SPIELTHEORIE

Tamer MÜFTÜOĞLU

I. Der Begriffsapparat der Spieltheorie

Das Untersuchungsobjekt der Spieltheorie wird durch das folgende Zitat von SHUBIK am besten charakterisiert: «Ein Ingenieur oder Produktionsleiter, dem bestimmte Geldmittel zur Verfügung stehen und dem die Aufgabe übertragen wurde, einen industriellen Prozess umzustellen, um Kosten zu sparen oder eine Maschine zu produzieren, die eine bestimmte Aufgabe erfüllen soll, hat mit einer Minimierungs - oder Maximierungsaufgabe zu tun, in der er im wesentlichen die ganze von Menschen ausgeübte Kontrolle innehat. Einzelheiten, wie die Veränderungen des Wetters, ein eventuelles Versagen einer Maschine oder eine schlechte Verdauung, können seine Handlungen beeinflussen, aber in den meisten Fällen kann er solchen Dingen Rechnung tragen; es ist jedoch schon eine gute Annäherung, wenn man annimmt, dass er die Situation kontrolliert, also, sofern er sich nicht in einen psychotischen Zustand befindet, der ihn glauben macht, dass «seine Maschinen gegen ihn sind», sieht er sich einer Situation gegenüber, die im allgemeinen als Minimierungs - oder Maximierungsproblem bezeichnet werden kann. Aufgrund von Erfahrungen, die einige Leute gamacht haben, mögen wir vielleicht das Gefühl haben, dass es jedesmal regnen wird, wenn wir zu einem Picknick gehen; es ist jedoch gewöhnlich nicht vernünftig anzunehmen, dass eine übernatürliche Macht damit beschäftigt ist, uns die Freude zu verderben. Auf einem Schlachtfeld, während für die Aufstellung eines Kandidaten oder in einem Pokerspiel ist es vernünftig anzunehmen, dass es eine bewusste aktive Kraft gibt, die mindestens einigen unseren Interessen entgegensteht... Der Entscheider steht in einem Spiel einem Problem der Optimierung widerstreitender Interessen gegenüber. Er muss seine Pläne nicht nur seinen eigenen Wünschen und Fähigkeiten anpassen, sondern auch den Wünschen und Fähigkeiten anderer.»[1]

---

[1] SHUBIK, M., «Spieltheorie und die Untersuchung des sozialen Verhaltens: eine einführende Darstellung,» in: *Spieltheorie und Sozialwissenschaften*, Hrg.: SHUBIK, M., Hamburg, 1965, s. 1-f.

Nach diesem langen Zitat bleiben jetzt die einzelnen Begriffe der Spieltheorie zu erklären.

Unter einem Spiel wird ein Satz von Regeln verstanden, die die Spielregeln bilden.[2] «Unter den Spielregeln ist ein System von Bedingungen zu verstehen, die alle möglichen Varianten für die Operationen der Spieler, den Umfang der Operationen jedes Spielers über das Verhalten der anderen, die Aufeinanderfolge der Züge und auch das Resultat oder den Ausgang des Spiels, zu dem die Gesamtheit der Züge führt, festlegt».[3] Das Spiel wird demnach als ein abstrakter Begriff verstanden, der sich von einer speziellen Durchführung des Spiels unterscheidet: «Jedes spezielle Beispiel, bei dem ein Spiel auf eine ganz spezielle Art von Anfang bis zum Ende gespielt wird, ist eine «Partie».[4]

Der zeitliche Ablauf eines Spiels besteht aus einer Reihe aufeinanderfolgender Züge. Die Züge bilden also die Elemente eines Spiels, und als einen Zug bezeichnet man in der Spieltheorie die Auswahl einer der Alternativen, die unter der Berücksichtigung der Spielregeln erfolgt. Diese Auswahl einer Alternative kann von einem Spieler getroffen oder auch von einem Zufallsmechanismus bestimmt werden. Auch der Zug wird in der Spieltheorie als ein abstrakter Begriff verstanden. «Die speziell gewählte Alternative in einem konkreten Beispiel -d.h. in einer Partie-ist die «Wahl»... Das Spiel besteht aus einer Folge von Zügen, die Partie aus einer Folge von Wahlen».[5] Man unterscheidet zwischen persönlichen Zügen und Zufallszügen. «Als persönlichen Zug wollen wir die bewusste Auswahl eines der vorliegenden Stellung möglichen Zuges und seine Realisierung durch einen der Spieler bezeichnen... Als zufälligen Zug bezeichnen wir eine Auswahl aus der Menge der Züge, bei der die Entscheidung nicht vom Spieler gewählt wird, sondern von irgendeiner zufälligen Auswahl (Werfen einer Münze, Würfeln, Mischen und Verteilen der Karten usw.) abhängt».[6] Wenn ein Spiel mathematisch bestimmt sein soll, so muss die Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Zufallszüge zuerst ermittelt werden. Die Zahl der möglichen Alternativen für einen Zug ist durch die Spielregeln festgelegt.

---

[2] In dem Standardbuch der Spieltheorie «*Theory of Games and economic Behavior*» (deutsche Ausgabe: *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, Würzburg 1961) Wird definiert: «Das Spiel ist einfach die Gesamtheit aller Regeln, die es beschreiben», s. 48.

[3] WENTZEL, J. S., *Elemente der Spieltheorie*, Zürich-Frankfurt, 1964, s. 6.

[4] v. NEUMANN, J., u. MORGENSTERN, O. *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, 1961, s. 48.

[5] V. NEUMANN, J. und MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, S. 49

[6] WENTZEL, J. S., *a.a.O.*, s. 7.

Einige Spiele bestehen nur aus Zufallszügen, die Glücksspiele genannt werden und nicht zum Gegenstand der Spieltheorie gehören. Den Gegenstand der Spieltheorie bilden die strategischen Spiele, die mindestens einen persönlichen Zug aufweisen. Einige Spiele bestehen dagegen nur aus persönlichen Zügen, wie z.B. Schach. Die Mehrzahl der strategischen Spiele enthält jedoch sowohl persönliche Züge als auch Zufallszüge.

Der Informationsstand der Spieler in dem Spielablauf besitzt in der Spieltheorie zum Fällen einer Entscheidung für eine bestimmte Alternative eine grosse Bedeutung; man kann die Spiele nach diesem Informationsstand der Spieler in «die Spiele mit vollkommener Information» und in «die Spiele mit unvollkommener Information» klassifizieren. Als ein Spiel mit vollkommener Information werden diejenigen Spiele bezeichnet, in denen jeder Spieler bei jedem Zug die Resultate aller vorangegangenen Züge und darüber hinaus die Abfolge der gegnerischen Züge in ihrer funktionalen Verknüpfung, d.h., die Alternativen jedes gegnerischen Zuges, kennt. Das ist z.B. im Schachspiel immer der Fall. Jedoch ist diese Bedingung nicht in allen Spielen erfüllt. In Kartenspielen ist jeder Spieler im Spielablauf über die Durchführung der gegnerischen Züge orientiert, er kennt jedoch nicht, aus welchen Alternativen der Gegner für einen bestimmten Zug seine Wahl getroffen hat. Dieser Mangel an Spielübersicht führt zu Bluffen, Signalisieren usw. Solche Spiele gehören zu den Spielen mit unvollkommener Information. Alle Spieler besitzen jedoch in beiden Arten eine «vollständige Information», die sich auf die Kenntnis der Spielregeln bezieht, weil ohne diese Kenntnis, also ohne vollständige Information der Spieler, das Spiel nicht gespielt werden kann.

Man kann sich den Verlauf eines Spiels so vorstellen, dass sich jeder Spieler in jeder Spielsituation nach seinem jeweiligen Informationsstand für einen bestimmten Zug entscheidet, also als eine Kette von Zügen. Die einzelnen Spielsituationen sind durch die Gesamtheit der Informationen über den bisherigen Verlauf des Spiels gekennzeichnet, die dem Spieler auf Grund der Spielregeln in dem Moment zur Verfügung stehen, in dem er seine Entscheidung zu fällen hat. In dieser Weise kann aber jeder Spieler seine Entscheidungen für einzelne Züge in jeder müglichen Spielsituation nach seinem jeweiligen Informationsstand in einem Plan vorherbestimmen. Ein solcher Plan, der in der Spieltheorie als «Strategie» von grundlegender Bedeutung ist, kann wie folgt definiert werden. «Eine Strategie eines Spielers ist ein vollständiger Verhaltensplan, der für jede mögliche Situation, in die der Spieler im Verlauf einer Partie des Spieles gelangen kann, das Verhalten des Spielers, d.h. die in dieser Situation zu treffende Entscheidung festlegt».[7] Normalerweise wird natürlich jeder Spieler seine Entscheidung für einen Zug im Spielverlauf vornehmen. Man kann sich jedoch theoretisch vorstellen, dass diese Entscheidungen schon vor dem Spielbeginn nach dem jeweiligen Informationsstand getroffen und in einer Strategie zusammengefasst werden. Das ist im Prinzip für jedes Spiel möglich.

Gewöhnlich hat jeder Spieler mehrere Strategien. Der Spieler entscheidet sich entweder nur für eine bestimmte Strategie, die als «reine Strategie» bezeichnet wird, oder er nimmt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strategien vor, nach der die einzelnen Strategien zu spielen sind. Diese letzte Art wird als «gemischte Strategien» bezeichnet.

In Abhängigkeit von der Anzahl der Strategien unterscheidet man zwischen «endlichen Spielen» und «unendlichen Spielen». In endlichen Spielen hat jeder Spieler eine endliche Anzahl von Strategien, in unendlichen Spielen besitzt dagegen mindestens ein Spieler unendliche Strategien. In dieser Arbeit werden nur die endlichen Spiele behandelt, die auch den Regelfall bilden.

II. Das Ziel der Spieltheorie

Das Ziel der Spieltheorie besteht darin, für den Spieler Empfehlungen für ein rationales Verhalten in Konfliktsituationen[8] auszuarbeiten. Diese Empfehlung wird als Bestimmung einer optimalen Strategie für den betreffenden Spieler gewonnen, die sowohl eine reine Strategie als auch eine gemischte Strategie sein kann. «Als optimale Strategie eines Spielers wird in der Theorie der Spiele eine solche Strategie bezeichnet, die bei mehrfacher Wiederholung des Spiels dem jeweiligen Spieler einen maximal möglichen mittleren Gewinn sichert (oder was dasselbe ist, einen minimal möglichen Verlust)».[9] Wenn die optimale Strategie eine reine Strategie ist, so entspricht der mittlere Wert dem Wert dieser reinen Strategie, bzw. die reine Strategie wird bei der mehrfachen Wiederholung eines Spiels jedes Mal angewendet.

---

[7] BURGER, E., *Einführung in die Spieltheorie*, Berlin 1959, s. 10.

[8] «Bei der Lösung vieler praktischer Aufgaben (in Ökonomie, Millitärwissensenschaften usw.) sind Situationen zu analysieren, in denen sich zwei (oder mehrere) Seiten gegenüberstehen, die entgegengesetzte Ziele verfolgen. Hierbei sind die Auswirkungen jeder Massnahme davon abhängig, welche Handlungsweise der Gegner auswählt. Liegt eine solche Situation vor, so wollen wir sie als «Konfliktsituation» bezeichnen.» WENTZEL, J. S., *a.a.O.*, s. 5.

[9] WENTZEL, J. S., *a.a.O.*, s. 13.

Dieser «maximal mögliche mittlere Gewinn» ist der sicherste Maximalgewinn, der auch im ungünstigsten Fall zu erreichen ist. In der Spieltheorie nimmt man an, dass der Gegner genauso rational handelt und alles tun wird, um zu verhindern, dass der andere sein Ziel erreicht, weil er mit anderen in einem Zielkonflikt steht.

In jedem Spiel wird, wenn um Geld gespielt wird, gewonnen oder verloren. Das Ziel der Spieler besteht darin, diesen Gewinn oder Verlust zu maximieren bzw. minimieren. Man kann in diesem Fall das Ergebnis auch numerisch ausdrücken. In der Spieltheorie werden diese Grössen in Nutzen ausgedrückt. «Es war nun möglich, entgegen den herrschenden Ansichten über die Unmessbarkeit des Nutzens, diesen eine Zahl so zuzuordnen, dass die Theorie der Indifferenzkurven und die äquivalenten Formen überflüssig werden».[10] v. NEUMANN und MORGENSTERN haben dies, von dem «erwarteten Nutzen» ausgehend, durch ein strenges axiomatisches System erreicht. «Die Axiome beruhen auf der Tatsache, (1) dass ein Individuum eine vollständige Ordnung seiner Bedürfnisse hat und (2) dass es imstande ist, eine Kombination von mindestens zwei Bedürfnissen sich vorzustellen. Auf dieser Grundlage kann man den Nutzen numerisch messbar machen, d.h. bis auf eine lineare Transformation, und ohne Festlegung einer Null oder eines Massstabes».[11]

III. Die «extensive» und «normalisierte» Form der Spielbeschreibung

Der Spielablauf kann in der Form dargestellt werden, dass man alle Abfolgen der Züge, die Auswahl der Alternativen und die Veränderung des Informationsstandes für jeden Spieler von Beginn bis zum Ende des Spiels verfolgt, und dann das Ergebnis des Spieles bekanntgibt. Eine solche Beschreibung des Spiels bezeichnet man als «extensive» Form der Spielbeschreibung, die dem tatsächlichen Spielverlauf entspricht.

