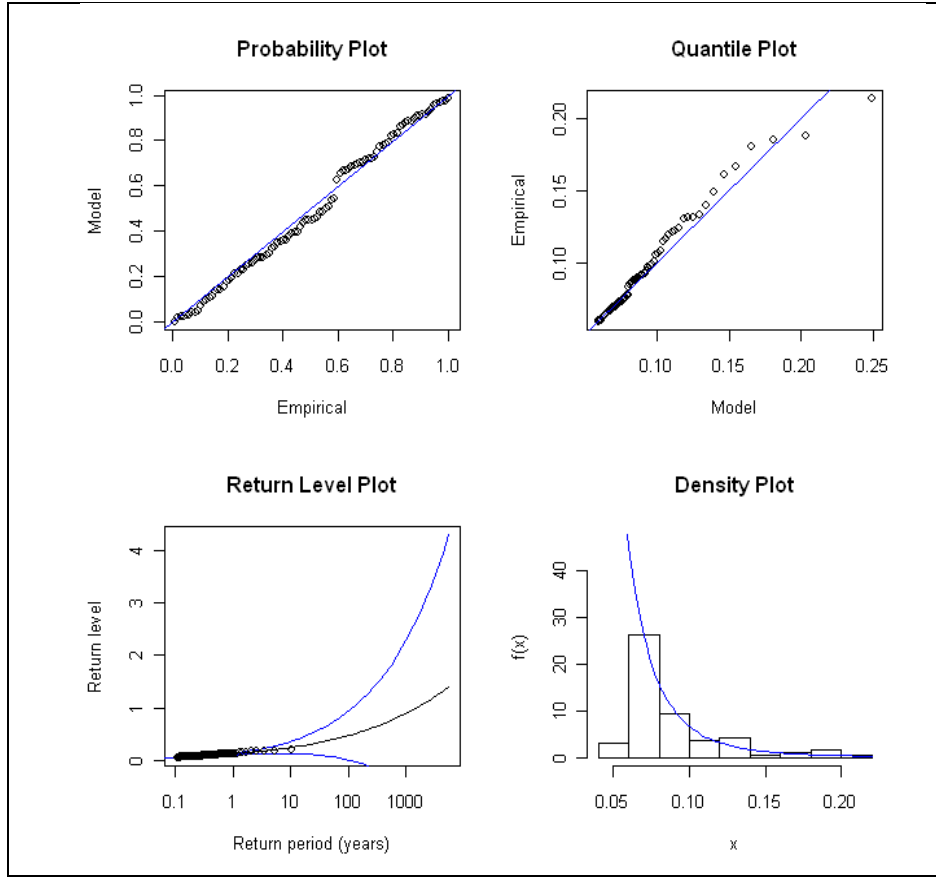
Ortalama fazlalık grafiği yardımıyla optimal eşik değer için bir aralık belirlenebilmiştir. Optimal eşik değer ne olması gerektiği sorusunun cevabı, Şekil 9’da verilen GPD’ye uyum grafiği yardımıyla daha kesin olarak verilebilir.



Şekil 9. 0,0575 ile 0,0595 eşik değer aralığı için günlük getiri endeksinin GPD’ye uyum grafiği

Şekil 9 yardımı ile *şekil ve modifiye edilmiş ölçek* parametrelerinin en çok olasılık tahmin değerleri ve güven aralıkları, belirlenen eşik değerleri için gösterilmiştir. Optimal eşik değer, her iki grafiğin eş zamanlı olarak durağanlaştığı bölgeden seçilecektir. Dolayısıyla bu çalışma kapsamında günlük getiri endeksi için optimal eşik değer 0,0593 olmasına karar verilmiştir.

