

## $\alpha$ – KARARLI DAĞILIMLARLA FİNANSAL RİSK ÖLÇÜMÜ

Ömer ÖNALAN\*

### Özet

*Bu çalışmada finansal kayıpların, kalın kuyruklu  $\alpha$  – kararlı dağılım izlediği varsayımı altında, riske maruz değer (VaR) ve koşullu VaR (ES) gibi farklı risk ölçüm yöntemlerini kullanarak finansal riski sayısallaştırmaya çalışıyoruz. Ayrıca  $\alpha$  – kararlı dağılım varsayımı altında elde edilmiş risk değerlerini, deneysel yöntem ve normal dağılım varsayımı altında hesaplanmış risk değerleriyle karşılaştırıyoruz. Genelde finansal zaman serileri normal dağılım varsayımına uymayan yüksek basıklık ve çarpıklık özellikleri göstermektedir. Bu nedenle bu özellikleri de modele dahil etmek için, finansal varlık getirilerini  $\alpha$  – kararlı dağılımlar ile modellemek makul bir yaklaşım olacaktır.  $\alpha$  – kararlı dağılım varsayımı daha güvenilir risk ölçümleri elde etmemize imkan vermektedir. Çünkü  $\alpha$  – kararlı dağılımlar finansal varlık getirilerine iyi uyum gösterirler. Sonuç olarak Pfizer hisse senedi verilerini kullanarak modelin geçerliliğini araştırıyoruz.*

**Anahtar Kelimeler:**  $\alpha$  – kararlı dağılım, VaR, Koşullu VaR,, Finansal varlık getirileri, Simülasyon.

## FINANCIAL RISK MEASURE WITH $\alpha$ – STABLE DISTRIBUTIONS

### Abstract

*In this study, under the assumption which financial loss follows  $\alpha$  – stable distribution, using the different risk measure methods like Value-at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES), we study to quantify of financial risk. Besides we compare risk values which it was obtained with the  $\alpha$  – stable distribution assumption and it was obtained using empirical method and normal distribution method. Generally financial time series exhibit the features like high kurtosis and skewness that are incompatiple with the normality assumption. For these reason, the modelling of financial asset return series with  $\alpha$  – stable distributions will be a reasonable approach. This assumption also creates more efficient risk measures. Because*

---

\* Doç.Dr. Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü öğretim üyesi, email: omeronalan@marmara.edu.tr

$\alpha$  – stable distributions represent good fit to the financial asset return data. Finally we investigate validate of the model using the Pfizer stock return data.

**Key Words:**  $\alpha$  – stable distribution, VaR, Expected shortfall, Financial asset returns, Simulation.

## 1.Giriş

$\alpha$  – kararlı (kararlı Paretian) dağılımlar finansal zaman serilerinin çarpıklık ve kalın kuyruk özelliğini modele dahil edebilme kabiliyetine sahip olduğundan Mandelbrot(1963) ve Fama(1965) normal dağılıma bir alternatif olarak  $\alpha$  – kararlı dağılımı bir model olarak önermişlerdir<sup>1, 2</sup>. Bu dağılım deneysel verilere iyi uyum sağlaması yanında, *kararlılık özelliğine* de sahiptir. Şöyle ki; bağımsız aynı şekil parametresi  $\alpha$  ya sahip *farklı* kararlı rassal değişkenlerin toplamı aynı  $\alpha$  parametresi ile yine bir kararlı rassal değişkendir. Kararlı dağılımlar bir sınıf özelliğine sahiptirler. Yani, bu sınıfa ait herhangi bir dağılım kararlı dağılımına yakın özelliklere sahiptir. Klasik merkezi limit teoreminde; sonlu varyanslı rassal değişkenlerin toplamı bir Gaussian rassal değişkene yaklaşır. Varyansın sonlu olması varsayımı kaldırılarak, uygun bir ölçeklendirme yapılması durumunda bağımsız aynı dağılıma sahip rassal değişkenlerin toplamı için yegane dağılım kararlı paretian dağılımdır. Normal dağılım kararlı dağılımların sonlu varyansa sahip olan özel bir durumudur. Sonsuz varyans bir olasılık dağılımının kuyuklarıyla karakterize edilebilir. Bir  $f(x)$  dağılımı göz önüne alalım,  $k$ 'nın büyük değerleri için  $P(|x| > k) > 1/k^2$  oluyorsa, o zaman varyans sonsuzdur denir. Aslında  $k$ 'nın büyük değerlerini düşünerek, dağılımın kuyuklarında ne kadar lık bir olasılık olduğu üzerine yoğunlaşmış oluyoruz. Kuyuklardaki toplam olasılık  $1/k^2$  den daha büyük olduğunda dağılıma *kalın kuyuklu* dur denir. Gerçek uygulamalarda varyans çok büyük olabilir fakat hiçbir zaman sonsuz olmaz. Sonsuz varyans, asimptotik bir sonuçtur. Kararlı dağılımlar bir çok farklı tipteki fiziksel, ekonomik ve mühendislik sistem için model olarak kullanılmaktadır. Örneğin çok sayıda küçük etkinin bir sonucu olarak ortaya çıkan olaylar, kalın kuyruk ve çarpıklık vb. özellikler gösteren kararlı dağılımlar kullanılarak modellenebilirler.

Risk ilgilendiğimiz finansal pozisyonun öngörülemeyen gelecek durumlarını, *kazançlar ve kayıplar* olarak ifade eden rassal değişkendir. Bu kazanç ve kayıplar rassal bir şekilde gelişirler. Bu gelişimde etkili olan faktörler *risk faktörleri* olarak adlandırılan rassal değişkenlerin bir kümesi ile gösterilirler. Riski doğru bir şekilde tahmin edebilmek için önce risk faktörlerine çok iyi uyum gösteren bir istatistiksel dağılım modeli belirlenmelidir. Bu çalışmada uygun bir model olarak  $\alpha$  – kararlı dağılımı kullanacağız. Çalışmamızda, finansal mal getirileri için normal dağılım varsayımını çok genel bir  $\alpha$  – kararlı dağılım varsayımı ile yer değiştirerek riske maruz değer ve koşullu riske maruz değer gibi risk ölçümlerini hesaplıyoruz. Çalışma aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. 2.kısımda,  $\alpha$  – kararlı dağılımların

<sup>1</sup> Mandelbrot, B., "The variation of certain speculative prices", **J. Business**, 36, 1963, 394-419.

<sup>2</sup> Fama, E., "The behavior of stock market prices", **J. Business**, 38, 1965, 34-105.

tanımı ve temel özellikleri verilmiş 3.Kısımda, Riske maruz değer ve Koşullu VaR kavramları kısaca açıklanmıştır.4. kısımda ise modelin hisse senedi getiri verilerine bir uygulaması ele alınmıştır.5.kısımda ise çalışmanın sonucu yer almıştır.

## 2. $\alpha$ – Kararlı Dağılımlar

Kararlı dağılımlar Paul Levy nin 1920 lerde rassal değişkenlerin toplamı üzerine yapmış olduğu çalışmalarla ortaya çıkmıştır. Bu alana Zolotarev in de büyük katkıları olmuştur.Bu çalışmada, Zolotarev(1986)'nın tanımını kullanacağız<sup>3</sup>. Kararlı dağılımlarla ilgili bir diğer zengin kaynakta Samorodnisky ve Taqqu(1994)<sup>4</sup> dir.  $\alpha$  – kararlı dağılımların olasılık fonksiyonlarının kapalı formda bir gösterimi mevcut değildir.Fakat bu dağılımlar onun karakteristik fonksiyonu ile uygun bir şekilde gösterilebilirler.Olasılık yoğunluk fonksiyonu karakteristk fonksiyonun ters Fourier dönüşümüdür.Kararlı dağılımlar farklı şekillerde karakterize edilebilir.  $\alpha$  – kararlı bir  $X$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir.