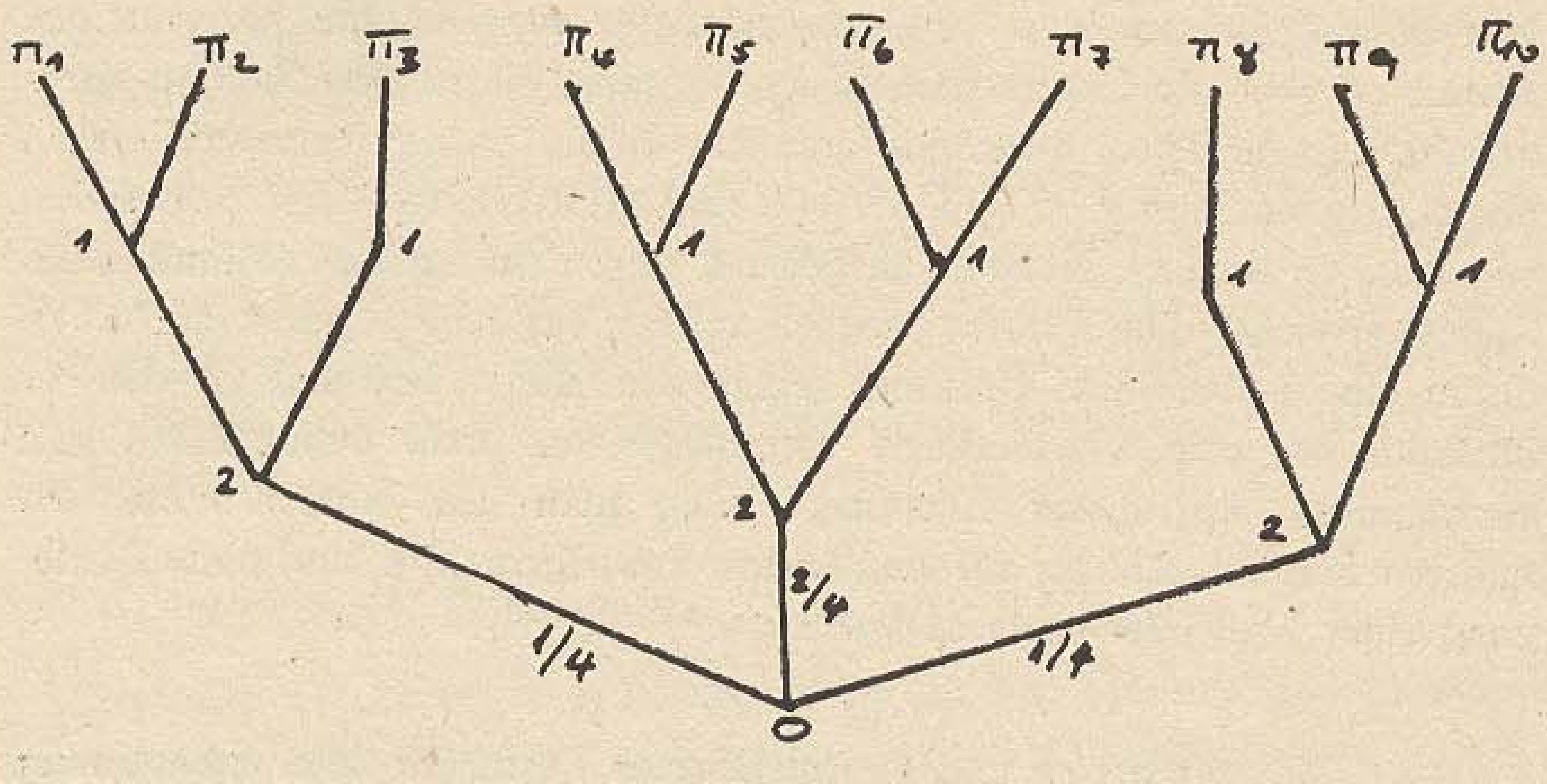
---

[10] MORGENSTERN, O., *Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft*, s. 79.

[11] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 79. Der Beweis beruht auf der Anwendung des Dedekindschen Schnittes. MORGENSTERN weist weiter darauf hin: «Obwohl diese Fragen von erheblicher Interesse sind, spielen sie doch für unsere Theorie eine nur untergeordnete Rolle. Sollte die Messbakeit des Nutzens nicht akzeptiert werden, so würde das die Theorie der Spiele nicht sehr tief berühren. Sie wären dann nur auf die Fälle anwendbar, bei denen klarerweise Zahlen vorliegen, nämlich wenn Gewinne in Geld ausgedrückt und übertragen werden. Die Mehrzahl der ökonomischen Vorgänge gehört in diese Klasse, und zwar gerade diejenigen, die, wie die Erscheinung der monopolistischen Konkurrenz, am meisten Schwierigkeiten bereitet haben.» s. 80.

Zur Beschreibung der extensiven Form eines Spiels benutzt man die mengentheoretische Methode oder die aus der Topologie entliehene geometrische Zweigmethode. Die Zweigmethode wird hier in ihren Grundlagen dargestellt (Abb. 1).

Jedes Spiel kann durch einen solchen Zweig wie in Abb. 1 dargestellt werden. Hier können die Verzweigungspunkte als Züge, die Verbindungslinien von einem Punkt zum anderen als Wahlen und die von einem Punkt nach oben aufstrebenden Linien als Alternativen gekennzeichnet werden. Die Nummer bei jedem Verzweigungspunkt repräsentiert den Spieler, dem



(Abb. 1)

der jeweilige Zug zusteht. Die Nummer O bezeichnet, dass ihr zugehöriger Zug ein Zufallszug ist, und man ordnet den einzelnen Alternativen die Wahrscheinlickeit ihres Auftretens zu. Jede vom Fusspunkt bis zum Endpunkt monoton steigende Linie repräsentiert eine Partie. Weil auch jeder Endpunkt nur mit einer einzigen Linie zum Fusspunkt verbunden ist, «sind die Endpunkte auch für sich genommen zur Repräsentation der Partien geeignet. Ihre Zahl stimmt mit der Zahl der möglichen (nicht identischen) Partien überein. Auch die Zweigsmethode (wie die mengentheoretische Methode) führt also zur Auffassung von Spiel als Summe seiner nicht identischen Partien.»[12] Das heisst mit anderen Worten, dass der Zweig als ganzes das Spiel repräsentiert.

Die andere sehr vereinfachte Spielbeschreibung ist die «normalisierte» Form, die der extensiven Form mathematisch streng äquivalent ist. Die

---

[12] NICOLIN, R., *Die Theorie der Spiele und ihre Bedeutung für die Theorie der oligopolistischen Konkurrenz*, Diss. Köln, 1958, s. 26.

«normalisierte» Form wird im Rahmen der Strategien gegeben, die den Spielern zur Verfügung stehen. Das Partieergebnis kann nämlich als Funktion von den Strategien angesehen werden, die von den Spielern und dem Zufallsmechanismus zur Anwendung gebracht werden.

$$F_k(\pi) = G_k(s_o, s_1, s_2 \ldots, s_n)$$

wobei $s_1, \ldots s_n$ die Strategien der Spieler, s_o die des Zufalls sind. s_o hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ($s_o = 1, \ldots \beta_o$). π ist das Partieegebnis, das durch $(n+1)$ Strategien determiniert ist. $F_k(\pi)$ stellt das Ergebnis für den Spieler k. Auf der anderen Seite besteht über alle G_k eine mathematische Erwartung, weil sie eine Wahrscheinlichkeit besitzt. Man muss deshalb die bisherige Funktion des Partieergebnisses durch folgendes ersetzen:

$$H_k(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{s_o=1}^{\beta_o} Ps_o . \ G_k(s_o, s_1, \ldots, s_n)$$

wobei $Ps_o = p_1, p_2, \ldots p_\beta$ ist.

Damit hat man den Zufall eliminiert, und das Partieergebnis hängt nun nur von den Strategien der (n) Spieler ab. Die H_k wird als Zahlungsfunktion des Spielers k bezeichnet. Übrigens bleibt die Tatsache auch nach dem Ersatz der G_k durch H_k bestehen, dass das Spielergebnis (Wert des Spieles) eine mathematische Erwartung darstellt.

IV. Nullsummenspiele

1. Zwei-Personen-Nullsummenspiele

a) Minimax-Prinzip

Nehmen wir ein Zwei-Personenspiel mit der Summe Null, in dem der erste Spieler A über (m) und der zweite Spieler über (n) Strategien verfügt. Jede beliebige Kombination der Strategien von A und B entspricht einem Spielergebnis, aus dem jeder Spieler für sich das Beste herausholen will. Wie die folgende Matrix,[13] zeigt, haben wir in diesem Fall (mxn) Spielergebnisse.

[13] Eine solche Matrix wird in der Spieltheorie als «Spielmatrix» oder «Auszahlungsmatrix» bezeichnet.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{l} A \\ \downarrow \;\; B\rightarrow \end{array} & \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \ldots\ldots & B_j & \ldots\ldots & B_n \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots\ldots & v_{1j} & \ldots\ldots & v_{2n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots\ldots & v_{2j} & \ldots\ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{i1} & v_{i2} & \ldots\ldots & v_{ij} & \ldots\ldots & v_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots\ldots & v_{mj} & \ldots\ldots & v_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matrix 1

Bezeichnen wir mit dem Index (i) die Nummer der Strategie von A und mit dem Index (j) die Number der Strategie von B. Die Aufgabe besteht jetzt darin, die optimalen Strategien für A und B zu bestimmen.

Der Spieler A wird, um seine optimale Strategie ausfindig zu machen, davon ausgehen, alle seine Strategien nacheinander zu analysieren und in seiner Analyse zu berücksichtigen, dass sein Gegner B ebenfalls nach höchstem Gewinn strebt und der Auswahl seiner Strategie (von B_1 bis B_n) zu einer Minimierung des Gewinns von A strebt, was dasselbe bedeutet, dass er seinen eigenen Gewinn maximieren will (Zwei-Personen-Nullsummenspiel). Der Spieler B wird also seine Strategie B_j in der Weise wählen, dass das Spielergebnis von A, W_A (A_i, B_j) minimiert werden kann:

$$a_i = \mathrm{Min}_j \; W_A \, (A_i, B_j)$$

Der Spieler A muss also, um seine optimale Strategie zu finden, den kleinsten Wert jeder Zeile bestimmen, auf den ihn der Spieler B zwingen kann. Diese kleinsten Werte der Zeilen bezeichnen wir mit a_i, wobei $i = 1, 2, \ldots, m$ ist.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{matrix} B\rightarrow \\ A \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots\dots\dots & B_n \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Zeilenminima} \\ (a_i) \\ \downarrow \end{matrix} \\
\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} W(A_1B_1) & W(A_1B_2) & \dots\dots\dots & W(A_1B_n) \\ W(A_1B_2) & W(A_2B_2) & \dots\dots\dots & W(A_2B_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (W(A_mB_1) & W(A_mB_i) & \dots\dots\dots & W(A_mB_n) \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} \\
\begin{matrix} \text{Spalten} \\ \text{maxima} \\ (b_j)\rightarrow \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & & b_n \end{matrix} &
\end{array}
$$

Matrix 2

Der Spieler A wird seine Strategie (A_i) wählen, die den maximalen Wert der Zeilenminima realisiert. Er sucht also in der letzten Spalte a_i in Matrix 2 den maximalen a und wendet die Strategie an, die diesen maximalen Wert der Zeilenminima verwirklicht. Dieser Wert wird hier mit v_1 bezeichnet.

$$v_1 = \mathrm{Max}_i \ \mathrm{Min}_j \ W_A (A_i, B_j)$$

Der Spieler B entwickelt seine Uberlegungen auf entsprechende Weise. Da das Spiel ein Nullsummenspiel ist, wird der Gewinn von A gleich dem Verlust von B sein. Das heisst, dass

$$W_A (A_i , B_j) = - W_B (A_i , B_j)$$

ist, oder, wenn wir

$$W_A (A_i , B_j) = W (A_i , B_j)$$

schreiben,

$$W_B (A_i , B_j) = - W (A_i , B_j)$$

ist.

Der Spieler B wird also den Wert von $W(A_i , B_j)$ zu minimieren versuchen und dabei einkalkulieren müssen, dass sein Gegenspieler A eine solche Strategie wählen wird, mit der das Spielergebnis dem maximalen Werte jeder Spalte bestimmen, auf den ihn sein Gegner A zwingen kann. Diese Werte werden mit b_j bezeichnet, wobei $j = 1, 2, \dots, n$ ist:

$$b_j = \mathrm{Max}_i \; W_B \, (A_i \, , B_j)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

Der Spieler B wird die Strategie wählen, damit b_j Minimum wird.

$$v_2 = \mathrm{Min}_j \; \mathrm{Max}_i \; W_B \, (A_i \, , B_j)$$

Der Wert v_2 steht in einer bestimmten Spalte der Matrix, und diejenige Strategie des Spielers B ist optimal, die dieser Spalte entspricht und als Minimax-Strategie bezeichnet wird. Wenn B seine Minimax-Strategie anwendet, so ist sein Gewinn in keinem Falle kleiner als v_2. Wenn sich sein Gegner A nicht rational verhält, wird sein Gewinn nur grösser, solange er an seiner Minimax-Strategie festhält.

Die Lage für den Spieler A ist die gleiche: Der Wert v_1, der in einer bestimmten Zeile der Matrix steht - die dieser Spalte entsprechende Strategie wird Maximin-Strategie genannt-stellt den höchsten Gewinn dar, den sein Gegner B nicht verhindern kann. Verhält sich B nicht rational, so wird der Gewinn von A nur grösser, bzw. sein Verlust nur kleiner als v_1.

Diese optimale Strategiekombination wird in der Spieltheorie als Minimax-Strategie bezeichnet. Sie ist nur stabil, wenn $v_1 = v_2$ ist. Das ist jedoch nicht immer der Fall. In dem Falle der Gleichung von v_1 und v_2 ist das Gleichgewicht erreicht. Wenn $v_1 = v_2$ ist, wird die Stabilität unter bestimmten Bedingungen erfüllt, wie es in den folgenden Abschnitten zu behandeln ist. In der Ungleichheit kann v_2 nur grösser als v_1 sein. Allgemein kann man also schreiben:

$$v_1 \leqq v_2$$

oder

$$\mathrm{Max}_i \; \mathrm{Min}_j \; W(A_i \, B_j) \leqq \mathrm{Min}_j \; \mathrm{Max}_i \; W(A_i \, , B_j)$$

b) Spiele mit reinen Strategien —eindeutig bestimmte Spiele—

Das sind die Spiele, in denen die Gleichung $v_1 = v_2$ erfüllt ist. Diese Spiele sind die einfachsten Spiele, weil sie immer eine Lösung haben, die zu einer bestimmten Strategiekombination von beiden Spielern führt. Diese Strategien bezeichnet man in der Spieltheorie als «reine Strategien».