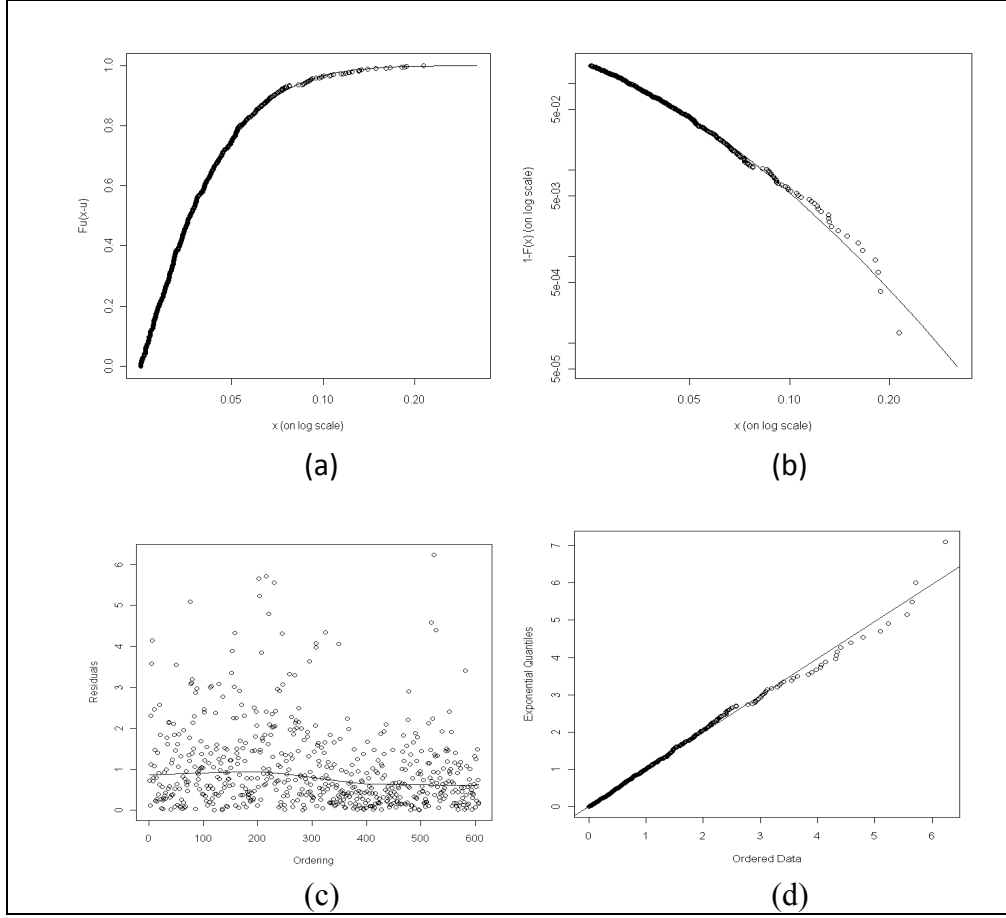
*Pickands-Balkema-de Haan Teoremi*'ne göre optimal eşik değer üzerinde kalan gözlem değerlerinin GPD'ye uyması beklenmektedir. Bu nedenle uygulamanın bundan sonraki aşamasında, eşik değer üzerinde kalan gözlem değerlerinin GPD'ye ne ölçüde uyum sağladığı sorusunun cevabı araştırılmıştır.



Şekil 10. 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasındaki günlük getiri endeksinin GPD'ye göre çizdirilmiş PP, QQ, RL ve olasılık grafikleri

Günlük maksimum getiri değerlerinin GPD'ye uyup-uyumadığı *PP* ve *QQ* grafikleri yardımıyla incelendiğinde; veri kümesinin merkezinde de kuyruk kısmında da sapmalar olduğu göze çarpmaktadır. Getiri seviyesi grafiği ise, maksimum kaybın %5 yanılma düzeyi ile tahmin edilebildiğini göstermektedir.