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \exp(-ixt) dt \quad (1)$$

Genelde bu fonksiyon, basit fonksiyonlar cinsinden ifade edilemez. Burada  $\phi(t)$  dağılımın karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.Yoğunluk fonksiyonu, sonsuz terimli bir polinom fonksiyon olarak düzenlenebilir. Fakat bu defada terim sayısının sonsuz olması maksimum olabilirlik yönteminin kullanılmasında problemler doğurur. Sonuç olarak olasılık yoğunluk fonksiyonu Zolotarev'in aşağıdaki integral gösterimi ile ifade edilebilir.

$$p(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma} \int_0^{\infty} \exp(-t^\alpha) \cos\left(t\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \beta t^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) dt \quad (2)$$

Fourier integralleri olasılık yoğunluk fonksiyonlarını hesaplamak için her zaman uygun yöntem olmayabilirler. Bu nedenle,yukarıdaki sorunun üstesinden gelebilmek için aşağıdaki formülü kullanmak daha uygundur. Eğer  $x \neq \mu$  ise

$$p(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{\alpha \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{\frac{1}{\alpha-1}}}{2\sigma|\alpha-1|} \int_{-\theta}^{\theta} U_\alpha(\varphi, \theta) \exp\left\{-\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} U_\alpha(\varphi, \theta)\right\} d\varphi \quad (3)$$

Eğer  $x = \mu$  ise

<sup>3</sup> Zolotarev,A., **One- dimensional stable distributions**,American mathematical society,Providence,RI.1996.

<sup>4</sup> Samorodnitsky,G.,Taqqu,M., **Stable non-Gaussian random processes**.Chapman&Hall,NewYork.1994

$$p(x : \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{1}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) \quad (4)$$

$$U_{\alpha}(\varphi, \theta) = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha(\varphi + \vartheta)\right)}{\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)} \right)^{1-\alpha} \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}((\alpha-1)\varphi + \alpha\vartheta)\right)}{\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)} \right)$$

$$\theta = \arctan\left(\beta \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{2}{\pi\alpha} \text{sign}(x - \mu)$$

$\mu = 0$  ve  $\sigma = 1$  ise  $p(x, \alpha, \beta) = -p(x, \alpha, -\beta)$  olur. Çalışmada,  $\alpha$  - kararlı rassal değişkeni göstermek için  $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$  notasyonunu kullanacağız.

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \exp\left(-\sigma^{\alpha} |t|^{\alpha} \left\{1 - i\beta \text{sign}(t) \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right\} + i\mu t\right) & , \alpha \neq 1 \\ \exp\left(\sigma |t| \left\{1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \log|t|\right\} + i\mu t\right) & , \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Kararlı dağılımlar 4 parametreye sahiptir.  $\alpha \in (0, 2]$  : kuyruk indeksi (şekil parametresi),  $\beta \in [-1, 1]$  : çarpıklık parametresi,  $\sigma > 0$  : skala parametresi  $\mu \in \mathbb{R}$  : konulanma (lokasyon) parametresidir.  $\sigma = 2$  olması durumunda normal dağılım elde edilir.  $\alpha < 2$  ise varyans sonsuzdur.  $\alpha > 1$  olması durumunda ortalama mevcut olup  $E(X) = \mu$  olur. Bir  $\alpha$  - kararlı rassal değişkenin p. momentinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter koşul  $\alpha > p$  olmasıdır. Kararlı dağılımlar tek modlu dağılımlardır.  $\alpha$  parametresinin değeri küçüldükçe, dağılım merkezi civarında sivrileşir ve kuyruklar gittikçe kalınlaşır.  $\alpha$  kuyruk indeksi çarpıklık ölçümü olarak yorumlanabilir. Eğer  $\beta = 0$  ise dağılım  $\mu$  civarında simetrik.  $\beta > 0$  ise dağılım sağa çarpık  $\beta < 0$  ise dağılım sola çarpık dır.  $\beta$ 'nin değeri büyüdükçe çarpıklığın değeri de büyür.  $\alpha \rightarrow 2$  ye yaklaşması durumunda  $\beta$  etkisini kaybeder ve  $\beta$ 'nin değerinin ne olduğuna bakılmaksızın dağılım normal dağılıma yaklaşır.  $\sigma$  dağılımın genişliğini,  $\mu$  da dağılımın modundaki kaymayı belirler. Aynı ortak  $\alpha$  şekil parametresine sahip  $X_1 \sim S_{\alpha}(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$  ve  $X_2 \sim S_{\alpha}(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$  gibi iki bağımsız alfa kararlı rassal değişken konvülasyon altında kapalıdır; Yani,

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha \left( \frac{\beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, (\sigma_1 + \sigma_2)^{1/\alpha}, \mu_1 + \mu_2 \right) \quad (6)$$

$$aX_1 + b \sim \begin{cases} S_\alpha(\text{sign}(a)\beta, |a|\sigma, a\mu + b), & \alpha \neq 1 \\ S_1 \left( \text{sign}(a)\beta, |a|\sigma, a\mu + b - \frac{2}{\pi} \beta \sigma a \log|a| \right), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Bu sonuçlar  $n$  tane kararlı rassal değişken durumuna genişletilebilir. Eğer  $X_1, X_2, \dots, X_n$  hepsi aynı  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler ise o zaman,

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim S_\alpha(\sigma.n^{1/\alpha}, \beta, n.\mu) \quad (8)$$

$$\alpha \neq 1 \quad \text{ise} \quad \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X_1 + \mu(n - n^{1/\alpha})$$

$$\alpha = 1 \quad \text{ise} \quad \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} nX_1 + \frac{2}{\pi} \sigma \beta n \ln n$$

Konvülüsyon altında kapalılık,  $\alpha$  – kararlı dağılımın sonsuz bölünebilir olmasını gerektirir. Böylece her  $\alpha$  – kararlı dağılım bir Lévy sürecine karşılık gelir.

## 2.1 Kuyruk Davranışı

$\alpha < 2$  olması durumunda  $\alpha$  – kararlı dağılımların kuyrukları asimptotik olarak Pareto kanununa uyar. Yani,  $\alpha < 2$  ve  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$  ise  $x \rightarrow \infty$  yaklaşması durumunda;

$$P(X > x) = 1 - F(x) \rightarrow k_\alpha (1 + \beta) x^{-\alpha} \quad (9)$$

$$P(X < -x) = F(-x) \rightarrow k_\alpha (1 - \beta) x^{-\alpha} \quad (10)$$

$$k_\alpha = \left( 2 \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}$$

### 2.1.1 Kuyruk İndeksinin Tahmini

$\alpha$  – kararlı rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının birkaç özel durum dışında kapalı formu mevcut olmadığından, kuyruk indeksi için tam bir formül bulmak mümkün değildir. Bununla birlikte literatürde kuyruk indeksini

tahmin etmek için farklı yaklaşımlar mevcuttur. Bunlardan bazıları; maksimum olabilirlik metodu, örnek karakteristik fonksiyonuna dayanan regresyon metodu, McCulloch'un kuantil metodu vb. dir. Bu yaklaşımların tümü incelenen örneğin bir kararlı dağılımdan gelmiş olduğu varsayımına dayanmaktadır. Eğer gözlem verileri farklı bir dağılımdan elde edilmişse bu yöntemler kararlılık indeksini (kuyruk indeksini) eksik tahmin etmiş olacaktırlar.  $\alpha$  yı tahmin etmek için yüksek frekanslı getirilerin kullanılması tavsiye edilir. Ayrıca tahmin için ortalamanın uzağındaki gözlem değerleri seçilmelidir. Aksi takdirde,  $\alpha$  indeksi eksik tahmin edilir ve kararlı dağılım sebepsiz yere reddedilmiş olur. Bu nedenle,  $\alpha$  indeksinin tahmininde gözlem verilerinin üst %5 lik kısmının veya daha azının kullanılması uygun olacaktır.<sup>5</sup>