Nehmen wir das folgende Beispiel:[14] Die Spieler A und B sollen unabhängig voneinander einen von drei Werten (—1), (0) und (+1) wählen. Wir bezeichnen den Wert, der von A gewählt wird, mit (s) und den von B gewählten mit (t). Nach dem Spiel soll B an A den Betrag

[11] Das Beispiel ist aus dem Buch «*Theorie der Spiele und Lineare Programmierung*, Berlin 1962, von S. VAJDA entnommen. s. 13.

$$[s\,(t-s)+t\,(t+s)]$$

entrichten. Das Spielergebnis wird zweifellos von den Strategien abhängig sein, die A und B gewählt haben. Wir stellen die möglichen Spielergebnisse in der folgenden Spielmatrix dar:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\begin{matrix}B\rightarrow\\ A\\ \downarrow\end{matrix} & (-1) & (0) & (+1) & \text{Zeilenminima} \\
\hline
(-1) & 2 & -1 & -2 & -2 \\
(0) & 1 & 0 & 1 & 0 \longrightarrow v_1 \\
(+1) & -2 & -1 & 2 & -2 \\
\hline
\text{Spaltenmaxime} & 2 & \begin{matrix}0\\ \downarrow\\ v_1\end{matrix} & 2 &
\end{array}$$

Matrix 3

Die Beträge, die A an B zahlen muss, entsprechen den negativen Werten der obigen Matrix:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\begin{matrix}B\rightarrow\\ A\\ \downarrow\end{matrix} & (-1) & (0) & (1) & \text{Zeilenmaxima} \\
\hline
(-1) & 2 & 1 & -2 & 2 \\
(0) & -1 & 0 & -1 & \leftarrow 0 \\
(1) & -2 & 1 & 2 & 2 \\
\hline
\text{Spaltenmaxima} & -2 & 0 & -2 &
\end{array}$$

Matrix 4

Wenn der Spieler A den Wert (—1) wählt, kann er 2 Einheiten gewinnen, wenn sein Gegner B ebenfalls den Wert (—1) wählt. Er wird 1 Einheit, sogar 2 Einheiten verlieren, d.h. —1 Einheit oder —2 Einheiten gewinnen, wenn B den Wert (0) bzw. (+1) wählt, und B wird natürlich in diesem Fall (+1) wählen.

Wenn A dagegen den Wert (0) wählt, so wird er im schlimmsten Fall nichts gewinnen. Dieser Betrag 0 entspricht dem Maximum der Zeilenminima. Wenn er also s = 0 wählt, garantiert er in jedem Fall diesen Betrag, und wenn sein Gegner den Wert (—1) oder (+1) wählt, so gewinnt er sogar 1 Einheit.

Der Spieler B wird sich den gleichen Überlegungen zufolge für den Wert t = 0 entscheiden, weil der minimale Betrag der Spaltenmaxima zu dieser Strategie führt. (In Matrix 4 entspricht dieser Betrag dem Maximum der Spaltenminima).

Die optimale reine Strategie für den Spieler A ist also die Strategie s = 0 und für B die Strategie t = 0. Ein Abweichen von dieser optimalen Strategie bringt dem abweichenden Spieler nur Verluste, solange der andere an seiner optimalen Strategie festhält. Jeder Spieler kann in Spielen mit reinen Strategien sogar schon vor dem Spielbeginn bekanntgeben, welche Strategie er wählen wird, ohne davon einen Nachteil zu spüren. Die Informiertheit der Spieler über anzuwendende gegnerische Strategie hat also hier keine Bedeutung.

Solche Spiele, in denen das Maximum der Zeilenminima und das Minimum der Spaltenmaxima gleich sind, bzw. $v_1 = v_2$ ist, werden auch als «determinierte Spiele», und das Matrixelement, das der optimalen Strategie-Kombination der Spieler entspricht, als Sattelpunkt des Spieles bezeichnet.

Alle determinierten Spiele haben eine Lösung, die bei rationalem Verhalten der Spieler immer stabil ist. Beide Spieler werden ihre Optimalstrategie auch bei mehrfacher Wiederholung des gleichen Spiels nicht ändern.

Alle Spiele mit vollkommener Information haben einen solchen Sattelpunkt. Sie sind determinierte Spiele, und man kann prinzipiell für sie immer eine Lösung finden. Schachspiel gehört z.B. zu dieser Klasse. «Schach ist aber so kompliziert, dass man selbst mit den modernsten Elektronen - Rechenmaschinen, die z.B. 10.000 Multiplikationen vielstelliger Zahlen in einer Sekunde durchführen, die beste Strategie (noch) nicht ausrechnen kann».[15]

---

[15] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, S. 84.

c) Spiele mit gemischten Strategien-nicht eindeutig bestimmte Spiele-

In den meisten Spielen ist die Gleichung $v_1 = v_2$ nicht erfüllt, d.h. das Maximum der Zeilenminima ist kleiner als das Minimum der Spaltenmaxima.

Nehmen wir das folgende Beispiel: Die Spieler A und B haben je zwei Strategien.

$$\begin{array}{lcc}
B\rightarrow & \begin{array}{cc} B_1 & \quad B_2 \end{array} & \text{Zeilenminima} \\
A\downarrow & & \\
\begin{array}{c} A_2 \\ A_1 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & \quad 1 \\ 1 & \quad -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \\
\text{Spaltenmaxima} & \begin{array}{cc} 1 & \quad 1 \end{array} &
\end{array}$$

Matrix 5

Wenn der Spieler A weiss, dass sein Gegner B die Strategie B_1 anzuwenden beabsichtigt, so wählt er seine erste Strategie (A_1), und wenn B die Strategie B_2 anwendet, so wird er seine zweite Strategie (A_2) wählen und in beiden Fällen 1 Einheit gewinnen. Auf der anderen Seite wird der Spieler B ebenfalls herauszustellen versuchen, welche Strategie sein Gegner A anwenden wird. Wenn er das weiss, wird er seine Strategie in der Weise wählen, dass er 1 Einheit gewinnt. Alles kommt also darauf an, die gegnerische Strategie ausfindig zu machen und die eigene Strategie geheimzuhalten. Ebenso werden beide Spieler dem Gegner eine solche Vorstellung von dem eigenen Verhalten beizubringen versuchen, dass das daraus resultierende gegnerische Verhalten am vorteilhaftesten wird. Das Bluffen spielt also in diesen Spielen eine grosse Rolle. Es ist bemerkenswert, dass zwischen dem spieltheoretischen Ergebnis in dieser Art und der folgenden Aussage von v. Stackelberg eine sehr grosse Ähnlichkeit besteht, in der er die oligopolistische Zielsetzung in folgender weise charakterisiert: «Wie kann ich meinem Konkurrenten eine solche Vorstellung über mein Verhalten beibringen, dass sein daraus resultierendes Marktverhalten mir am vorteilhaftesten ist».[16]

Es gibt also in diesen Spielen keine reine Strategie, mit der ein Spieler mit Sicherheit spielen kann. Beide Spieler können dies nur tun, wenn sie bereit sind, das ungünstigste Spielergebnis anzunehmen, d.h. in jedem Spiel 1 Einheit zu verlieren. Es gibt doch die Möglichkeit, einen mittleren Wert zu garantieren, der grösser als das ungünstigste Spielergebnis ist, wenn die Spieler auf die Anwendung einer reinen Strategie verzichten und auf zufällige Weise mehrere Strategien anwenden. «Eine solche Kombination von Strategien, die in der Anwendung mehrerer reiner Strategien besteht, wobei die reinen Strategien nach einem Zufallsgesetz mit einer bestimmten Häufigkeit aufeinander folgen, nennt man in der Theorie der Spiele eine «gemischte Strategie».[17]

In matrix 5 wird jeder Spieler am besten so verfahren, dass er eine Münze wirft, und wenn die Münze die Kopfseite zeigt, spielt er seine erste Strategie, und wenn die Münze die Adlerseite zeigt, spielt er seine zweite Strategie. «Ein Spieler darf allerdings bei dem Alternieren seiner Strategien niemals eine bestimmte Reihenfolge einhalten (z.B. A_1 A_1 A_2 A_2 A_1 A_1 A_2 A_2 und so fort...), denn in diesem Falle wäre damit zu rechnen, dass der Gegenspieler nach einigen Zügen diese Reihenfolge erkennt, sich danach einrichtet und so bei jedem Zuge gewinnt (so müsste der Spieler B, z. B. die Reihenfolge B_2 B_2 B_1 B_1 B_2 B_2 B_1 B_1 und so fort wählen, um dauernd in Matrix 5 (1) Einheit -zu gewinnen)».[18] Der Spieler wird, um sich vor dieser Gefahr zu schützen, die Entscheidung, welche Strategie er anwendet, selbst im voraus nicht wissen, d.h. er wird diese Entscheidung dem Zufall überlassen, wie durch das Werfen einer Münze.

Durch diese Zufallsbestimmung wird das Spiel nicht in ein Glückspiel verwandelt. Mit der Zufallsbestimmung seiner Strategie hat der Spieler eine statistische Prozedur eingeführt, die darüber entscheidet, welche Strategie tatsächlich gewählt werden soll. In Matrix 5 ist die Wahl der statistischen Zwischenschaltung 1/2: 1/2. Eine andere Wahrscheinlichkeit würde das Ergebnis des Spiels nur verschlechtern. «Der Sinn der statistischen Zwischenschaltung ist der, dass durch sie die völlige Geheimhaltung gewährleistet

[16] v. STACKELBERG, H., «Probleme der unvollkommenen Konkurrenz», in: *Weltwirtschaftliches Archiv*, Bd. 48 (1938) s. 117.

[17] WENTZEL, J. S. *a.a.O.*, s. 21.

[18] OTT, A. E. *Marktform und Verhaltensweise*, Stuttgart, 1959, s. 126.

wird, da es unmöglich ist, vorauszusagen, welcher konkrete Fall eintreten wird. Man ist vor Preisgabe von Informationen am besten geschützt, wenn man selbst keine besitzt».[19]

Nehmen wir wiederum die Matrix 5. Der Spieler A hatte (m) und B (n) Strategien. Der Index (i) zeigte die Nummer der Strategie von A und der Index (j) die von B, wobei $i = 1,2,\ldots,n$ war. Der Spieler A bemüht sich, den Wert des Spielergebnisses $W_A (A_i, B_j)$ zu maximieren und B, denselben Wert zu minimieren. Wenn das Spiel einen direkten Sattelpunkt hat, bedeutet es, dass

$$\mathrm{Max}_i \ \mathrm{Min}_j \ W_A (A_i, B_j) = \mathrm{Min}_j \ \mathrm{Max}_i \ W_B (A_i, B_j)$$

ist. In Matrix 5 ist jedoch diese Gleichheit nicht erfüllt. Durch die Einführung gemischter Strategien kann man jedoch jedes nicht determinierte Spiel in ein determiniertes umwandeln. Das bedeutet, dass man ein Paar gemischte Strategien finden kann; das Abweichen von diesen Strategien führt zu nur noch schlechteren Ergebnissen für den abweichenden Spieler. Diese Behauptung ist der Hauptsatz der Spieltheorie und heisst Minimax-Theorem. Das ist zum erstenmal 1928 von J.v. NEUMANN bewiesen worden und lautet:

«Ein Sattelpunkt existiert immer».

Die Einführung der gemischten Strategien erfolgt derart, dass jeder Spieler, anstatt seine reine optimale Strategie direkt zu wählen, die Häufigkeiten bestimmt, mit denen er seine Strategien anwenden wird. Er wählt also nicht eine bestimmte Strategie A_i bzw. B_j ($i=1, 2,\ldots, m$ und $j=1, 2 \ldots, m$), sondern bestimmt die Häufigkeit seiner Strategien $p = (p_1, p_2,\ldots, p_m)$ bzw.

$q = (q_1, q_2,\ldots q_n)$, wobei

$$p_i \geqq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

bzw. $$q_j \geqq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

sind. Nach der Bestimmung der Vektoren

[19] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 87.

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots\ldots, p_m)$$

und $$\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n)$$

muss man das einfache Spielergebnis $W(A_i, B_j)$ durch die viel speziellere Funktion

$$K(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} W(A_i, B_j) \cdot p_i \cdot q_j$$

ersetzen.

Nach dem Minimax-Theorem haben alle Spiele einen Sattelpunkt. Das heisst, dass die folgende Gleichung in allen Spielen erfüllt ist:

$$v = \underset{\vec{p}\quad\vec{q}}{\text{Max Min}}\ K(\vec{p}, \vec{q}) = \underset{\vec{q}\quad\vec{p}}{\text{Min Max}}\ K(\vec{p}, \vec{q})$$

Die Spiele mit reiner Strategien werden durch diese allgemeine Gleichung ebenfalls umfasst. In diesen Spielen wird nur eine Zahl p_i oder q_j von den Vektoren $\vec{p}$ bzw. $\vec{q}$ den Wert 1 aufweisen, während die anderen Zahlen alle null sind. Die $p_i = 1$ und $q_j = 1$ zugehörigen Strategien A_i bzw. B_j stellen die reinen Strategien dar. In den meisten Spielen werden jedoch mehrere Zahlen im Vektor p und q positive Zahlen aufweisen, deren Summe eins sein muss (Spiele mit gemischten Strategien).