Verinin GPD'ye uyum sağlayıp sağlamadığı Şekil 11'de verilen tanımlayıcı grafikler (diagnostic plots) yardımıyla daha detaylı bir biçimde analiz edilebilir. (d)'de yer alan *QQ* grafiği ile (b)'de yer alan ve logaritmik ölçekte verilmiş olan *kuyruk olasılık tahmin (tail probability estimate)* grafiğine göre GPD'den düşük sayıda sapma olduğu yorumu yapılabilir.



Şekil 11. 1997 Ocak-2012 Nisan tarihleri arasındaki günlük maksimum getiri değerlerinin GPD'ye göre çizdirilmiş tanımlayıcı grafikleri

Veri kümesinin GPD'ye uyumunun kabul edilebilir olup-olmadığı %95 güven düzeyinde test edilmiş ve verinin bu dağılıma yakınsadığı sonucuna ulaşılmıştır.

En çok olabilirlik tahmin yöntemi yardımıyla elde edilen ölçek ve şekil parametreleri standart hataları ile birlikte Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. Günlük getiri endeksinin GPD'ye göre elde edilmiş parametre tahmindeğerleri ve hata terimleri

Parametre	En çok olabilirlik yöntemine göre elde edilen parametre tahmin değerleri	Parametre tahminlerinin Standart hata değerleri
Ölçek (Scale)	0,02105159	0,003879158
Şekil (Shape)	0,26716159	0,157324459

Son olarak bu endekse dayalı bir hisse senedinde kısa pozisyona girmiş olan yatırımcının karşı karşıya olduğu risk; klasik

VaR ve ES (CVaR) değerleri yardımıyla %5, %1 ve %0,1 yüzdeler için öngörülmeye çalışılmıştır. Elde edilen değerler Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. Günlük getiri endeksinin GPD'ye göre VaR, klasik VaR ve ES değerleri

$p$	$VaR_p$	$ES$ ya da $CVaR_p$
0,950	0,04556725	0,06985263
0,990	0,08261966	0,11552296
0,999	0,15960314	0,21041183

10.000 TL'lik bir finansal pozisyonun %5 ve %1'lik kuyruk olasılıklarına göre hesaplanmış  $VaR$  değerlerinin, sırasıyla, 455,6725 TL ve 826,1966 TL olduğu görülmüştür. Aynı yüzdelik değerleri için finansal pozisyona ilişkin beklenen açık değerleri ise 698,5263 TL ve 1.155,2296 TL olarak bulunmuştur. Günlük maksimum getiri değerleri için hesaplanan  $VaR$  değerleri, aylık getiri serisi için hesaplanan  $VaR$  değerlerine göre daha düşük olmakla birlikte; beklenen açık değerinin GPD kullanıldığında daha yüksek çıktığı gözlemlenmektedir.

### 5.3. Geriye Dönük Testler

Risk analizinin en önemli aşamalarından biri, elde edilen risk büyüklüklerinin anlamlılığının geriye dönük testler yardımıyla incelenmesidir.

*En büyük değerler kümesi* yöntemine göre aylık maksimum getiri değerlerinin Tablo 1'de verilen parametre değerlerine bağlı olarak GEV dağılımına; *POT* yöntemine göre ise günlük getiri endeksinin Tablo 3'te verilen parametre değerlerine bağlı olarak GPD dağılımına uygun olduğu görülmüştür.

Her iki model için hesaplanan riske maruz değerleri sırasıyla *Kupiec* ve *Christoffersen testleri* ile incelenmiştir. GEV modeline bağlı olarak elde edilen  $VaR$  değerleri için hesaplanan *Kupiec* ve *Christoffersen test sonuçları* Tablo 5'te verilmektedir.