#### *Hill Tahmincisi*

Hill(1975) tam dağılım fonksiyonu hakkında herhangi bir parametrik varsayımda bulunmayan, sadece dağılımın kuyruk davranışı üzerinde yoğunlaşan bir kuyruk indeks tahmincisi önermiştir.<sup>6</sup> Dağılımın üst kuyruğu  $1 - F(x) = Cx^{-\alpha}$  formunda olduğu zaman,  $\alpha$  kuyruk indeksini tahmin etmek için Hill tahmincisi kullanılır.  $x_1, x_2, \dots, x_N$  gözlem değerleri verilmiş olsun. Bu gözlem değerleri aşağıdaki gibi büyükten küçüğe doğru sıralanır.  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N$  Hill tahmincisi en büyük k tane sıra istatistiğine dayanır.

$$\hat{\alpha}_{Hill} = \left( \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \log \frac{x_n}{x_{k+1}} \right)^{-1} \quad (11)$$

Tahmin işleminde kullanılacak eşik değeri, k'nın seçimi keyfidir. İdeal olan sadece kuyruk bölgesindeki gözlem değerlerini kullanmaktır. Eğer k büyük seçilirse kuyruktan uzaklaşılır, k küçük seçilirse bu defa da tahmincinin duyarlılığı azalır. Uygulamada genellikle, k'nın farklı değerleri için hesaplanmış olan  $\hat{\alpha}_{Hill}(k)$  değerlerinin aynı düzleme çizilmesiyle elde edilen grafiğin durağan hale geldiği k değeri eşik olarak seçilir.

<sup>5</sup> Weron, R. "Levy stable distributions revised: tail index >2 does not exclude the Levy-stable regime", **International Journal of Modern Physics, C**, vol.12, no.2., 2001.

<sup>6</sup> Hill, B.M. "A simple general approach to inference about the tail of a distribution", **Annals of Statistics**, 3, 1975, 1163-1174.

## 2.2 Simetrik $\alpha$ – Kararlı Dağılımın Parametrelerinin Taktiri

Eğer bir  $X$  rassal değişkeni  $\alpha$  – kararlı dağılıma sahipse,  $Z = (X - \mu)/\sigma$  standartlaştırılmış kararlı değişken olarak adlandırılır. Fama ve Roll (1968,1971)<sup>7,8</sup> bir simetrik  $\alpha$  – kararlı  $1 < \alpha \leq 2$  ve  $(\beta = 0, \mu = 0)$  dağılımının  $\sigma$  skala parametresini aşağıdaki şekilde tahmin etmiştir.

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{z}_{0.72} - \hat{z}_{0.28}}{1.654} \quad (12)$$

Burada  $\hat{z}_{0.72}$  ve  $\hat{z}_{0.28}$  sırasıyla çalışmada kullanılan getiri serisinin küçükten büyüğe sıralanmasıyla elde edilen serinin %72 ve %28 inci terimlerini göstermektedir. Deneysel dağılımın konuşlanma (ortalama) parametresi  $\mu$  ise gözlem değerlerinin %50 budanmış ortalaması yoluyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n_u} \frac{\hat{z}_i}{(n_u - n_1 + 1)} \quad (13)$$

Burada  $\hat{z}_i$  sıralanmış getiri değerlerini, N de örnek hacmini göstermektedir.

$$n_1 = \text{tam}(0.50 \times N/2), \quad n_n = N - \text{tam}(0.50 \times N/2)$$

$\text{tam}(\ )$ : fonksiyonu parantez içerisindeki ifadenin tamsayı kısmını göstermektedir.  $\alpha$  karakteristik üssünün tahmini için önce, aşağıdaki istatistik hesaplanır

$$\hat{x}_{0.96} = \frac{\hat{z}_{0.96} - \hat{z}_{0.04}}{\hat{z}_{0.72} - \hat{z}_{0.28}} (0.827) \quad (14)$$

Genel olarak ifade etmek gerekirse,

$$\hat{x}_{.f} = \frac{\hat{z}_{.f} - \hat{z}_{1-.f}}{2\hat{\sigma}} \quad (15)$$

şeklinde tanımlanır. Örnek çapı N için  $\hat{z}_{.f}$ ,  $(.f)(N+1)$  inci sıra istatistiğidir.

Sonuç olarak  $F^{-1}$  standartlaştırılmış kararlı değişkenin kümülatif dağılım fonksiyonunun tersi,  $\hat{x}_{.f}$  de karşı gelen yoğunluk fonksiyonunun  $(.f)$  yüzde birlik diliminin tahminidir. Fama ve Roll(1971), çalışmasında bu fonksiyona ait tablolar verilmiştir. Uygun  $\hat{\alpha}$  tahmin değeri, hesapladığımız  $\hat{x}_{0.96}$  değerine tablodan

<sup>7</sup> Fama,E.F.,Roll,R.,”Some properties of symmetric stable distributions”,**Journal of the American statistical association**,63,1968,817-36

<sup>8</sup> Fama,E.F., Roll,R.,”Parameter estimates for symmetric stable distributions”,**Journal of American Statistical Associate**,66,1971,331-38.

karşılık gelen değer seçilerek belirlenir. Dağılımın simetrik olduğu hipotezi altında, %5 anlam seviyesinde çarpıklık için güven aralığı aşağıdaki gibi belirlenir.<sup>9</sup>

$$0.50 \times N \pm 1.96 \sqrt{N/4} \quad (16)$$

### 2.3 McCulloch Metodu

Fama ve Roll metodu basit olmasına rağmen  $\alpha$  ve  $\sigma$  nın tahminlerinde küçük asimptotik yanlılığa sahiptir. McCulloch (1986) Fama ve Roll'un metodunu geliştirmiştir.  $\alpha \in [0.6, 2]$  ile dört parametrenin tümü için tutarlı tahminciler elde etmiştir.<sup>10</sup>  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bir  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  dağılımından elde edilmiş olan bir rassal örnek olsun.

$$\mathcal{G}_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}} \quad (17)$$

olarak tanımlanmıştır.  $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$ ,  $\mathcal{G}_\alpha$  nın örnekten karşılık gelen değeridir.

$$\mathcal{G}_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.50}}{x_{0.95} - x_{0.05}} \quad (18)$$

$\mathcal{G}_\alpha$  ve  $\mathcal{G}_\beta$  nın her ikisi de  $\mu$  ve  $\sigma$  dan bağımsızdır.  $\hat{\mathcal{G}}_\beta$  istatistigi  $\mathcal{G}_\beta$  nin tutarlı bir tahmincisidir.  $\mathcal{G}_\alpha$  ve  $\mathcal{G}_\beta$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  nin fonksiyonlarıdır. Bu ilişkinin tersi alınırsa,

$$\alpha = \varphi_1(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta) \quad \beta = \varphi_2(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta) \quad (19)$$

elde edilir.  $\mathcal{G}_\alpha$  ve  $\mathcal{G}_\beta$  nin örnekten hesaplanan değerleri tabloya yerleştirilerek  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  değerleri elde edilir. Aşağıdaki tablo 1,  $\mathcal{G}_\alpha$  ve  $\mathcal{G}_\beta$  nin fonksiyonu olarak  $\alpha$  yı, tablo 2,  $\mathcal{G}_\alpha$  ve  $\mathcal{G}_\beta$  nin fonksiyonu olarak  $\beta$  yı göstermektedir. Tablo 3 ise  $\varphi_3(\alpha, \beta)$  nin bir fonksiyonu olarak,

$$\mathcal{G}_\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma} \quad (20)$$

<sup>9</sup> Fielitz, B.D., "Further results on asymmetric stable distributions of stock prices changes", **Journal of financial and quantitative analysis**, march, 1976, 39-55.