Dieser Wert $K(\vec{p}, \vec{q})$ entspricht dem mittleren Wert der Spielergebnisse. Bei mehrfacher Wiederholung des Spieles wird sich der Durshschnittswert immer an diesen Wert annähern, der offenbar zwischen dem Maximum der Zeilenminima und dem Minimum der Spaltenmaxima liegt oder höchstens einem von diesen gleich ist. d.h.

$$v_1 \leqq v \leqq v_2$$

Dieser Wert (v) stellt damit den mathematischen Erwartungswert des Spielergebnisses dar. «Durch die Berechnung der mathematischen Erwartung wird die Unsicherheit eines ungewissen Ereignisses nicht beseitigt, sondern nur von Einzelereignissen auf eine Gruppe von Ereignissen verschoben.

Die mathematische Erwartung sagt folglich auch nichts über den Wert eines Einzelereignisses, sondern nur über den der Gesamtheit der Ereignisse aus. Für das Einzelergebnis kann nur festgestellt werden, dass die Eintrittshäufigkeit der mathematischen Erwartung zustrebt».[20]

Das Problem liegt also in Spielen mit gemischten Strategien darin, die Häufigkeitswerte von p_i und q_j zu bestimmen, wobei $i=1, 2,\ldots m$ und $j = 1, 2,\ldots, n$ sind.

c1) Die Lösungsverfahren

c11) für 2x2 — Matrixspiele

Die Spiele, die keinen direkten Sattelpunkt besitzen, zeigen bei der Bestimmung der optimalen gemischten Strategien, d.h. in der Ermittlung der Häufigkeitswerte, grosse Schwierigkeiten, besonders dann, wenn die Anzahl der Strategien gross ist.

Die Bestimmung der Häufigkeitswerte ist bei einem 2x2 — Matrixspiel relativ einfacher. Nehmen wir das folgende Beispiel :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \\ \uparrow & \uparrow \\ B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B\rightarrow \\ A \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{array}{c} P_1 \leftarrow A_1 \\ P_2 \leftarrow A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrix 6

[20] ANGERMANN, A., «Unternehmerische Entscheidungen und Operation Research»..., in: *Betriebsführung und Operation Research*, Frankfurt a. M., 1963, s. 20 Hg. A. ANGERMANN

Der Spieler A soll seine Strategie A_1 mit der Häufigkeit p_1 und A_2 mit der Häufigkeit p_2, und der Spieler B seine Strateige B_1 m·t der Häufigkeit q_1 und B_2 mit der Häufigkeit q_2 spielen, um seine optimale gemischte Strategie zu erreichen. Die Häufigkeiten (bzw. Wahrscheinlichkeiten) sind in diesem Fall (2x2 ... Matrixspiel) nach folgenden Formeln leicht zu bestimmen:

$$p_1 = \frac{d - c}{a + d - b - c}$$

$$p_2 = \frac{a - b}{a + d - b - c}$$

$$q_1 = \frac{d - b}{a + d - b - c}$$

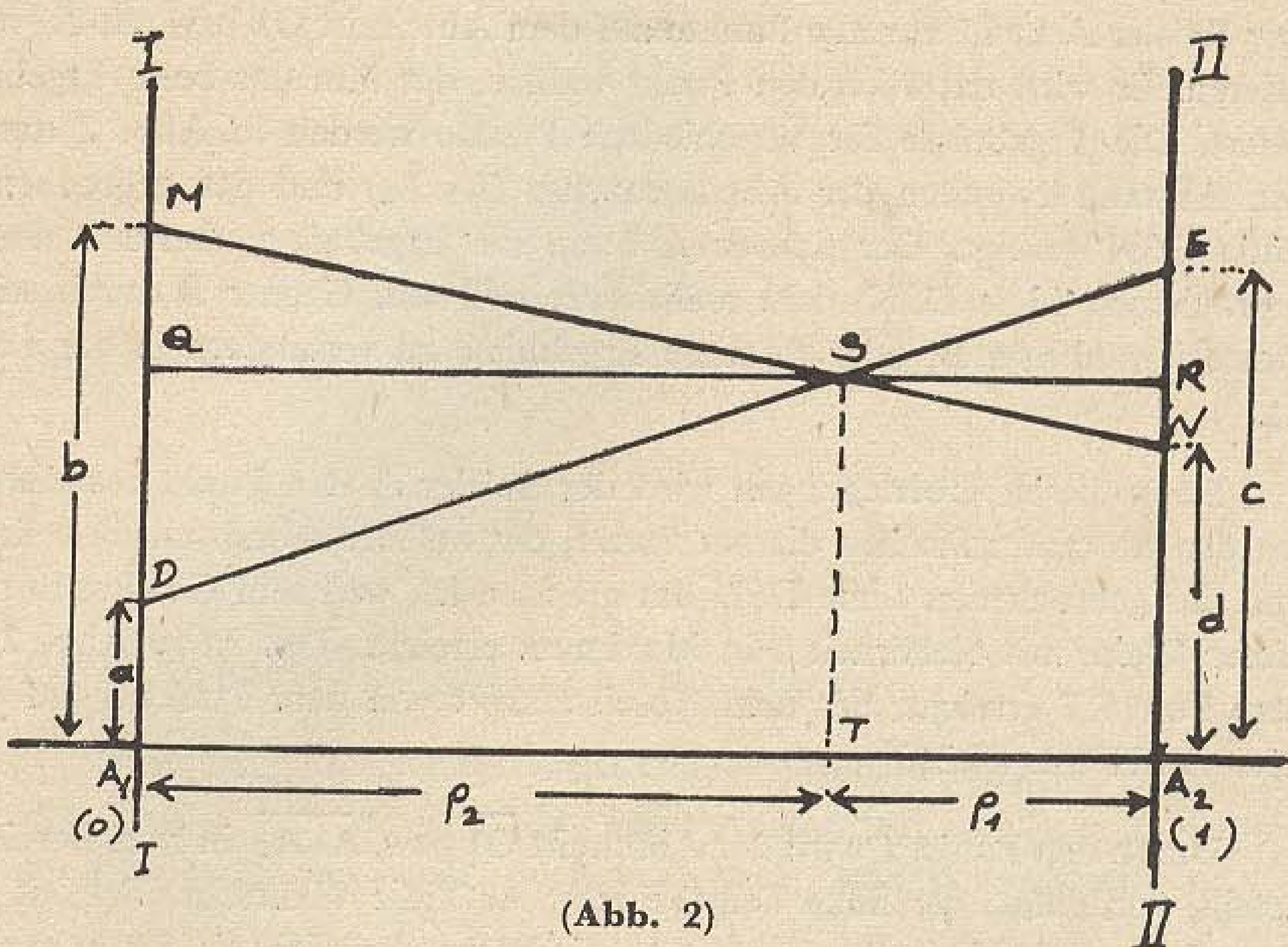
$$q_2 = \frac{a - c}{a + d - b - c}$$

Und der durchschnittliche Erwartungswert des Spiels

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$ [21]

In Matrix 5, wo $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ und $d = 1$ ist, sind die Werte der Wahrscheinlichkeiten nach diesen Formeln $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ und $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$. Der Durchschnittswert des Spielergebnisses beträgt $v = 0$. Für die Lösung eines 2x2 — Matrixspiels kann man auch eine geometrische Interpretation geben. Nehmen wir dazu wieder die Matrix 6.

[21] KEMENY, J. G., SCHLEIFER, A.; SNELL, J. L.; THOMPSON, G. L.; *Mathematik für die Wirtschaftspraxis*. Berlin, 1966, s. 149.



(Abb. 2)

In Abb. 2 ist auf der Abszissenachse ein Abschnitt in der Länge 1 (A_1 A_2) gewählt. Dem Punkt 0 (A_1) werden auf diesem Abschnitt die Strategie A_1 und dem Punkt 1 (A_2) die Strategie A_2 von dem Spieler A zugeordnet. Auf den senkrechten Geraden I–I und II–II, die durch den Punkt 0 (A_1) und (A_2) gezogen sind, trägt man das Spielergebnis bei der Strategie A_1 bzw. A_2 ein.

Wenn der Gegner B immer nur die Strategie B_1 anwendet, so gewinnt der Spieler A bei der Wahl seiner Strategie A_1 den Wert a, und bei seiner Strategie A_2 den Wert c. (Abb. 2). Diese Werte werden auf den Geraden I–I und II–II übertragen. Die Linie DE verbindet diese Ordinatenwerte a und c in Abb. 2. Wenn der Gegner B dagegen immer mit der Strategie B_2 spielt, so würde der Gewinn des Spielers A bei der Wahl seiner Strategie A_1, b und bei seiner Strategie A_2, d sein. Diese Werte werden in Abb. 2 ebenfalls auf den Geraden I–I und II–II übertragen. Die Linie MN verbindet diese Ordinatenwerte b und d.

Den Punkten O (A_1) und 1 (A_2) entsprechen die reinen Strategien, und alle dazwischenliegenden Punkte repräsentieren eine gemischte Strategie. Die nicht im Abschnitt $(\overline{O1})$ bzw. $(\overline{A_1 A_2})$ liegenden Punkte haben hier keine Bedeutung, weil sie die Bedingung $p_1 + p_2 = 1$ nicht erfüllen.

Der Spieler A kann nur alle Punkte auf dem Abschnitt $\overline{O1}$ bzw. $\overline{A_1 A_2}$ realisieren. Er wird natürlich den Punkt wählen, der ihm das beste Ergebnis liefert. Die Ergebnisse für verschiedene Punkte werden in Abb. 2 durch den Abstand zwischen der Abszissenachse (A_1 A_2) und der gebrochenen Linie DSN gezeigt. Der Spieler A kann die Ergebnisse oberhalb dieser gebrochenen Linie DSN nicht realisieren, weil sein Gegner B durch seine Strategiewahl von B_1 oder B_2 diese Ergebnisse zu verhindern in der Lage ist.

Nach diesen Uberlegungen wird der Spieler A den Punkt realisieren, wo der Abstand zwischen diesem Punkt, der auf der Abszissenachse liegt, und der gebrochenen Linie DSN am grössten ist, weil sein Gewinn nur in dieser Weise mit Sicherheit sein Maximum erreicht. Das ist in Abb. 2 in dem Punkt T erreicht, der dem Abszissenwert von dem Punkt S auf der Linie DSN entspricht.

Durch den Punkt T wird der Abschnitt $\overline{O1}$ bzw. $\overline{A_1 A_2}$ in zwei Bereiche geteilt, von denen der linke Teil OT bzw. A_1 T die Wahrscheinlichkeit für p_2 und der rechte Teil T1 bzw. TA_2 die Wahrscheinlichkeit für p_1 ergibt.

Man kann die Wahrsheinlichkeiten (Häufigkeiten) von q_1 und q_2 in gleicher Weise bestimmen, doch kann man diese Wahrscheinlickeiten auch in Abb. 2 ermitteln, in die man eine Parallele zur Abszissenachse von dem Punkt S einzeichnet und die Verhältnisse $\frac{QM}{QD}$ und $\frac{RN}{RE}$ bildet, die auf Grund der Eigenschaften ähnlicher Dreiecke MSD und SEN gleich sind.

Diese Verhälnisse $\frac{QM}{QD} = \frac{RN}{RE}$ sind auf der anderen Seite dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten von q_1 und q_2 gleich. Also $\frac{QM}{QD} = \frac{RN}{RE} = \frac{q_1}{q_2}$

Wenn z.B. die Relationen $\frac{QM}{QD} = \frac{RN}{RE} = \frac{1}{3}$ sind, so muss $q_1 = 3q_2$ sein. Ausserdem muss die Bedingung $q_1 + q_2 = 1$ ebenfalls erfüllt werden. Durch das Einsetzen $q_1 = 3\ q_2$ in die zweite Bedingung erhalten wir