Tablo 5. Aylık maksimum getiri endeksinin GEV modeline göre geriye dönük test sonuçları

<b>Kupiec Testi</b>	<b>Beklenen Kuyruk Kaybı</b>	<b>Gözlemlenen Kuyruk Kaybı</b>	<b>Koşullu olmayan kapsam testi olabilirlik oran istatistiği</b>	<b>p değeri</b>	<b>Hipotez sonucu</b>
	9	26	311,4852	0	Ho red
<b>Christoffersen Testi</b>	<b>Koşullu kapsam testi olabilirlik oran istatistiği</b>		<b>p değeri</b>		<b>Hipotez sonucu</b>
	312,4074		0		Ho red

Buna göre aylık maksimum getiri değerleri GEV dağılımına göre modellenip, kuyruk kayıpları ve aşımaları dikkate alındığında bu model seçiminin  $VaR$  hesaplaması için uygun olmadığı %95 güven düzeyinde söylenebilmektedir.

GPD modeline göre elde edilmiş olan  $VaR$  değeri için hesaplanan *Kupiec* ve *Christoffersen test sonuçları* ise Tablo 6'da verilmektedir.

Tablo 6. Günlük getiri endeksinin GPD modeline göre geriye dönük test sonuçları

Kupiec Testi	Beklenen Kuyruk Kaybı	Gözlemlenen Kuyruk Kaybı	Koşullu olmayan kapsam testi olabilirlik oran istatistiği	p değeri	Hipotez
	189	2839	0,0000	1	Ho reddedilemez
Christoffersen Testi	Koşullu kapsam testi olabilirlik oran istatistiği		p değeri		Hipotez sonucu
	0,0000		1		Ho reddedilemez

Buna göre kuyruk kayıpları ve aşımalar incelendiğinde, GPD dağılımı dikkate alınarak elde edilen VaR değerleri için bu model seçiminin uygun olduğu %95 güven düzeyinde söylenebilmektedir.

## 6. SONUÇLAR

Finansal piyasalarda karşı karşıya kalınan en önemli risklerden biri uç değer bir olayla karşılaşma riskidir. Beklenmedik kazanç ya da kayıplara neden olan bu riskin doğru bir şekilde değerlendirilmesi büyük önem taşımaktadır.

UDK, uç değer olayların güvenilir bir biçimde değerlendirilebilmesi için sağlam bir istatistiksel temel sağlamaktadır. Bu sayede uç değer olaylarla karşılaşma riski daha doğru bir biçimde analiz edilebilmekte ve yatırımcıların karşı karşıya oldukları finansal riskler daha doğru bir biçimde öngörülebilmektedir.

Çalışma kapsamında IMKB-100 endeksi getiri serisi üzerine yapılan inceleme ile, kısa pozisyona girmiş bir yatırımcının karşı karşıya kalabileceği riskler analiz edilmiştir. Getiri endeksi UDK kapsamında en büyük değerler kümesi ve eşik değerinin üzerinde kalan aşkın değerler yöntemleri ile modellenerek, bu endekse dayalı bir hisse senedinde kısa pozisyona sahip bir yatırımcının riski her iki yöntemle göre hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak günlük maksimum getiri değerleri için hesaplanan VaR değerlerinin, aylık getiri serisi için hesaplanan VaR değerlerine göre daha düşük çıkmasına rağmen, beklenen açık değerinin GPD kullanıldığında daha yüksek çıktığı gözlemlenmiştir.

Düşünülen modeller ayrıca Kupiec ve Christoffersen testleri ile incelenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak incelenen dönem getirilerinin UDK kapsamında eşik değerinin üzerinde kalan aşkın değerler yönteminin, en büyük değerler kümesi yöntemine göre daha iyi bir performans gösterdiği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- Bensalah, Y., (2000) “Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: a Review”, Research. And Risk Management Section Financial Markets Department, Bank of Canada.
- Beirlant, J., Teugels, J., Vynckier, P., (1996) “Practical Analysis of Extreme Values”, Leuven University Press, Leuven.
- Bozkuş, S., (2005) “Risk Ölçümünde Alternatif Yaklaşımlar: Riske Maruz Değer ve Beklenen Kayıp Uygulamaları”, Dokuz Eylül Üniversitesi İ.İ.B.F Dergisi, Cilt: 20, Sayı:2, 2005, 27-45.
- Caserta, S., De Vries, C. G. (2003) “Extreme Value Theory and Statistics for Heavy Tail Data”, Euronext and Tinbergen Institute.
- Christoffersen, P.F, (1998), “Evaluating Internal Forecasts”, International Economic Review, 39, 841-862.
- Costello, A., Asem, E., Gardner, E., (2008), “Comparison of Historically Simulated VaR: Evidence from Oil Prices”. Energy economics, 30, 2154-1266.
- Çelik N., Kaya M.F., (2010), “Uç Değerler Yöntemi ile Riske Maruz Değer’in Tahmini ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Üzerine Bir Uygulama”, Bankacılık ve Sigortacılık Araştırmaları Dergisi, Cilt 1, sayı 1, 19-32.