<sup>10</sup> McCulloch, J., H., "Simple consistent estimators of stable distribution parameters", **Commun. Statist. Simulation**, 15(4), 1986, 1109-1136.



nın davranışını gösterir.  $\sigma$  nın tahmini aşağıdaki gibi verilir.<sup>11</sup>

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\varphi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (21)$$

**Tablo 2.1**  $\alpha = \varphi_1(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta) = \varphi_1(\mathcal{G}_\alpha, -\mathcal{G}_\beta)$

$\mathcal{G}_\alpha$	$\mathcal{G}_\beta$						
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1
2,439	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
2,500	1,916	1,924	1,924	1,924	1,924	1,924	1,924
2,600	1,808	1,813	1,829	1,829	1,829	1,829	1,829
2,700	1,729	1,730	1,737	1,745	1,745	1,745	1,745
2,800	1,664	1,663	1,663	1,668	1,676	1,676	1,676
3,000	1,563	1,560	1,553	1,548	1,547	1,547	1,547
3,200	1,484	1,480	1,471	1,460	1,448	1,438	1,438
3,500	1,391	1,386	1,378	1,364	1,337	1,318	1,318
4,000	1,279	1,273	1,266	1,250	1,210	1,184	1,150
5,000	1,128	1,121	1,114	1,101	1,067	1,027	0,973
6,000	1,029	1,021	1,014	1,004	0,974	0,935	0,874
8,000	0,896	0,892	0,887	0,883	0,855	0,823	0,769
10,000	0,818	0,812	0,806	0,801	0,780	0,756	0,691
15,000	0,698	0,695	0,692	0,689	0,676	0,656	0,595
25,000	0,593	0,590	0,586	0,586	0,579	0,563	0,513

**Tablo 2.2**  $\beta = \varphi_2(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta) = -\varphi_2(\mathcal{G}_\alpha, -\mathcal{G}_\beta)$

$\mathcal{G}_\alpha$	$\mathcal{G}_\beta$						
	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	1,00
2,439	0,000	2,160	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2,5	0,000	1,592	3,390	1,000	1,000	1,000	1,000
2,6	0,000	0,759	1,800	1,00	1,000	1,000	1,000
2,7	0,000	0,482	1,048	1,694	1,000	1,000	1,000
2,8	0,000	0,360	0,760	1,232	2,229	1,000	1,000
3,0	0,000	0,253	0,518	0,823	1,575	1,000	1,000
3,2	0,000	0,203	0,410	0,632	1,244	1,906	1,000
3,5	0,000	0,165	0,332	0,499	0,943	1,560	1,000
4,0	0,000	0,136	0,271	0,404	0,689	1,230	2,195

<sup>11</sup> Weron,R.,”Performance of the estimators of stable law parameters”.Hugo Steinhaus Center,Wraclaw University of Technology,**Research Report** HSC/95/1,1995.

<b>5,0</b>	0,000	0,109	0,216	0,323	0,539	0,827	1,917
<b>6,0</b>	0,000	0,096	0,190	0,284	0,472	0,693	1,759
<b>8,0</b>	0,000	0,082	0,163	0,243	0,412	0,601	1,596
<b>10,0</b>	0,000	0,074	0,147	0,220	0,377	0,546	1,482
<b>15,0</b>	0,000	0,064	0,128	0,191	0,330	0,478	1,362
<b>25,0</b>	0,000	0,056	0,112	0,167	0,285	0,428	1,274

Tablo 2.3  $\mathcal{G}_\sigma = \varphi_3(\alpha, \beta) = \varphi_3(\alpha, -\beta)$ 

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
<b>2,0</b>	1,908	1,908	1,908	1,908	1,908
<b>1,9</b>	1,914	1,915	1,916	1,918	1,921
<b>1,8</b>	1,921	1,922	1,927	1,94	1,947
<b>1,7</b>	1,927	1,930	1,943	1,961	1,987
<b>1,6</b>	1,933	1,940	1,962	1,997	2,043
<b>1,5</b>	1,939	1,952	1,988	2,045	2,116
<b>1,4</b>	1,946	1,967	2,022	2,106	2,211
<b>1,3</b>	1,955	1,984	2,067	2,188	2,333
<b>1,2</b>	1,965	2,007	2,125	2,294	2,491
<b>1,1</b>	1,980	2,040	2,205	2,435	2,696
<b>1,0</b>	2,000	2,085	2,311	2,624	2,973
<b>0,9</b>	2,040	2,149	2,461	2,886	3,356
<b>0,8</b>	2,098	2,244	2,676	3,265	3,912
<b>0,7</b>	2,189	2,392	3,004	3,844	4,775
<b>0,6</b>	2,337	2,635	3,542	4,808	6,247
<b>0,5</b>	2,59	3,08	4,53	6,64	9,14

## 2.4 $\alpha$ – Kararlı Rassal Değişkenin Simülasyonu

$\alpha$  – kararlı dağılımların kümülatif dağılım fonksiyonlarının tersi  $F^{-1}$  için analitik bir ifade mevcut olmadığından, kararlı dağılımların simülasyonu biraz zordur. Bununla birlikte Weron(1996),  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$  için aşağıdaki algoritmayı vermiştir.<sup>12</sup>

- $(-\pi/2, \pi/2)$  aralığında düzgün dağılmış bir  $V$  rassal değişkeni türetilir. Bundan bağımsız olarak, ortalaması 1 olan bir üstel dağılımdan bir başka  $W$  rassal değişkeni türetilir.

- $\alpha \neq 1$  için

<sup>12</sup> Weron, R., "On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables", *Stochastic and Probability Letters*, 28, 1996, 165-171.

$$X = \xi + \frac{\sin \alpha V - \xi \cos \alpha V}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos(1-\alpha)V - \xi \sin(1-\alpha)V}{W} \right)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0) \quad (22)$$

$$\xi = -\beta \tan\left(\frac{\pi \alpha}{2}\right)$$

•  $\alpha = 1$  için

$$X = \frac{2}{\pi} + \left( \left( \frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan(V) - \beta \ln \left( \frac{\frac{\pi}{2} W \cos(V)}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right) \sim S_1(1, \beta, 0) \quad (23)$$

$U_1$  ve  $U_2$   $(0,1)$  aralığında düzgün dağılmış iki bağımsız rassal değişken olmak üzere,

$$V = \pi \left( U_1 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{ve} \quad W = -\ln U_2 \quad (24)$$

Değişkenleri kolayca türetilir. Bir standart  $\alpha$  – kararlı değişkenin değerleri simülasyon yöntemi ile türetildiğinde,  $\alpha, \beta, \sigma$  ve  $\mu$  parametrelerinin herhangi bir değeri için  $\alpha$  – kararlı değişkenler aşağıdaki dönüşümler kullanılarak kolayca türetilir.

Eğer  $X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$  ise

$$\alpha \neq 1 \quad \text{için} \quad Y = \mu + \sigma X \quad (25)$$

$$\alpha = 1 \quad \text{için} \quad Y = \mu + \sigma X + \frac{2}{\pi} \beta \log(\sigma) \quad (26)$$

Şeklinde tanımlanan  $Y$  rassal değişkeni  $Y \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$  dağılmıştır.