$$3q_2 + q_2 = 1$$

$$4q_2 = 1$$

$$q_2 = \frac{1}{4}, \text{ und von } q_1 = 1 - \frac{1}{4}$$

erhält man

$$q_1 = \frac{3}{4}$$

c1 2) Für 2 x n – und m x 2 – Matrixspiele

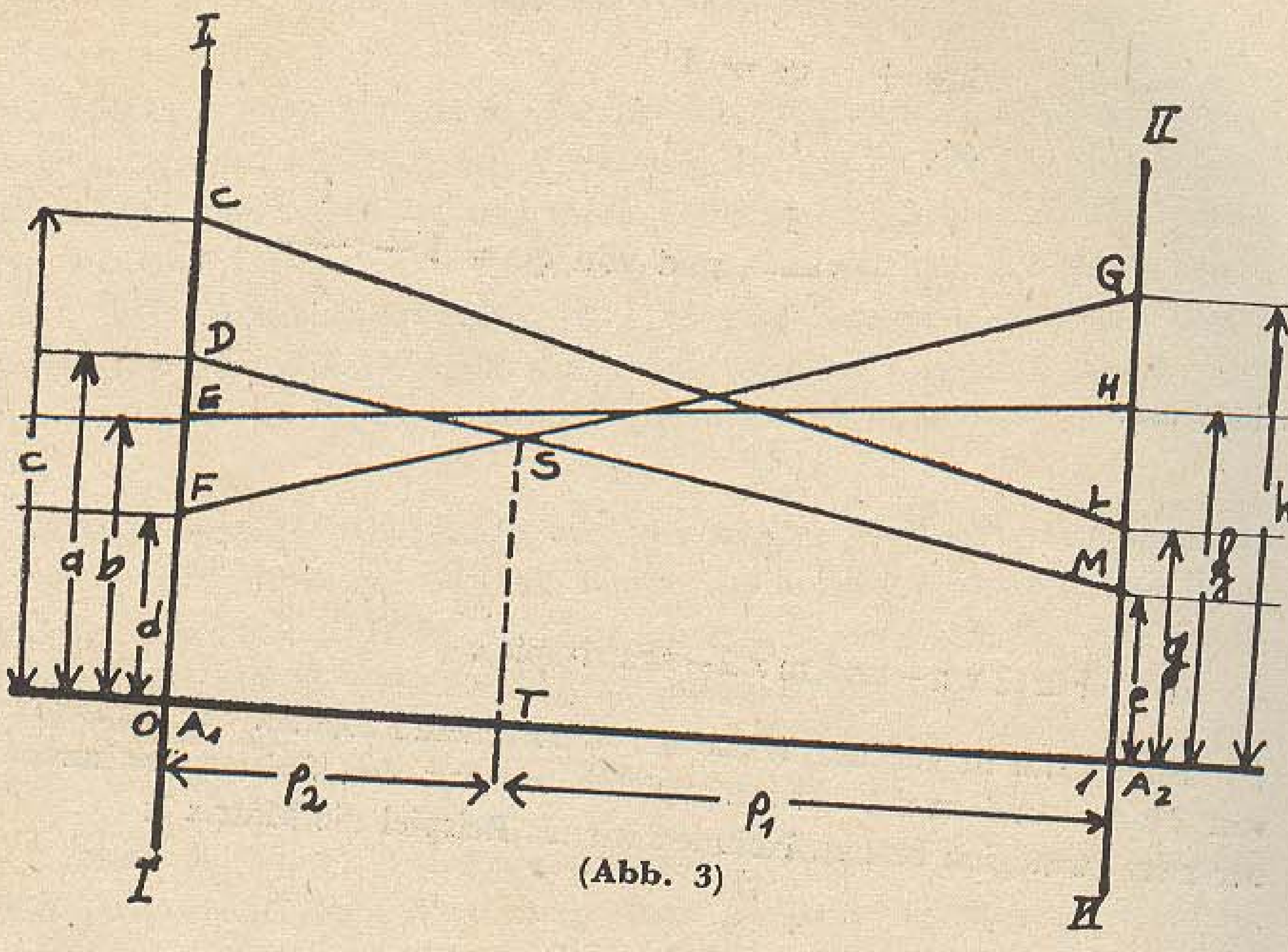
Man kann in gleicher Weise die Wahrscheinlichkeiten der Strategien von 2 x n — und m x 2 — Matrixspielen nur für den Spieler bestimmen, der zwei Strategien besitzt. Nehmen wir als Beispiel die Matrix 7:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ B\rightarrow & & \\ A & & \\ \downarrow & & \\ P_1 \leftarrow A_1 & & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$} \\ P_2 \leftarrow A_2 & & \end{array}$$

Matrix 7

In diesem Spiel verfügt der Spieler A über zwei und der Spieler B über vier Strategien. Man kann also p_1 und p_2 bestimmen.

Der Spieler wird seine Strategie A_1 mit der Wahrscheinlichkeit p_1 und A_2 mit der Wahrscheinlichkeit p_2 anwenden, die ihm den grössten Abstand zwischen der Abszissenachse und der gebrochenen Linie FSM, d.h. den maximalen Gewinn ST sichert, der mit Sicherheit erreicht werden kann.



(Abb. 3)

Einige Besonderheiten dieser Spiele werden in den folgenden Abbildungen illustriert:

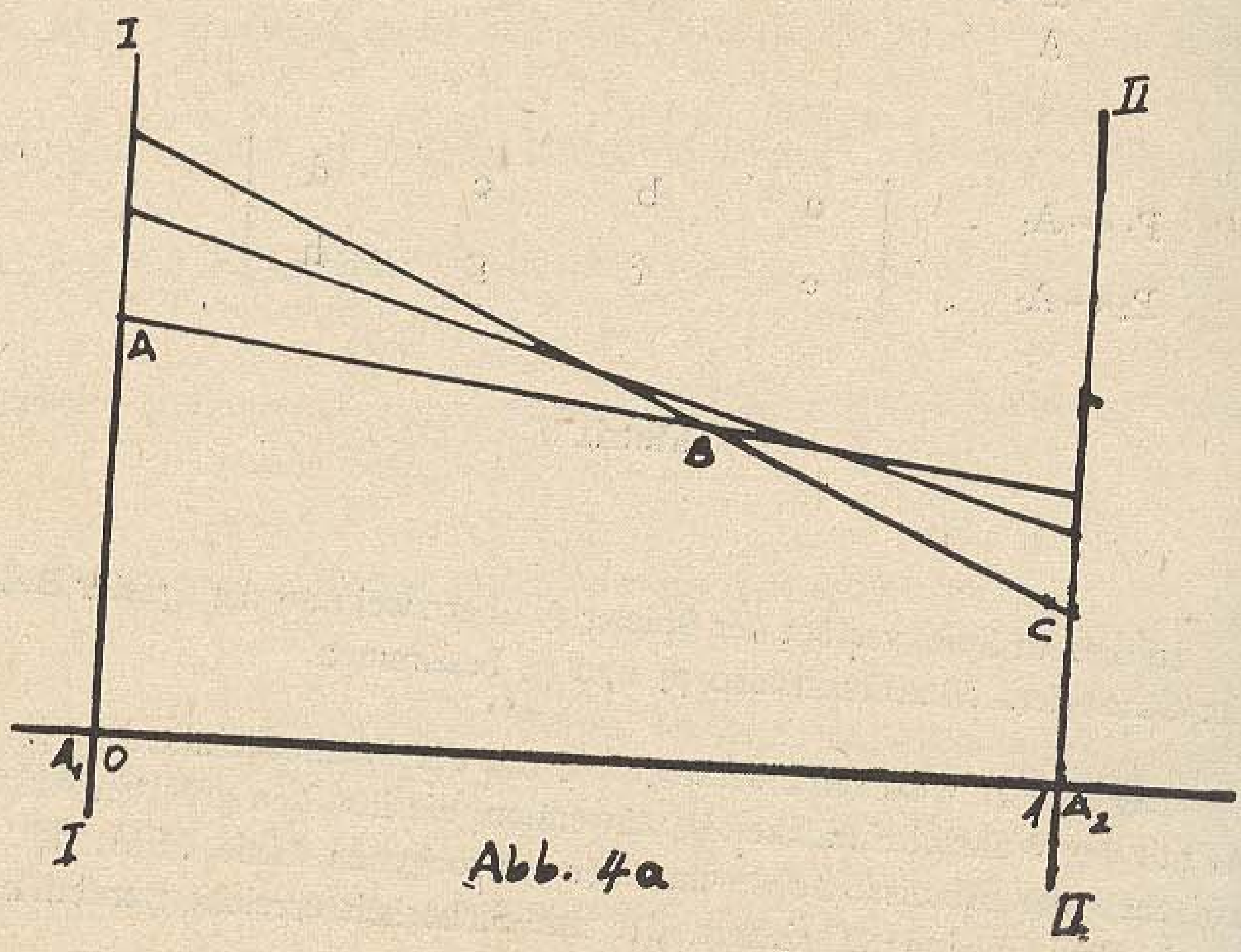


Abb. 4a

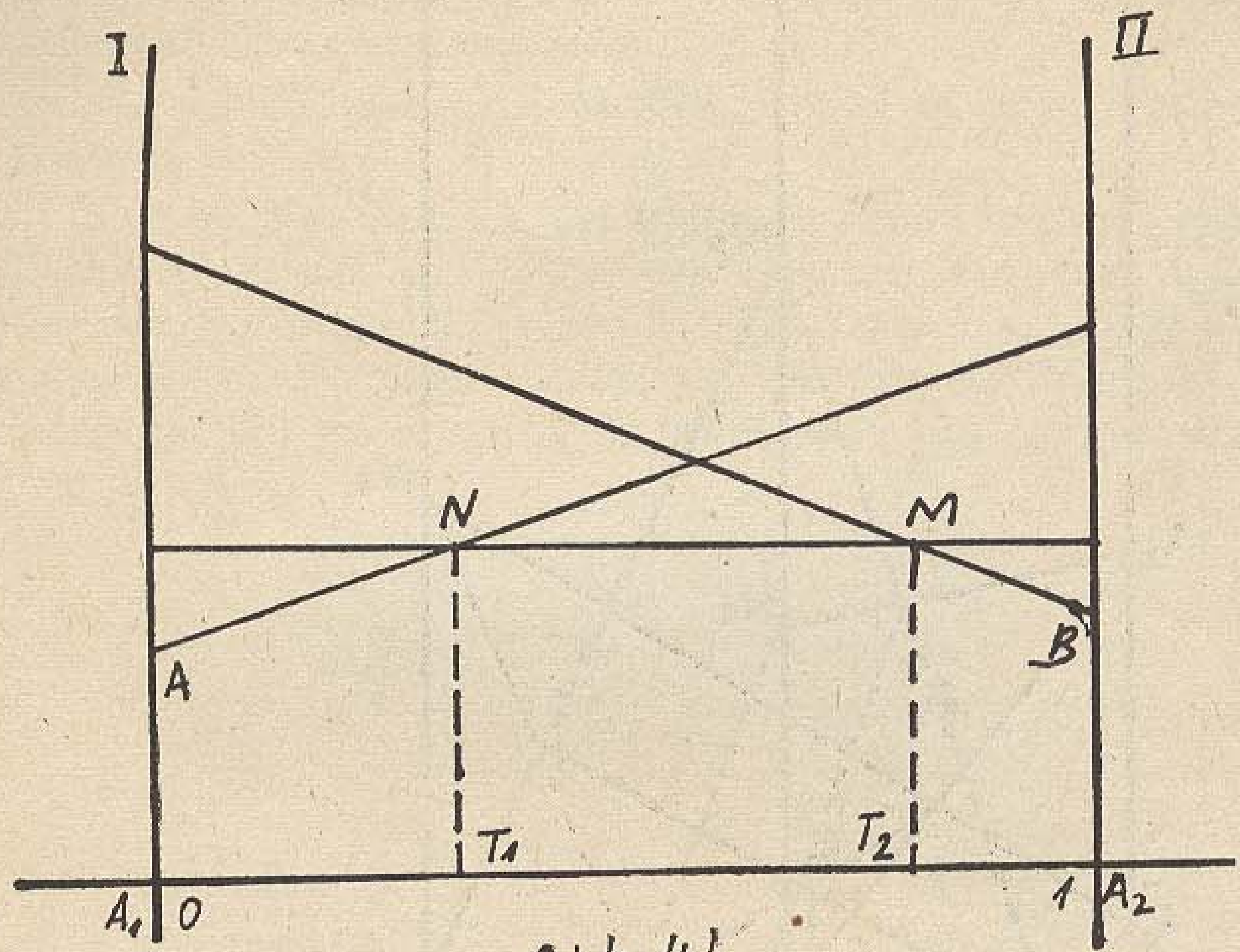


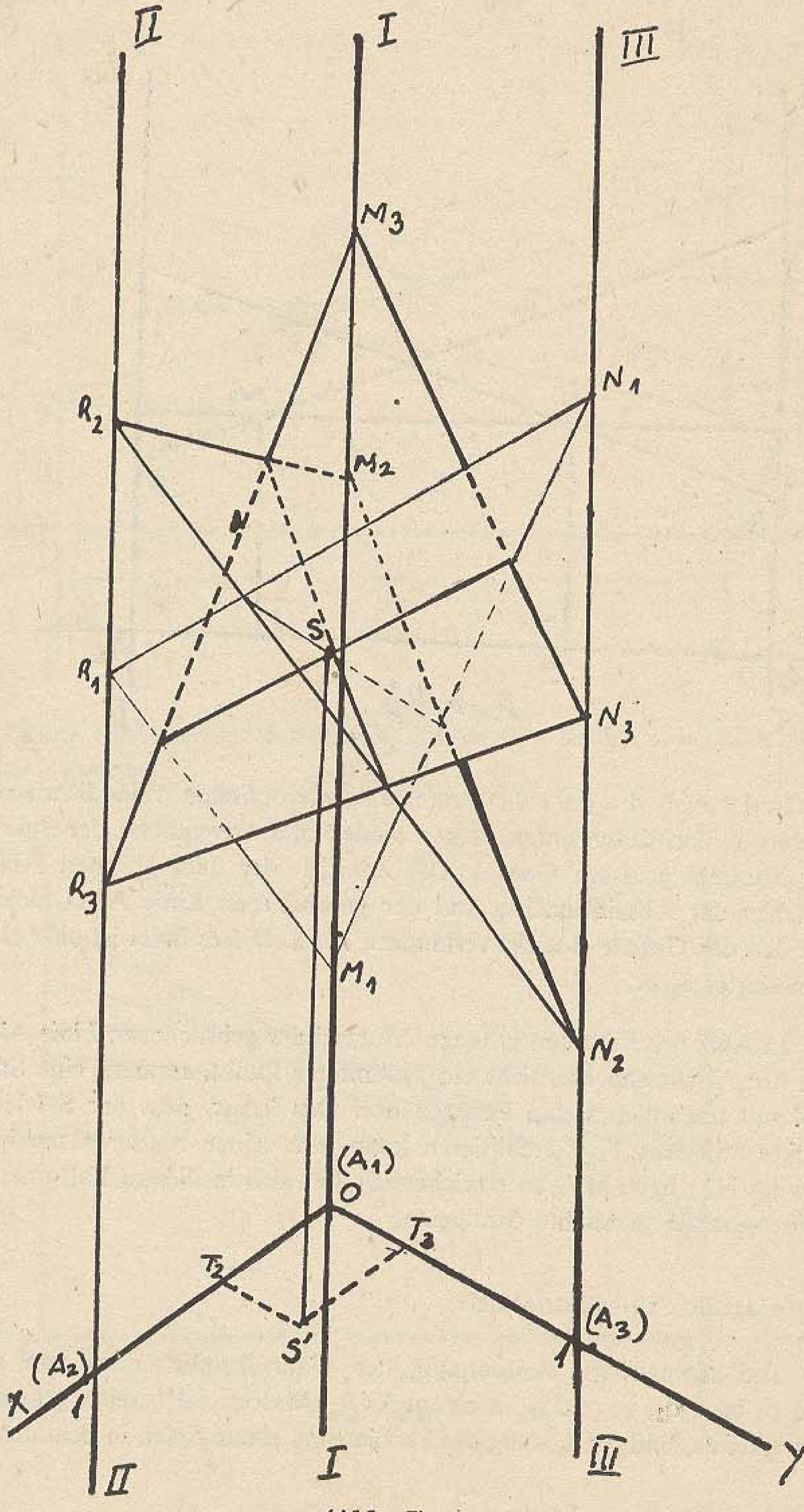
Abb. 4b

In der Abb. 4 a stellt die Strategie A_1 die optimale reine Strategie des Spielers A dar, durch deren immer wiederholte Anwendung der Spieler A den jedesmal grössten Gewinn OA erreicht, der dem grössten Abstand zwischen der Abszissenachse und der gebrochenen Linie ABD gleich ist und den der Gegner B nicht verhindern kann. Dieses Spiel ist also ein determiniertes Spiel.