- Çifter A., Özün A., Yilmazer S, (2007a) “Beklenen Kuyruk Kaybı ve Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı ile Riske Maruz Değer Öngörüsü: Faiz Oranları Üzerine Bir Uygulama” Bankacılar Dergisi, Sayı 60, 3-16.
- Çifter A., Özün A., Yilmazer S, (2007b) “Geriyeye Dönük Testlerin Karşılaştırmalı Analizi: Döviz Kuru Üzerine Bir Uygulama”, Bankacılar Dergisi, Sayı 62, 25-43.
- Demireli, E., Taner, B. (2009) ”Risk Yönteminde Riske Maruz Değer Yöntemleri ve Bir Uygulama”, Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakülte Dergisi, C.14, S.3, 127-148.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. & Mikosch, T. (1997) “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”, Springer, Berlin.
- Embrechts, P., (1999), “Extreme Value Theory as a Risk Management Tool.”, North American Actuarial Journal, vol 3, no:2.
- Fisher, R.A., Tippett, L.H.C. (1928). "Limiting Forms of The Frequency Distribution of The Largest and Smallest Member of Sample." Proc. Cambridge Philosophical Society 24:180-190.
- Genç, R., Selçuk F., (2004) “Extreme Value Theory and Value-at-Risk: Relative Performance in Emerging Markets”, International Journal of Forecasting, Vol: 20, 287– 303 .
- Goncu A., Akgul A.K., Imamoğlu O., Tiryakioğlu M., (2012) “An analysis of the Extreme Returns Distribution: The Case of the Istanbul Stock Exchange”, Applied Financial Economics, vol 22, 723-732.
- Goorbergh., R.W.J. and Vlaar, E.J.G. (1999) "Value at Risk Analysis of stock returns: Historical simulation, variance technique or tail index estimation?", research memorandum WO&E, 579
- Gilli, M., Kellezi, E., (2000), “Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures” International Center for Financial Asset Management and Engineering Fame Research Paper Series
- Gilli, M , Kellezi E, (2006), “An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk”, Computational Economics, vol 27, 1–23.
- Gumbel, E. J., (1941), “The return period of flood flows”: Annals of Mathematical Statistics v. 12, no. 2, 163-190.
- Jorion, P., (2001), “Value at Risk”, McGraw-Hill.
- Kupiec, P.H., (1995), “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”, Journal of Derivatives, Winter, 73-84
- Longin, F.M., (2000), “From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach”, Journal of Banking and Finance, 24, 1097-1130.
- McNeil A., (1997) “Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory”, ASTIN Bulletin, Vol 27 , 117–137
- McNeil A. J, (1999) “Extreme Value Theory for Risk Managers, in Internal Modelling and CAD IP”, 93–113.
- Smith, R.L., (2003) “Statistics of Extremes with Application in Environment, Insurance and Finance”, CRC Press/Chapman and Hall.
- Weibull W., (1939), “A Statistical Theory of The Strength of Material”. Proc. Royal Swedish Institute Engineering Research 151:1.
- Tsay, R.S., (2010), “Analysis of Financial Time Series”, Third Edition, John Wiley and Sons, New Jersey, 676.