### 3. Finansal Risk Ölçümleri

Riski modellemek için genelde olasılık teorisinden faydalanılır. Riskleri yani bir finansal pozisyonun negatif getirilerini  $X$  rassal değişkeni ile göstereceğiz. Riskler ilgilenilen evrenin öngörülemeyen gelecek durumlarını, kazançları ve kayıpları gösteren değerlere tasvir eden rassal değişkenlerdir. Bir rassal değişken için deneysel dağılım fonksiyonu şu şekilde tanımlanır. Bir  $X$  rassal değişkenin  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gibi dözenmiş olan n-tane getiri değeri için deneysel kümülatif dağılım fonksiyonunu  $F_n$  ile gösterelim. Bu dağılım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq t\} \quad (27)$$

$X_i$  ler bilinmeyen  $F(x)$  dağılımından çekilmiş bağımsız rassal değişkenlerdir. Glivenko-Cantelli teoreminden,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)| = 0 \quad (28)$$

eşitliği hemen her yerde sağlanır. Bu durumda  $F$  dağılımının  $p$  kuantili  $F^{-1}(p)$  aşağıdaki şekilde tahmin edilir.

$$F^{-1}(p) = X_{n,i} \quad p \in \left( \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right) \quad (29)$$

Gözlem değerleri,  $X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n}$  şeklinde sıralanmıştır

### 3.1 Riske Maruz Değer (VaR)

VaR(Value-at-Risk) finansal kurumların ticari portföylerinin maruz kaldığı piyasa riskini değerlemek için kullandıkları basit bir risk ölçümüdür. VaR ölçümü, verilen bir güven seviyesi ile sınırlı bir yatırım periyodunda, beklenen en kötü kaybı tek bir sayı ile özetler. Bir finansal pozisyonun  $p$  güven seviyesindeki maruz kaldığı piyasa riskinin değeri, kayıpların  $F$  kümülatif dağılım fonksiyonunun  $p$  kuantili olarak aşağıdaki gibi tanımlanır<sup>13</sup>

$$VaR_p(X) = \inf \{ x \in R; F(x) \geq p \} \quad (30)$$

Güven seviyesi  $p$  için tipik olarak,  $p \in \{0.90, 0.95, 0.99\}$  değerleri seçilir. Şu halde VaR hesabındaki önemli bir konu *kazanç/kayıp* dağılımının belirlenmesidir. RiskMetrik tarafından önerilen modelde bu *kazanç/kayıp* dağılımının Gaussian olduğu kabul edilmiştir. Bu hipotezin temel sonucu şudur; VaR değeri, portföyün standart sapması, verilen güven seviyesinin bir fonksiyonu olan bir sabitle çarpılarak belirlenir.

#### 3.1.1 Normal Riske Maruz Değer (VaR)

•  $X \sim N(0, \sigma^2)$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$VaR_p(X) = \sigma z_p \quad (31)$$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2$   $\sigma^2$  için bir asimptotik güven aralığı aşağıdaki gibi verilir.

<sup>13</sup> Jorion, P., **Value at Risk : the New Benchmark for Measuring Financial risk**. McGraw-Hill, New York, 2001.

$$\sigma^2 \in \left( S_n^2 - \sqrt{\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}} z_{p/2}, S_n^2 + \sqrt{\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}} z_{p/2} \right)$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad \mu_k = E(X^k) \quad \hat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^4 \quad \hat{\sigma}^4 = (S_n^2)^2$$

$$\bullet X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ ise } VaR_p(X) = \sigma z_p + \mu \quad (32)$$

### 3.1.2 Deneysel VaR ve Koşullu VaR

Bağımsız hepsi  $F$  dağılım fonksiyonuna sahip  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rassal değişkenlerinden elde edilmiş  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gözlem değerlerine sahip olduğumuzu kabul edelim.  $F_n(x)$  deneysel dağılım fonksiyonu ve  $q_p(F_n)$  de kuantil fonksiyonu olsun. Eğer  $x_1, x_2, \dots, x_n$  örneğini  $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \dots \geq x_{n,n}$  şeklinde sıralarsak o zaman deneysel kuantil aşağıdaki gibi olur.

$$VaR_p(X) = \hat{q}_p(F) = x_{[np]+1,n} \quad (33)$$

Koşullu VaR ın deneysel tahmini ise aşağıdaki gibidir.

$$ES_p(F) = \frac{\sum_{k=1}^{[np]+1} x_{k,n}}{[np]+1} \quad (34)$$

Diğer bir deyişle, en büyük  $[np]+1$  tane gözlem değerinin ortalamasıdır. Yukarıdaki tahminlerin güvenilirliği  $p$  güven seviyesine ve gözlem sayısına bağlıdır. Güven seviyesi  $p$  için koşullu VaR (ES) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ES_p(X) = E(X | X > VaR_p(X)) \quad (35)$$

### 3.2 Kararlı VaR

Menkul kıymet getirilerin  $\alpha$  –kararlı bir dağılım izlediği varsayımı altında, VaR hesabı normal durumdakine benzerdir. Tek değişiklik burada  $z_p$  kuantili standartlaştırılmış kararlı dağılımdan türetilmiştir. Ayrıca  $\sigma$  da kararlı dağılımdan tahmin edilmiş olmalıdır. Kısa süreli yatırımlar için beklenen getiri  $\mu = 0$  olarak alınabilir. Bu durumda,

$$VaR_p(X) = \sigma z_p \quad (36)$$

Birbirleriyle ilişkili malların düşünülmesi durumunda, Risk Metrik yaklaşımı uygun olmamaktadır. Bu nedenle Rachev et.al(2000)<sup>14</sup> kararlı rassal değişkenler için aşağıdaki algoritmayı önermiştir.

a) Portföydeki her bir mal için  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$  parametrelerini tahmin edilir.

b) Varyans-Kovaryans matrisi  $\sum_z$  tahmin edilir.

c)  $N(0, \sum_z)$  çok değişkenli normal dağılımından

$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$  rassal değişkenleri türetilir.

d)  $X_i = S_{\frac{\alpha_i}{2}}(B_i, 1, 0)$  kararlı rassal değişkenlerinden  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  gibi n tane rassal değişken türetilir. Burada,

$$B_i = \frac{2(k^{\alpha_i+1})^{-\frac{2}{\alpha_i}} \mu_i^2}{\sigma_{Z_i}^2} \left( \cos\left(\frac{\pi \alpha_i}{4}\right) \right)^{\frac{2}{\alpha_i}}, i = 1, 2, \dots, n$$

e)  $R_i^{(1)} = \sqrt{X_i} Z_i, i = 1, 2, \dots, n$  değerlerini oluştur

f)  $(R_1^{(2)}, R_2^{(2)}, \dots, R_n^{(2)})'$  vektörü oluşturulur. Burada

$$R_i^{(2)} = S_{\alpha_i} \left( k(k^{\alpha_i} + 1)^{-\frac{1}{\alpha_i}} \mu_i, (1 + k^{-\alpha_i}) \beta_i, 0 \right), i = 1, 2, \dots, n$$

g) Portföy getirileri hesaplanır.

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i^{(1)} + \sum_{i=1}^n w_i R_i^{(2)}$$

h) c-g adımları tekrar edilerek simüle edilmiş değerler türetilir.

i) Simülasyondan elde edilmiş değerler küçükten büyüğe doğru sıralanır.

VaR değeri, sıralanmış serinin  $(pN)$  inci terimidir. N simülasyondan elde edilmiş değer sayısını göstermektedir.

<sup>14</sup>Rachev, S., Schwatz, Khindanova, I. "Stable modeling of credit risk". **Technical report**. Anderson school of management. Department of finance, 2000.