In Abb. 4 b stellt den grössten Abstand der gebrochenen Linie ANMB von der Abszissenachse nicht ein bestimmter Punkt, sondern eine Strecke MN mit unendlich vielen Punkten dar. Das heisst, dass der Spieler alle Punkte zwischen T_1 T_2 realisieren kann, um seinen mittleren maximalen Gewinn NT_1 bzw. MT_2 zu erreichen. Er hat also in diesem Fall unendlich viele optimale gemischte Strategien.

c13) für 3x3 – Matrixspiele

Die geometrische Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von p_1, p_2 und p_3 bzw. q_1, q_2 und q_3 in einem 3 x 3 – Matrixspiel bereitet grosse Schwierigkeiten, und die Lösung des Problems in einem Spiel, in dem der Spie-



(Abb. 5)

ler mehr als drei Strategien besitzt, wird in dieser Weise d.h. in der geometrischen Darstellung, unmöglich.

Die Lösung eines 3 x 3 – Matrixspiels wird in Abb. 5 geometrisch illustriert.

Die drei Strategien, z.B. des Spielers A, werden in Abb. 5 durch die Punkte A_1, A_2 und A_3 in x O y – Ebene gedeutet, von denen A_2 und A_3 von dem Koordinatenursprung O im Abstand von einer Länge 1 liegen, während A_1 im O – Punkt liegt. Das bedeutet, dass man zuerst die Wahrscheinlichkeiten von p_2 und p_3 der Strategien A_2 und A_3 ermitteln soll.

$$
\begin{array}{cccc}
 & q_1 & q_2 & q_3 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
B \rightarrow & B_1 & B_2 & B_3 \\
A & & & \\
\downarrow & & & \\
\begin{matrix} P_1 \leftarrow A_1 \\ P_2 \leftarrow A_2 \\ P_3 \leftarrow A_3 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix}}
\end{array}
$$

Matrix 8

Auf den senkrechten Geraden (I–I), (II–II) und (III–III), die durch die Punkte A_1, A_2 und A_3 eingezogen sind, wird der Gewinn des Spielers A bei der Strategie A_1, A_2 bzw. A_3 übertragen.[22]

Wenn der Spieler B dauernd die Strategie B_1 wählt, so gewinnt A nach jeder Partie bei seiner Strategie A_1 den Betrag $a = OM_1$, bei seiner Strategie A_2 den Betrag $d = A_2 B_1$ und bei A_3 den Betrag $g = A_3 N_1$. Entscheidet sich der Spieler B für die Strategie B_2 bzw. B_3, so gewinnt der Spieler A nach jeder Partie bei seiner Strategie A_1 den Betrag $b = OM_2$ bzw. $c = OM_3$, bei seiner Strategie A_2 den Betrag $e = A_2 R_2$ bzw. $f = A_2 R_3$ und bei seiner Strategie A_3 den Betrag $h = A_3 N_2$ bzw. $l = A_3 N_3$.

So erhält man die drei Dreiecke $M_1 R_1 N_1$, $M_2 R_2 N_2$ und $M_3 R_3 N_3$ in Abb. 5, die über der x Oy - Ebene liegen. Für diese Schar von Dreiecken kann man wie im 2 x 2 – Matrixspiel die untere Grenze des Gewinns bei

---

[22] WENTZEL, J. S., *a.a.O.*, S. 45.

verschiedenen gemischten Strategien konstruieren, die der Gegenspieler B nicht verhindern kann. Der Spieler A wird dann den Punkt bestimmen müssen, dessen Abstand von der x O y – Ebene am grössten ist. Dieser Punkt wird in Abb. 5 mit (S) repräsentiert, den der A mit Sicherheit erreichen kann. Dazu muss er die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 ermittein, um seine optimale gemischte Strategie zu bestimmen, die das Erreichen des Gewinns TS garantiert. In Abb. 5 entspricht OT_2, p_2, und OT_3, p_3. Weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 sein muss, kann man auch p_1 leicht ermitteln:

$$p_2 = OT_2$$
$$p_3 = OT_3$$
$$p_1 = 1 - (p_3 + p_2) \text{ bzw.}$$
$$p_1 = 1 - (OT_2 + OT_3)$$

Um den Punkt S zu ermitteln, hat man den Schnittpunkt von M_1R_1, $M_2 R_2$ und $M_3 R_3$ (in der I–II–Ebene) und den Schnittpunkt von $M_1 P_1$, $M_2 P_2$ und $M_3 P_3$ (in der I–III–Ebene), sowie den Schnittpunkt $N_1 R_1$, $N_2 R_2$, $N_3 R_3$ verbinden. Die Verbindungslinien dieser Schnittpunkten ergibt den gesuchten Punkt S.

Die Wahrscheinlichkeiten von q_1, q_2 und q_3, mit denen der Spieler B seine Strategien B_1, B_2 und B_3 anwenden soll, können mit dem gleichen Verfahren ermittelt werden.

In den allgemeinen m x n – Matrixspielen ist die Lösung des Problems durch die geometrische Methode prinzipiell möglich; die Ubertragung des Spiels in einem n-dimensionalen Raum wird aber jede Anschaulichkeit unmöglich machen, und das Problem kann praktisch nicht gelöst werden. Für die Lösung der allgemeinen n x m – Spiele werden andere Methoden entwickelt, von denen die bekanntesten die Lineare Programmierung und das Iterationsverfahren sind. Die ungeheueren Rechenaufgaben werden durch die Benutzung der elektronischen Datenverarbeitungsmaschinen bewältigt.

2) n–Personen–Nullsummenspiele

a) Ein Drei–Personen–Nullsummenspiel[23]

Die Besonderheiten eines n–Personenspiels mit der Summe Null können am besten an einem Drei-Personen-Nullsummenspiel demonstriert werden.

---

[23] Dieser Teil baut grundsätzlich auf dem Buch «*Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft*» von D. MORGENSTERN auf.

Es gibt in diesen Spielen keinen absoluten Interessengegensatz der Spieler, wie es in Zwei-Personen-Nullsummenspielen der Fall ist. In einem Drei-Personen-Nullsummenspiel können zwei Spieler gegen den dritten eine Koalition bilden. Um diese Koalition zu verwirklichen, müssen sich die Spieler vorher darüber verständigen, wie der zusammen erzielte Gesamtgewinn verteilt werden soll.

Nehmen wir als Beispiel ein Drei-Personen-Nullsummenspiel (die Matrix 9) mit den Spielern A, B und C, in dem die Koalition von zwei Spielern 1 Einheit gewinnt und der dritte diese Einheit an die Koalition verliert.

Es gibt in diesem Spiel drei mögliche Koalitionen:

A und B gegen C, A und C gegen B und B und C gegen A. Zuerst wird davon ausgegangen, dass der Gesamtgewinn der Koalition unter den Koalitionspartnern halbiert wird. Es wird nachher bewiesen, dass in diesem Spiel (Matrix 9) eine andere Verteilung nicht in Frage kommen kann.

Es gibt in diesem Spiel drei Verteilungsschemata, die in der Spieltheorie als Zurechnung bezeichnet werden

$$(1)\quad \vec{x} = (1/2,\ 1/2, -1)$$

$$(2)\quad \vec{y} = (1/2, -1,\ 1/2)$$

$$(3)\quad \vec{z} = (-1,\ 1/2,\ 1/2)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} (A,B) \\ (A,C) \\ (B,C) \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{array} \end{array}$$

Matrix 9

Diese drei Zurechnungen sind alle gleichartig, weil in jeder Zurechnung zwei Spieler je 1/2 gewinnen und der dritte 1 Einheit verliert. Für den Spieler A. z.B. hat es keine Bedeutung, ob er mit B oder C eine Koalition eingeht, weil er in beiden Fällen den gleichen Betrag gewinnt. Das gilt auch für die Spieler B und C. Das Ziel jedes Spielers wird unter diesen Umständen darin bestehen mit irgendeinem Spieler eine Koalition zu bilden. Aber keine dieser beiden Koalitionen ist der anderen vorzuziehen.

In Matrix 9 werden nur drei Zurechnungen gezeigt, obwohl unendlich viele Zurechnungen möglich wären. In diesem Spiel sind jedoch nur diese drei Zurechnungen relevant, weil die anderen nicht verwirklicht werden können. Nehmen wir an, dass der Spieler A ein Privileg besitzt, nach dem ihm in seiner Koalition ein zusätzlicher Betrag a gewährleistet werden soll, wobei $O < a < 1/2$ ist. Wenn er mit dem Spieler B unter diesen Umständen die Koalition eingeht, so wird die neue Zurechnung

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} - a, -1\right)$$

sein, die offensichtlich von den Spielern A und B der Zurechnung

$$\vec{y} = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

vorzuziehen ist, weil A in $(\vec{u})$ mehr als (1/2) und B mehr als (—1) bekommt. Man spricht in diesem Fall davon, dass die Zurechnung $\vec{u}$ die Zurechnung $\vec{y}$ dominiert. In Wirklichkeit ist die Zurechnung $\vec{u}$ für B auf keinen Fall wünschenswert, weil er in dem Fall, wenn er mit C eine Koalition bildet, die zur Zurechnung $\vec{z}$ führt, mehr als $\left(\frac{1}{2} - a\right)$, nämlich den Betrag $\frac{1}{2}$ gewinnt. Die Zurechnung $\vec{z}$ dominiert also die neue Zurechnung $(\vec{u})$. Wenn der Spieler A auf sein Privileg nicht verzichtet, muss er damit rechnen, dass er immer 1 Einheit verliert, es wird also die Zurechnung $\vec{z}$ verwirklicht. Er kommt als Koalitionspartner nur dann in Frage, wenn er seinem Partner eine Kompensation anbietet, die genau dem Betrag (a) gleich ist.

Somit bilden die drei Zurechnungen $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ zusammen die Lösung des Spiels. Keine von diesen Zurechnungen dominiert eine andere

Zurechnung, die zu der Lösung gehört, und jede von diesen Zurechnungen kann von einer anderen Zurechnung, die nicht zur Lösung gehört, dominiert werden, die aber ihrerseits von einer Zurechnung dominiert wird, die zu der Lösung gehört.

b) Die Besonderheiten der n–Personenspiele

b1) Das Problem der Koalitionsbildung und der Gewinnverteilung

Die erste bemerkenswerte Tatsache in n–Personenspielen ist die Bildung von Koalitionen. Eine Koalition wird nur dann zustandekommen, wenn die Koalitionspartner übereingekommen sind, wie der gemeinsam erzielte Gewinn zu verteilen ist, und wenn der einzelne Spieler durch die Bildung einer Koalition mehr gewinnen kann, als sie individuell zu gewinnen in der Lage sind. Nur dieser Vorteil wird die Koalitionsbildung rechtfertigen.

Man unterscheidet daher zwischen den «wesentlichen» und «unwesentlichen» Spielen. In den wesentlichen Spielen erlangen die Koalitionspartner einen Vorteil durch die Bildung der Koalition im Gegensatz zu den unwesentlichen Spielen, in denen der Zusammenschluss den Koalitionspartnern keinen Vorteil erbringt. Die wesentlichen Spiele kommen in der Realität am meisten vor; in dieser Arbeit sind sie allein zu behandeln.

In wesentlichen Spielen erzielen also die Koalitionen einen Gewinn, der grösser als die Summe aller der individuell erzielten Gewinne der Partner ist. «Es ist genau der Fall der Komplementarität des Wertes, der z.B. in jeder produktiven Kombination gegeben ist. Dort liegt eine Nicht-Additivität des Wertes vor, d.h. die Wertsumme die die Kombination als solche erzielt, ist grösser als die Summe der Werte der einzelnen Teile, wenn diese separat für sich genommen werden».[24]

b2) Die charakteristische Funktion und die Dominanz

Hier wird mit I die Menge von allen (n) Spielern und mit der Menge S eine Koalition von (k) Spielern bezeichnet, während die Menge (–S) die Gegenkoalition darstellt. Die Menge $\emptyset$ bedeutet eine leere Menge, die keinen Spieler enthält, und die Mengen S und – S sind Untermengen von I.

«Die charakteristische Funktion eines Spiels ist eine Funktion v (S), die jeder Untermenge von Spielern einen Wert zuordnet,»[25] der «alle Zu-

[24] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 92
[25] SHUBIK, M., *a.a.O.*, s. 54

rechnungen einschliesslich der Kompensationen, die innerhalb jeder Koalition gezahlt werden müssen»,[26] enthält. Die Anzahl dieser Werte der charakteristischen Funktion enspricht in einem n–Personenspiel der Formel (2^n). In Matrix 9, wo es nur drei Spieler gibt, hat also die charakteristische Funktion v (S) nach dieser Formel $2^3 = 8$ verschiedene Werte. Das sind: v (A) = —1; v (B) = —1; v (C) = —1; v (A,B) = 1; v (A,C) = 1; v (B,C) = 1 und v (A,B,C) = 0.[27]

Die wichtigsten Eigenschaften der charakteristischen Funktion sind:

(1) $v(\varnothing) = 0$

(2) $v(-S) = v(S)$

(3) $v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T)$ für $S \cap T = \varnothing$.