### 3.2.1 Kararlı Koşullu VaR

$X$  in kararlı dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, koşullu VaR aşağıdaki integral gösteriminden elde edilir. Eğer  $X$  bir standart kararlı dağılıma sahipse,

$$ES_p(X) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{|VaR_p(X)|}{\pi p} \int_{-c}^{\pi/2} \phi(x) \exp\left(-|VaR_p(X)|^{1-\alpha} \mathcal{G}(x)\right) dx \quad (37)$$

$$\phi(x) = \frac{\sin(\alpha(c+x) - 2x)}{\sin(\alpha(c+x))} - \frac{\alpha \cos^2 x}{\sin^2(\alpha(c+x))}$$

$$\mathcal{G}(x) = \cos^{\frac{1}{\alpha-1}}(\alpha c) \left( \frac{\cos x}{\sin(\alpha(c+x))} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos((\alpha c) + (\alpha-1)x)}{\cos x}$$

$$c = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(-\text{sign}(VaR_p(X)) \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$$

Genelde  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  için  $Y \sim \sigma X + \mu$  olacağından

$$ES_p(Y) = \sigma ES_p(X) + \mu \quad (38)$$

### 3.3 Ortalama VAR

Kuyruk olasılığı  $p$  olan ortalama VaR ( $OVaR$ ),  $VaR_p(X)$  den daha büyük olan VaR ların ortalaması olarak tanımlanır.

$$OVaR_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_t(X) dt \quad (39)$$

$$VaR_p(X) = F_X^{-1}(p) = \bar{F}_X^{-1}(1-p)$$

$$OVaR_p(X) = VaR_p(X) + \frac{1}{1-p} E\left[(X - VaR_p(X))^+\right] \quad (40)$$

#### 3.3.1 Deneysel Ortalama VAR

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  zamanlarında gözlenmiş kayıp değerleri olsun.
- Kayıp değerleri,  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$  gibi artan şekilde sıralanır.
- $p$  kuyruk olasılığı ile kayıpların ortalama VaR'ı aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$OVaR_p(X) = \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=[np]+1}^n x_{(k)} + \left( \frac{[np]}{n} - p \right) x_{([np])} \right) \quad (41)$$

VaR ve OVaR değerleri  $\{ \%90, \%91, \dots, \%99 \}$  güven seviyeleri için hesaplanır.

### 3.4 Hurst Analizi

Hurst üsteli, kaos fraktal ve finans vb. gibi bir çok farklı alanda karşımıza çıkmaktadır. Hurst üsteli, bir zaman serisindeki uzun vadeli bağımlılığı karakterize etmek için kullanılan özet bir ölçümdür. H Hurst üsteli değişik yöntemlerle tahmin edilebilir. Aşağıda  $R/S$  analizine dayanan bir yöntem verilmektedir<sup>15</sup>. Yöntem olarak aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- $x_1, x_2, \dots, x_N$  gibi N tane gözlem değeri verilmiş olsun.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

- Her bir gözlem değerinden gözlem ortalaması çıkartılarak, seri, normalleştirilir.

$$r_k = x_k - \bar{x} \quad , k = 1, 2, \dots, N$$

- Aşağıdaki kısmi toplamlar serisi oluşturulur.

$$X_n = \sum_{k=1}^n r_k$$

- Kısmi toplamlar serisinin maksimumu ve minimumu hesaplanır

$$Y_1 = \max(X_n : 1 \leq n \leq N) \quad Y_2 = \min(X_n : 1 \leq n \leq N)$$

- H Hurst üsteli aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{H} = \frac{1}{\log N} \log \left( \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma} \right) \quad (42)$$

Burada,  $H \in (0,1)$  dir.  $H = 0.5$  için sürecin rassal yürüyüş,  $H > 0.5$  için kalıcı (uzun vadeli bağımlı) ve  $H < 0.5$  ise ortalamaya dönme davranışı gösterdiği söylenir. Fraktal boyut bir yüzeyin pürüzlülüğünü veya bir serideki dalgalanmayı ifade eder. H Hurst üsteli ile fraktal boyut arasında aşağıdaki şekilde bir ilişki mevcuttur.  $d = 2 - H$ , Eğer  $d = 2$  ise hisse senedinin rassal olarak hareket ettiği,  $1.5 < d < 2$  ise çok oynak olduğu,  $1 < d < 1.5$  ise de hisses senedinin doğrusal tarzda hareket ettiği söylenir.

<sup>15</sup> Hurst, H.E. "Long-term storage capacity of reservoirs", **Trans.Amer.Soc.Civil Eng.**, 116, 1951, 770-799.



#### 4. Uygulama

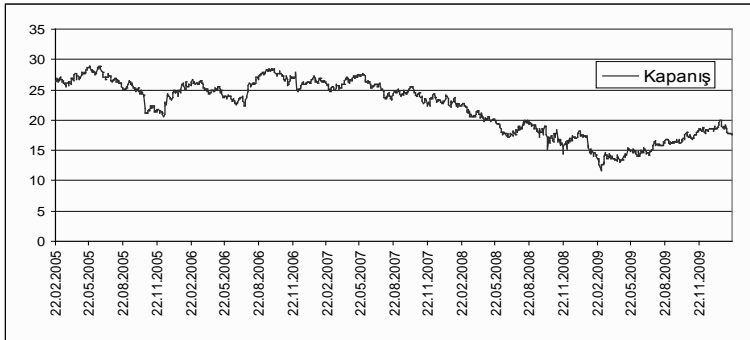
Çalışmanın bu bölümünde, önceki bölümlerde açıklanan modelleri test etmek amacıyla deneysel sonuçları araştırıyoruz. Bu deneysel çalışmalar için Pfizer hisse senedinin 22.02.2005 – 22.02.2010 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatlarını kullanıyoruz. Veriler Yahoo finans web sitesinden derlenmiştir.

Burada fiyatlardan çok getiriler ile çalışacağız. Çünkü getiriler, yatırım performansını, kullanılan skaladan bağımsız olarak ölçme imkanı vermektedir. Günlük verileri kullanmamızın iki temel nedeni vardır. Bunlardan birincisi, uygulamada genellikle VaR ve ilişkili risk ölçümleri günlük bazda hesaplanmaktadır. İkincisi de asimptotik sonuçlara ulaşmak için daha çok veri kullanma gereksinimidir. Günlük logaritmik getirileri ele alıyoruz. Logaritma sayesinde, çok periyotluk bir getiriye, bir periyotluk getirilerin toplamına dönüştürme imkanına kavuşuruz.  $P_t$  : Endeksin (veya hisse senedinin) günlük kapanış fiyatını,  $S_t$  de bir finansal malın veya bir portföyün t zamanındaki logaritmik değeri göstermektedir.  $S_t = \log P_t$  olarak tanımlanmıştır.  $[t, t + 1]$  zaman periyodunu göz önüne alalım. Periyodun sonundaki  $S_{t+1}$  değerini şimdiden bilemeyiz. Ancak kazanç ve kayıp dağılımı olarak  $S_{t+1} - S_t$  nin dağılımını bilebiliriz. Çalışmada aşağıdaki şekilde gösterilen kayıplar la ilgileneceğiz.

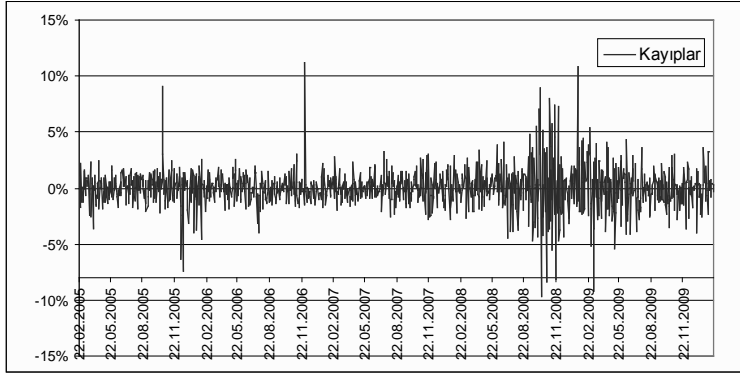
$$X_{t+1} = -(S_{t+1} - S_t) = -(\ln P_{t+1} - \ln P_t) \quad (43)$$

Böylece pozitif getiriler kayıpları, negatif getiriler ise kazançları gösterecektir. Uygulamada gözlem değerleri olan getirilerin  $\{X_t\}_{t=1}^n$ , kümülatif dağılım fonksiyonu F olan bir dağılımdan alınmış bağımsız rassal değişkenlerin bir örneği olduğunu kabul edeceğiz.

**Tablo 4.1** Pfizer hisse senedi kapanış fiyatları



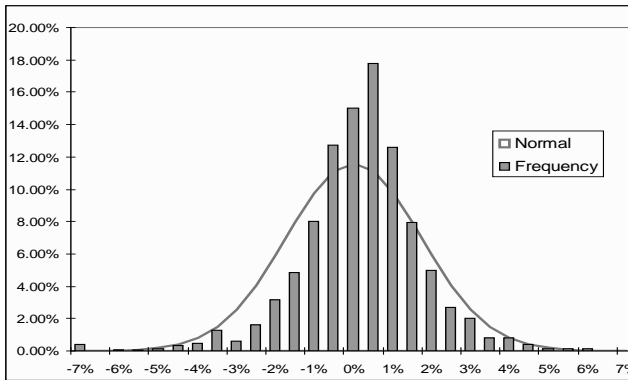
**Tablo 4.2** Pfizer hisse senedinin normalleştirilmiş kayıpları



**Tablo4.**Normalleştirilmiş kayıp değerleri için özet istatistikler. basıklıklar (basıklık-3) şeklinde hesaplanmıştır

	Ortalama	Std.Sapma	Çarpıklık	Basıklık
<b>PFIZER</b>	0.000323	0.0172	0.2930	7.0762

**Şekil 4.1** Pfizer normalleştirilmiş kayıplar



Analizler sonucunda çarpıklık ve basıklığın normal dağılımdan farklı olduğu görülmektedir

**Tablo 4.4** Standartlaştırılmış getirileri için simetrik kararlı dağılımın parametre tahmini

Parametre	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\beta}$ (%95 Güven aralığı)
<b>Pfizer</b>	<b>1.42</b>	<b>1.0062</b>	<b>0</b>	<b>(0.22305- 0.391043)</b>

**Tablo 4.5** McCulloch yöntemi kullanılarak kararlı dağılım dağılımın parametre tahmini

Parametre	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\beta}$
<b>Pfizer</b>	<b>1.534</b>	<b>0.846</b>	<b>-0.03823</b>	<b>0.229</b>

#### 4.1 Varyansın Yakınsaklığının Testi

Sonsuz varyanslı bir  $X$  rassal değişkeninin deneysel varyanslar kümesi ıraksak olmalıdır.  $x_1, x_2, \dots, x_N$   $X$  rassal değişkeninden alınan bağımsız aynı dağılıma sahip rassal değişkenler olsun.  $N < \infty$  ve  $\bar{x}$  ilk  $n$  tane rassal gözlem değerinin ortalaması olsun. Bu durumda deneysel varyanslar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad 1 \leq n \leq N$$
 Eğer bir dağılım sonlu varyansa sahipse o

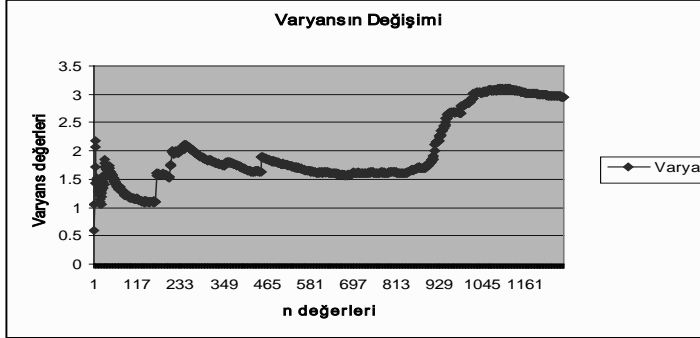
zaman  $n \rightarrow \infty$  yaklaştığında,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow C$  olacak şekilde sonlu bir  $C$

sabiti mevcut olmalıdır.  $\alpha = 2$  olması durumunda, dağılım  $\mu = 0$  ortalaması ile Gaussiandır ve varyans  $\sigma^2 = 2$  ile sonludur. Bu durumda  $E(S_n^2) = \sigma^2 = 2$  ve

$$Var(S_n^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{n-1} = \frac{8}{n-1}$$
 olur. Aksi takdirde getiri serisi sonsuz varyanslı olur.

$\alpha < 2$  ile Gaussian olmayan kararlı dağılımlar için  $S_n^2$  ıraksak olmalıdır.

**Şekil 4.2** Getirilerin için varyansın zamana göre değişimi



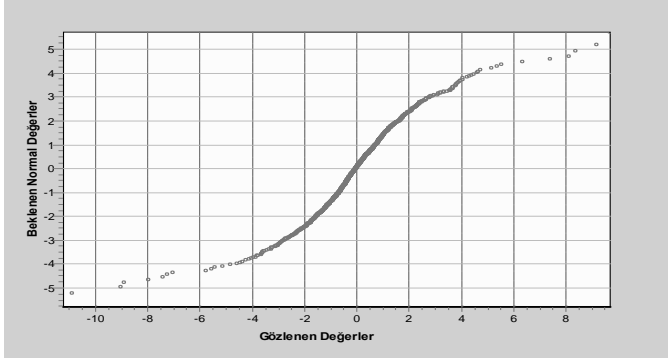
*Açıklama:* Belirli bir  $X_1, X_2, \dots, X_n$  veri kümesinin belirli bir  $F$  dağılım fonksiyonundan çekilip çekilmediğini test etmek için verilerle  $F$  olasılığını aynı grafikte düşünürüz.  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  sıralı örneği için, aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$E(F(X_{(i)})) = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$
 Sonuç olarak,  $\frac{i}{n+1}$  e karşı  $F(X_{(i)})$  nin

grafliğini çizeriz. Çok daha genel olarak,  $X_{(i)}$  ye karşı  $F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$  in grafiği çizilir. Eğer elde edilen grafik lineer değilse, bu örnek verilerin  $F$  dağılımından

çekilmemiş olduğunu gösterir. Bunun anlamı şudur; veriler muhtemelen sonsuz varyanslı bir dağılıma aittir.<sup>16</sup>

**Şekil 4.3** Tablo Pfizer hisse senedi getirilerinin (Q-Q) grafiği



**Tablo 4.6** Pfizer getirileri için VaR hesabı

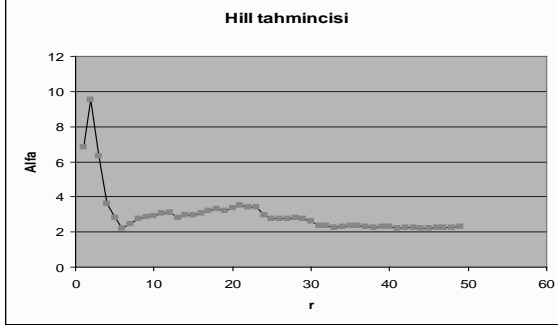
VaR	Tarihsel		Normal		Kararlı	
	1 Gün	10 Gün	1 Gün	10 Gün	1 Gün	10 Gün
0.90	1.752	5.706	2.298	7.266	1.723	5.445
0.95	2.536	7.379	2.832	8.954	2.515	7.952
0.99	4.675	14.858	4.005	12.664	6.512	20.593