Die erste Bedingung ist nur eine mathematische Formalität, die besagt, dass eine Koalition, die keinen Spieler hat, nichts gewinnt. Die zweite Bedingung kommt nur in Nullsummenspielen vor und besagt, dass dieses ein Nullsummenspiel ist, d.h. was eine Koalition gewinnt, verliert die Gegenkoalition. Die dritte Bedingung besagt, dass der Wert einer Koalition von S und T mindestens gleich der Summe der Werte sein muss, die S und T allein erzielen werden.[28] Die Nebenbedingung ($S \cap T = \varnothing$) besagt, dass die Mengen S und T keinen gemeinsamen Spieler haben.[29]

Wenn in der dritten Bedingung die Gleichheit vorliegt, heisst das, dass das Spiel ein unwesentliches Spiel ist, während ein wesentliches Spiel dann vorliegt, wenn die linke Seite der Gleichung (3) grösser ist.

In den bisherigen Teilen der Arbeit wurde von Zurechnungen gesprochen. Unter der Zurechnung versteht man in der Spieltheorie eine Aufteilung des Gesamtgewinns der Koalition unter die Koalitionspartner, wobei jeder Koalitionspartner mindestens den Betrag erhält, den er individuell erzielen könnte, und man sagt, eine Menge von Spielern ist für eine Zurechnung effektiv, «wenn die Mitglieder von dieser Menge, unabhängig davon, was

[26] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 98

[27] v (A.B.C) muss gleich Null sein, weil das Spiel in Matrix 9 ein Nullsummenspiel ist.

[28] S und T sind zwei Mengen von Spielern. Das Symbol $\cup$ ist das Zeichen für die Vereinigungsmenge, d.h. die Menge aller Elemente, die entweder der Menge S oder der Menge T gehören.

[29] Das Symbol $\cap$ ist das Zeichen für die Durchscnittsmenge, d.h. die Menge aller Elemente, die sowohl der Menge S als auch der Menge T gehören.

die anderen Spieler tun, mindestens soviel erreichen können, wie ihnen in dieser Zurechnung geboten wird».[30] Eine Zurechnung $\vec{x}$ dominiert eine andere Zurechnung $\vec{y}$, wenn es eine Menge von Spielern S gibt, die für $\vec{x}$ effektiv ist und jedes Mitglied von S in $\vec{x}$ mehr erhält als in $\vec{y}$.[31]

b3) Die strategische Äquivalenz

Zwei Spiele M und M′ werden als strategisch äquivalent bezeichnet, wenn die strategischen Möglichkeiten, Koalitionsmöglichkeiten und der Anreiz der Spieler dazu, eine bestimmte Koalition zu bilden, in beiden Spielen gleich sind. Die Spiele unterscheiden sich jedoch in dem Spielablauf, d.h. sie sind nicht identische Spiele.

Nach dem Spiel M′ soll jeder Spieler i ($i=1,2\ldots,n$) den gleichen Betrag plus a_i° bekommen, den er auch nach dem Spiel M erhalten kann.[32] a_i^o ist eine absolut konsante Zahl, über die jeder Spieler nach Spiel M′ zusätzlich verfügt. Es gibt also im Spiel M′ ein System von konstanten Zahlen:

$$a_1^\circ, . \; a_2^o, \ldots, a_i^o, \ldots, a_n^o .$$

Wenn die Zahlungsfunktion des Spielers i in dem Spiel M mit

$$W_i\ (r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n)$$

dargestellt wird, wobei $(r_1, \ldots, r_n)$ die Strategien der Spieler kennzeichnet, so kann die Zahlungsfunktion des Spielers i im Spiel M′ mit

$$W'\ (r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n) = W_i\ (r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots r_n) + a_i^o$$

dargestellt werden.

In einem n-Personen-Nullsummenspiel unterliegen die absolut konstanten Zahlen der Bedingung., die für Nicht-Nullsummenspiele nicht gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^o = O$$

Die charakteristische Funktion des Spiels M sei v (S) und des Spiels M′ v′ (S), Es gilt für die strategisch äquivalenten Spiele nach ihren oben genannten Eigenschaften:

---

[30] SHUBIK, M., *a.a.O.*, s. 54.

[31] SHUBIK, M., *a.a.O.*, s. 54.

[32] Die Gleichheit der Beträge in M und M' bezieht sich nur auf die Partien beider Spiele.

$$v'(S) = v(S) + \sum_{i \text{ in } S} a_i^{\circ}$$ [33]

Man kann in diesem Sinne selbst die charakteristischen Funktionen v (S) und v′ (S) als strategisch äquivalent ansehen, weil sich diese charakteristischen Funktionen nur durch die konstante Zahlung a_i° voneinander unterscheiden. «v (S) und v′ (S) beschreiben zwei strategisch äquivalente Familien von Spielen».[34] M und M′. Der Zweck der Einführung dieses strategisch äquivalenten Spiels besteht darin, dass man mit seiner Hilfe aus jeder Familie der strategisch äquivalenten Spiele ein Spiel wählt, dessen charakteristische Funktion besonders leicht zu ermitteln ist. Die in diesem Spiel gewonnenen Ergebnisse können ohne Schwierigkeiten auch auf alle anderen Spiele übertragen werden, die zu dieser Familie gehören, d.h. mit dem ersten Spiel strategisch äquivalent sind. Die charakteristische Funktion dieses so gewählten Spiels sei $\bar{v}$ (S).

Man muss dazu ein solches Spiel suchen, in dem die (n) Zahlungen

$$(a_1^{o}, a_2^{o}, \ldots, a_i^{o}, \ldots, a_n^{0})$$

leicht zu bestimmen sind. Dafür werden (n) freie Parameter erforderlich sein. In einem n-Personen-Nullsummenspiel genügen jedoch (n—1) freie Parameter, da in diesen Spielen auch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{o} = 0$$

erfüllt sein muss.

Dazu kann man das folgende Gleichungssystem wählen, das genau (n — 1) freie Parameter aufweist :

$$\bar{v}(1) = \bar{v}(2) = \ldots = \bar{v}(i) = \ldots = \bar{v}(n)$$

Dieses Spiel, dessen charakteristische Funktion besonders leicht zu bestimmen ist, hat also folgende Eigenschaften: (1) Jeder Spieler geht eine «Ein-Mann-Koalition ein, d.h. die Spieler sind sich selbst überlassen. (2) Jeder Spieler bekomt nach dem Spiel den gleichen Betrag.»[35] Man bezeichnet diese charakteristische Funktion $\bar{v}$ (S) als reduzierte Form von v (S).[36]

---

[33] S. bezeichnet eine Koalition, und i repräsentiert nur die Spieler, die die Koalition S. eingegangen sind.

[34] v. NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 252

[35] v. NEUMANN J.: MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 253.

[36] «Wir nennen eine charakteristische Funktion v (S) dann und nur dann reduziert, wenn sie die Bedingung $\bar{v}(1) = \bar{v}(2) = \ldots = \bar{v}(n)$ erfüllt».

v. NEUMANN, J.: MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 254.

Die Transformationsgleichung, die an diesem als leicht gewählten Spiel gewonnene Ergebnisse auf die anderen Spiele übertragen soll, die mit dem ersten Spiel strategisch äquivalent sind, lautet;

$$\bar{v}(i) = v(i) + a_i^o,$$

wobei $i = 1,2, \ldots, n$ ist,

Man kann jetzt die Werte der Zahlungen ($a_1^o, a_2^o, \ldots, a_i^o, \ldots a_n^o$) in einem n-Personen-Nullsummenspiel leicht bestimmen, weil es n freie Parameter gibt, die für die Lösung erforderlich sind. Das ist einmal die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^o = 0$$

und folgende (n—1) Gleichungen:

$$v(1) + a_1^\circ = v(2) + a_2^\circ = \ldots\ldots = v(n) + a_n^o$$

die Lösung lautet z.B. für die a_2°

$$a_2^o = - v(2) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} v(i)$$

c) Allgemeine Darstellung der n-Personen-Nullsummenspiele und ihre Lösungskonzepte

Die Lösung der Zwei-Personen-Nullsummenspiele besteht in der Bestimmung der optimalen reinen Strategie für jeden Spieler, wenn das Spiel einen direkten Sattelpunkt besitzt, bzw. wenn die Spieler vollkommene Information haben, während die Lösung in anderen Zwei - Personen-Nullsummenspielen durch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt, mit denen jeder Spieler seine reinen Strategien anwenden soll, dh. durch die Bestimmung der optimalen gemischten Strategien der Spieler.

In n-Personen-Nullsummenspielen ist das Lösungskonzept von ganz. anderem Charakter. Hier besteht die Lösung aus einer Menge von Zurechnungen, die eine innere Stabilität besitzen.

Obwohl diese Lösungsmenge von Zurechnungen als ganzes stabil ist, weisen die einzelnen Zurechnungen an sich keine Stabilität auf, weil keine von diesen Zurechnungen allein genommen die Lösung darstellt. Nur alle zusammen bilden die Lösung.

In der Spieltheorie wird bewiesen, dass alle wesentlichen Spiele als Lösung eine Mehrzahl von Zurechnungen haben. Nur in den unwensentlichen Spielen besteht die Lösung aus einer einzigen Zurechnung, die alle anderen Zurechnungen dominiert und ihrerseits von keiner dominiert wird. Die theoretisch und praktisch wichtigen Spiele sind aber die wesentlichen Spiele, und nur sie müssen zur Erklärung der Wirklichkeit herangezogen werden.

«Die Vielfalt der Zurechnungen (als Lösung) drückt aus, dass es innerhalb dasselben Systems verschiedene Einkommensverteilungen geben kann, die alle miteinander verträglich sind, so dass die üblichen Versuche, ein einfach bestimmtes gesellschaftliches Optimum scheitern müssen.»[37]

Es konnte im allgemeinen noch nicht bewiesen werden, dass jedes n-Personen-Nullsummenspiel eine Lösung hat. «Dieser allgemeine Beweis wird von grosser mathematischer Tiefe sein... v. NEUMANN war der festen Uberzeugung, dass dies gelingen wird. Wenn der Beweis erbracht ist, wird er auch ein Existenzbeweis sein».[38] Alle bisher untersuchten n-Personen-Nullsummenspiele wiesen mindestens eine Lösung auf, und das muss bedeuten, dass der Beweis gelingen, wird[39]

SHUBIK ist der Meinung, dass die obige Lösung von v. NEUMANN und MORGENSTERN eine Erweiterung einiger Gedankengänge der ökonomischen Theorie darstellt. «Im besonderen ist sie eine Erweiterung der ökonomischen Wohlfahrtstheorie. Von der rationalen Gesellschaft wird vorausgesetzt, dass sie eine Aufteilung der Gewinne auswählt, die PARETO optimal ist».[40]

Offensichtlich stellt die Mehrzahl der Zurechnungen den schwächsten Punkt dieses Lösungskonzepts dar. Es gibt kein Kriterium für die Auswahl einer bestimmten Zurechnung. Weil jede Zurechnung eine bestimmte Koalition[41] darstellt, gibt die Lösung dem Spieler keine Empfehlung darüber, welche Koalition für ihn am vorteilhaftesten ist, sondern gibt eine Mehrzahl von Koalitionen (Zurechnungen), die alle gleichrangig sind. «Die Lösung von NEUMANN und MORGENSTERN ist in dem Sinne schwach normativ, dass sie verlangt, dass alle Teilnehmer gemeinsam (das Ergebnis) maxi-

---

[37] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 97.
[38] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 97.
[39] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 97.
[40] SHUBIK, M., a.a.O., s. 56.
[41] Einschliesslich Ein-Mann-Koalition, wenn das Spiel unwesentlich ist.

mieren sollten. Darüberhinaus wird jedoch nicht gesagt, welche Koalitionen sich bilden sollten oder welche sich bilden werden».[42]

Die Lösung eines n-Personen-Nullsummenspiels wird dadurch erreicht, dass man dieses Spiel in ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel überführt. Die Spieler kooperieren in zwei Untermengen S und -S, deren Obermenge I die Gesamtheit aller Spieler umfasst.

Die Spieler, die in der Koalition (S) zusammengeschlossen sind, kontrollieren alle Strategien (k^s in S, und diejenigen Spieler, die die Koalition (–S) eingegangen sind, haben die Kontrolle aller Strategien (k^{-s}) in (–S) in der Hand. (k bezeichnet die Spieler, die in S bzw. –S gehören).

Dadurch entsteht ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit folgender Zahlungsfunktion:

$$W\,(k^s, k^{-s}) = \sum_{k \text{ in } S} W_k\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

$$= -\sum_{k \text{ in } -S} W_k\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

Die rechte Seite der Gleichung muss der linken Seite mit negativen Vorzeichen gleich sein, weil es sich um ein Nullsummenspiel handelt, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} W_k\,(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0$$

Dieses aus zwei Koalitionen bestehende Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat nach dem Minimax-Theorem die Lösung:

$$\text{Max Min} = \text{Min Max} = v\,(S)$$

V. Allgemeine n-Personenspiele

(Nicht-Nullsummenspiele) - von NEUMANN - MORGENSTERN

Die Bedingung der Nullsummenspiele, die besagt, dass die Summe aller Zahlungen, d.h. die Summe von Gewinnen und Verlusten der Spieler Null sein muss, wird im wesentlichen nur in Gesellschaftsspielen erfüllt. Wenn die Spieltheorie auch die ökonomischen und sozialen Erscheinungen in einem spieltheorischen Modell einfängt und sie lösen will, wo die Summe

[42] SHUBIK, M., *a.a.O.*, s. 56.

aller Zahlungen nicht null ist, dann muss sie auf die Nicht-Nullsummenspiele erweitert werden.