**Tablo 4.7** koşullu VaR hesabı

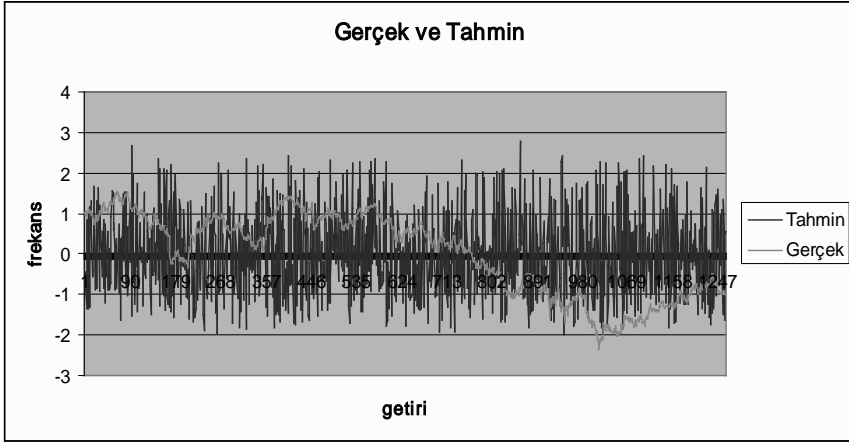
Koşullu VaR (ES)	Deneysel (1 gün)	Kararlı (1 gün)
%90	2.991914	2.935724
%95	4.03937	4.014016
%99	6.989656	8.552592

<sup>16</sup> Daniel.C., *Application of statistics industrial experimentation*, Wiley&Sons, NewYork, 1976.

**Şekil 4.4** Pfizer hisse senedi getirileri için Hill tahmincisi



**Şekil 4.5** Standartlaştırılmış gerçek getiriler ve simüle edilmiş standartlaştırılmış kararlı getirilerin karşılaştırılması



## 4.2 Kararlı Getirilerin Risk Ölçümleri Üzerindeki Etkisi

Buradaki amacımız, getirilerin bir kararlı dağılım izlediği varsayımı altında risk ölçümlerinin doğruluğunu araştırmaktır. Kıyaslama yapabilmek için kararlı risk ölçümleri ve uygulamada standart olarak kullanılan Gaussian varsayıma göre hesaplanmış risk ölçümleri kullanılmıştır. İlk olarak tarihsel getirileri kullanarak deneysel risk ölçümlerini hesaplıyoruz. Sonrada modeli kullanarak risk ölçümlerini hesaplıyoruz. Kararlı ve Gaussian risk ölçümlerinin her ikisinin de doğruluğunu aşağıdaki yanlılık ölçümüne göre karşılaştırıyoruz.

$$\text{Yanlılık} = (\text{Model değeri} - \text{Deneysel değer}) / \text{Deneysel değer}$$

Yukarıdaki formülde model değeri kararlı ve Gaussian risk ölçümleri, Deneysel değer ise gerçekleşmiş getirilerden hesaplanan risk ölçümüdür. Yanlılığı küçük olan ölçüm daha doğru bir ölçüm olacaktır. Hesaplanan yanlılık ölçümlerinin mutlak değerleri alınır ve hangisinin daha küçük olduğuna bakılır. Riskten kaçan yatırımcılar pozitif yanlılığı tercih ederler. Yanlılık sonuçları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

**Tablo4.8** VaR ölçümündeki yanlılık sonuçları

	Yanlılık			
Pfizer	Deneysel		Gaussian	
	1 gün	10 gün	1 gün	10 gün
%90	-0.01655	-0.04574	0.311644	0.273396
%95	-0.00828	0.077653	0.116719	-0.11191
%99	0.392941	0.385987	-0.14332	0.626105

Kararlı yanlılığın mutlak değeri genelde Gaussian yanlılıktan daha küçük olmaktadır. Buradan da  $\alpha$  -kararlı modelin Gaussian modele göre daha doğru VaR sonuçları verdiğini söyleyebiliriz.  $\alpha$  -kararlı model dağılımın çarpıklığını ve kalın kuyruklarını kontrol edebilme kabiliyetine sahip olduğundan bu model VAR ve diğer VaR tabanlı risk ölçümlerini tahmin etmek için uygun bir modeldir.  $\alpha \rightarrow 2$  yaklaştığında dağılım normale yaklaşmakta ve riskin hesaplanan değeri küçülmektedir.

**Tablo 4.9** Hurst üsteli ve fraktal boyut tahmini

	H Hurst üsteli	d Fraktal boyut
Pfizer	0.523058	1.476942

Pfizer hisse senedi getirileri için  $1 < d < 1.5$  koşulu sağlandığını dan getirilerin doğrusal tarzda hareket ettiği söylenebilir.

**Tablo 4.10** Deneysel ortalama VaR tahminleri

Pfizer	%90	%95	%99
D.Ort.VaR	5.14465	11.71705	68.31564

## 5. Sonuç

Çalışmada, kalın kuyruklu ve çarpık bir karaktere sahip finansal mal getirilerinin bir  $\alpha$  – Kararlı dağılım izlediği varsayımı altında, VaR, Koşullu VaR ve ortalama VaR gibi risk ölçümlerini tahmin ettik. Modelin Pfizer hisse senedi getirilerinin deneysel verilerine uygulanması sonucunda  $\alpha$  – Kararlı dağılım modelinin getirileri iyi bir şekilde temsil ettiğini gördük. Riski doğru bir şekilde tahmin edebilmek için risk faktörlerinin gelişimini idare eden modelin doğru bir şekilde belirlenmesi son derece önemlidir. Risk kazanç/kayıp dağılımının kuyruk kısmında yer alır.Şu halde risk ölçümü için uygun bir model kuyrukları iyi bir şekilde kontrol edebilen model olacaktır.Kararlı yoğunluk fonksiyonları kayıp/kazanç dağılımlarını iyi bir şekilde temsil edebilen en genel dağılımlardır.

---

## KAYNAKÇA

- DANIEL,C.,**Application of statistics industrial experimentation**, Wiley&Sons, NewYork, 1976.
- FAMA,E.,”The behavior of stock market prices”,**J.Business**,38,1965,34-105.
- FAMA,E.F.,ROLL,R.,”Some properties of symmetric stable distributions”,**Journal of the American Statistical Association**,63,1968,817
- FAMA,E.F.,ROLL,R.,”Parameter estimates for symmetric stable distributions”,**Journal of American Statistical Association**, 66,1971,331-38
- FIELITZ,B.D.,”Futher results on asymmetric stable distributions of stock prices changes”,**Journal of Financial and Qantitative Analysis**, March, 1976, 39-55.
- HILL,B.M.”A simple general approach to inference about the tail of a distribution”,**Annals of Statistics**, 3,1975 ,1163-1174.
- HURST,H.E. “Long –term storage capacity of reservoirs”. **Trans.Amer.Soc.Civil Eng.**,116,1951,770-799.
- JORION,P.,**Value at Risk : the New Benchmark for Measuring Financial risk**. McGraw-Hill, New York, 2001.
- MANDELBROT,B.,”The variation of certain speculative prices”**.J.Business**,36,1963, 394-419.
- McCULLOCH,,J.,H.,”Simple consistent estimators of stable distribution parameters” **Commun.Statist.Simulation**,15(4),1986,1109-1136.
- RACHEV,S.,Schwatze,E.,KHINDANOVA,I.”Stable modeling of credit risk”.**Technical report**.Anderson school of management.Department of finance,2000.
- SAMARODNITSKY,G.,TAQQU,M.,**Stable non-Gaussian random processes** Chapman&Hall, NewYork, 1994.
- WERON,R.”Levy stable distributions revised:tail index  $>2$  does not exclude the Levy-stable regime”, **International Journal of Modern Physics,C**, vol.12,no.2.,2001.
- WERON,R.,”Performance of the estimators of stable law parameters”, Hugo Steinhaue Center, Wraclaw University of Technology, **Research Report HSC/95/1**, 1995
- WERON,R.,”On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables”, **Stochastic and Probability Letters**, 28, 1996, 165-171.
- ZOLATAREV,A.,**One- dimensional stable distributions**,American mathematical society,Providence,RI.1996.