NEUMANN und MORGENSTERN haben diese Erweiterung dadurch erreicht, dass sie jedes n-Personen-Nicht-Nullsummenspiel durch die Einführung eines fiktiven Spielers in ein n+1 –Personenspiel mit der Summe Null überführen und mit gleichem Lösungsverfahren von Nullsummenspielen auch die allgemeinen Nicht-Numlsummenspiele zu lösen versuchen.

Der fiktive Spieler existiert in Wirklichkeit nicht, hat keine Strategien, und damit kann er keinen Einfluss auf das Spielergebnis üben. Seine Aufgabe besteht darin, die Verluste zu tragen, die dem Gewinn der Koalition entsprechen, die durch die echten Spieler bestehen. Die Aufgabe des fiktiven Spielers liegt nur darin, dass man mit seiner Hilfe jedes Spiel in ein Nullsummenspiel überführen kann. «Man macht von einem Verfahren Gebrauch, das sich allgemein empfiehlt, wenn man es mit einem ungelösten Problem zu tun hat; man sucht es auf ein schon gelöstes zurückzuführen»,[43] und das gelingt in diesem Fall.

Man ersetzt ein Nicht-Nullsummenspiel mit n Spielern durch ein n+1 – Personen–Nullsummenspiel, in dem die (n+1) – te Person den fiktiven Spieler darstellt, der die folgende Zahlungsfunktion hat:

$$W_n + 1\ (k_1, k_2, \ldots, k_n) = -\sum_{i=1}^{n} W_i\ (k_1, k_2, \ldots k_n)$$

wobei k_i, für $i = 1,2, \ldots, n$ die Strategien der Spieler kennzeichnet, Der (n+1) – te Spieler hat also keine Strategie.

Eine Lösung (v) des n+1–Personen–Nullsummenspiels ist zugleich die Lösung des auf (n+1) Personen erweiterten n–Personen–Nichtnullsum menspiels, wenn für die Zurechnung $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1})$ in (v) folgendes gilt:[44]

$$a_{n+1} = v\,(n+1)$$

VI. Andere Theorien für kooperative Spiele

Nach der Lösung von NEUMANN–MORGENSTERN werden mehrere Theorien für die kooperativen Spiele entwickelt, von denen die bekann-

---

[43] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 106.

[44] MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 106. Durch diese Bedngung wird erreicht, dass fiktive Spieler nicht einmal einen indirekten Einfluss auf das Spiel hat, wie z.B. die Änderung der Koalitionsbildung durch Kompensationszahlungen.

testen die von SHAPLEY, NASH, AUMANN und MASCHLER und von HARSANYI sind. Hier wird nur der Ansatz von SHAPLEY kurz erläutert.[45]

Die SHAPLEYsche Lösung geht davon aus, dass man jedem Spieler einer Koalition in der Gewinnverteilung den Wert zuordnen muss, der seiner Macht entspricht. Nehmen wir das folgende Drei–Personenspiel, dessen charakteristische Funktion folgende Werte aufweist:

$v(A) = 0$	$v(A,B) = 0.5$	$v(A,B,C) = 1$
$v(B) = 0$	$v(B,C) = 0.5$	$v(\varnothing) = 1$
$v(C) = 0$	$v(A,C) = 0$	

Die charakteristische Funktion zeigt, dass der Spieler B in der Koalitionsbildung eine wichtigere Rolle spielt als der Spieler A oder C, weil die Spieler A und C nur in einer Koalition mit B gewinnen können. Eine Koalition von A und C bringt nichts, d.h. $v(A,C) = 0$. In dieser Situation muss der Gewinnanteil des Spielers B dementsprechend grösser sein als die anderen. Die Auswertung der Koalitionsmöglichkeiten von B führt zu den folgenden sechs Fällen

(1) B tritt einer Koalition bei, die aus A besteht.
$v(A,B) - v(A) = 0.5$

(2) B tritt einer Koalition bei, die aus C besteht.
$v(A,C) - v(C) = 0.5$

(3) B tritt einer Koalition bei, die durch den Anschluss von A an C entstanden ist.
$v(A,B,C) - v(A,C) = 1$

(4) B tritt einer Koalition bei, die durch den Anschluss von C an A entstanden ist.
$v(A,B,C) - v(A,C) = 1$

(5) B steht der Koalition von A und C allein gegenüber
$v(B) - v(A,C) = 0$

(6) B steht der Koalition von C und A allein gegenüber
$v(B) - v(A,C) = 0$

Dann kann man den Gewinnanteil des B leicht ermitteln: das entspricht dem Durchsnittsbetrag von obigen sechs Werten, d.h.

---

[45] SHUBIK, M., *a.a.O.*, s. 57 f.

$$(0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 0 + 0) : 6$$
$$= 3 : 6$$
$$= 0.5$$

Die Zurechnung wird in der Weise erfolgen, dass B (0.5) und A und C je (0.25) bekommen.

Diese Methode wird jedoch unbrauchbar, wenn die Anzahl der Spieler gross wird. Man hat n ! = (n) (n—1) (n—2) ... (2) (1) mögliche Anordnungen, die ausgewertet werden müssen, wenn die Anzahl der Spieler n ist.

VII. Nicht–Kooperative Spiele

(Der Ansatz von NASH)

NASH bezeichnet die Theorien für n-Personenspiele (n = 3), in denen die Bildung der Koalitionen als Woraussetzung für eine Lösung gilt, als «theory of cooperative games» und hat selbst eine Theorie für «noncooperative games» entwickelt, in denen die Bildung der Koalitionen nicht zugelassen ist.

NASH's Anliegen in diesen Nicht–Kooperativen Spielen besteht darin, den Gleichgewichtspunkt des Spiels zu bestimmen, der als eine Verallgemeinerung des Sattelpunktes der NEUMANN–MORGENSTERN, schen Theorie anzusehen ist. Dieser Gleichgewichtspunkt im NASH'schen Sinne entspricht auch völlig dem Sattelpunkt von Zwei–Personen–Nullsummenspielen, in denen ihrer Natur nach die Bildung einer Koalition von beiden Spielern nicht möglich ist.

Der Index i kennzeichnet einen bestimmten Spieler, wobei $i=1,2 \ldots, n$ ist. Die Strategie des i-ten Spielers sei s_i und dessen Zahlungsfunktion p_i, die eine Funktion der Strategien von (n) Spielern ist:

$$p_i = p_i\,(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

Die Strategiekombination von n Spielern $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ wird durch die abgekürzte Bezeichnung δ ersetzt:

$$p_i = p_i\,(\delta)$$

$$\text{wobei } \delta = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \text{ ist}$$

Wenn der i–te Spieler seine Strategie s_i durch eine andere Strategie r_i ersetzt, während die Strategien aller anderen Spieler konstant bleiben, wird diese Anderung in dem n–Strategienbündel mit folgender Schreibweise berücksichtigt:

$$(\delta\,, r_i)$$

Dann kann der Gleichgewichtspunkt in Nicht-kooperativen Spielen definiert werden :

Eine Strategienkombination von (n) Spielern $\delta = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ist ein Gleichgewichtspunkt, wenn für δ gilt:

$$p_i(\delta) = \max\,[p_i(\delta, r_i)]$$
$$\text{für alle } r_i$$

Diese Gleichung bedeutet: Der Spieler i ($i = 1,2, \ldots, n$) maximiert seine Zahlungsfunktion p_i (δ), falls er seine Strategie s_i wählt. Er kann durch das Abweichen von dieser Strategie (s_i) auf eine andere (r_i) bei gegebener Strategienwahl der anderen Spieler nicht ein besseres Spielergebnis erreichen. Jede Strategie, die in $\delta = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ enthalten ist, stellt im Hinblick auf die gegebene Strategienwahl aller anderen Spieler die optimale Strategie dar. Sie kann sowohl eine reine als auch eine gemischte Strategie sein.

Im allgemeinen sind mehrere Gleichgewichtspunkte bzw. mehrere optimale Strategien des einzelnen Spielers vorhanden, die untereinander austauschbar sind. Das folgende Beispiel[46] verdeutlicht diese Zusammenhänge:

$$\begin{array}{l|cc}
B\rightarrow & S_{B1} & S_{B2} \\
A\downarrow & & \\
\hline
S_{A1} & 3;3 & -1;4 \\
S_{A2} & 4;-1 & -3;-3
\end{array}$$

Matrix 10

Die erste Zahl in jedem Matrixelement kennzeichnet den Wert des Spielergebnisses für den Spieler A und die zweite Zahl für den Spieler B.

Die Gleichgewichtspunkte werden durch die Strategiekombination beider Spieler definiert, die die Bedingung

[46] NICOLIN, R., *a.a.O.*, S. 93.

$$p_i(\delta) = \max_{\text{für alle } r_i} [p_i(\delta, r_i)]$$

erfüllen.

Bei der gegebenen Strategie s_{A1} von A ist nach der Gleichgewichtsbedingung die Strategie s_{B2} von B optimal, und umgekehrt bleibt dem A nur die Wahl der Strategie s_{A1}, wenn B die Strategies $_{B2}$ wählt, weil er sonst noch mehr verliert, auf der anderen Seite ist für A die Strategie s_{A2} optimal, wenn der Gegner die Strategie s_{B1} wählt, umgekehrt bleibt dem B nichts anderes übrig, als die Strategie s_{B1} zu wählen, wenn A die Strategie s_{A2} wählt. Die Strategien s_{A1} bzw. s_{A2} und s_{B2} bzw. s_{B1} motivieren sich also wechselseitig,[47] und die Strategiekombinationen (s_{A1}, s_{B2}) und (s_{A2}, s_{B1}) stellen die Gleichgewichtspunkte dar. Es gibt ausserdem ein paar gemischte optimale Strategien, die die Bedingung des Gleichgewichtspunktes erfüllen. Das sind s_{A1} mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 und s_{A2} mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 von A; bzw. s_{B1} mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 von B bzw. s_{B1} mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 und s_{B2} mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 von B.

Das Spielergebnis wird konstant bleiben, wenn ein Spieler mit seiner optimalen gemischten Strategie spielt, während der andere eine seiner optimalen Strategien wählt, oder ebenfalls mit seiner optimalen gemischten Strategie spielt.

Wenn z.B. A der gemischten Strategie des B nur mit s_{A1} antwortet, ergibt sich als Spielergebnis für A die mathematische Erwartung:

$$\frac{2}{3} \cdot (3) + \frac{1}{3}(-1) = \frac{5}{3}$$

Wenn A dagegen nur s_{A2} wählt:

$$\frac{2}{3} \cdot (4) + \frac{1}{3}(-3) = \frac{5}{3}$$

Und wenn A ebenfalls seine optimale gemischte Strategie wählt

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) = \frac{5}{3}$$

[47] NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 95.

Eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strategien bringt dem jeweiligen Spieler nur ungünstigere Ergebnisse. In dieser Weise motivieren sich also auch die optimalen gemischten Strategien wechselseitig und «sie treffen sich in einem (dritten) Gleichgewichtspunkt».[48]

Über die Entscheidung, welcher von diesen drei Gleichgewichtspunkten zu realisieren ist, gibt die Theorie der «non-cooperative games» von NASH keine Kriterien, und ausserdem ist es viel wirklichkeitsnäher und rational, das Spielergebnis (3; 3) zu realisieren, das dem Ergebnis der NEUMANN - MORGENSTERNschen Lösung entspricht, in dem sowohl das gemeinsame als auch das individuelle Gewinnmaximum erreicht werden.

Übrigens ist ein Nicht-kooperatives Spiel im Sinne von NASH nur dann lösbar, wenn die sogenannte «Austauschbedingung» erfüllt ist, «d,h., wenn jeder Spieler unabhängig vom anderen von einer Gleichgewichtsstrategie zur anderen wechseln kann».[49] Diese Bedingung bedeutet aber nichts anderes als dass der Partner auf einen Strategiewechsel der anderen nicht reagiert, «eine Annahme, die LAUNHARDT, HOTELLING und COURNOT bei ihren Oligopoltheorien ebenfalls machten».[50]

VIII. Dynamisierung der Spieltheorie

Die vorher behandelten Theorien der Spiele sind von statischem Charakter, NEUMANN und MORGENSTERN weisen in ihrem Buch auch darauf hin: «Wir wiederholen nachdrücklich, dass unsere Theorie durchaus statischer Natur ist. Eine dynamische Theorie wäre zweifelsohne vollständiger und daher vorzuziehen. Aber andere Zweige der Wissenschaft lehren, dass es nutzlos ist, eine dynamische Theorie aufbauen zu wollen, ehe die statische nicht völlig verstanden ist... Eine statische Theorie behandelt Gleichgewichte. Das Wesensmerkmal des Gleichgewichtes ist, dass ihm keine Tendenz zum Wechsel innewohnt, d.h., dass es keine dynamische Entwicklung fordert. Die Untersuchung dieser Erscheinung ist natürlich nicht ohne gewisse rudimentäre dynamische Begriffe möglich.

Wichtig ist aber, dass sie nur rudimentär sind».[51] Die Besonderheit der Dynamisierung muss also in dem Spielablauf bestehen, der selbst den dynamischen Prozess darstellt.

---

[48] NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 94.

[49] KRELLE, W., COENEN, D.; «Das nicht kooperative Nichtnullsummen-Zwei-Personenspiel», Teil I. in: *Unternehmensforschung*, Ed. 9 (1965), s. 59.

[50] KRELLE, W., COENEN, D., *a.a.O.*, s. 59.

[51] v. NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O., *a.a.O.*, s. 59.

Die Dynamisierung der Spieltheorie, die auch hier zu behandeln ist, gelingt zum erstenmal SHUBIK.[52]

SHUBIK behandelt zuerst «games of survival» (Spiele auf Leben und Tod), die eine unbestimmte Dauer aufweisen, d.h. unendliche Züge haben. Sie sind ausserdem Zwei-Personen-Nullsummenspiele, und ihre einzelnen Partien sind identisch,[53] die solange wiederholt werden, bis dass der vorher festgelegte Zahlungsvorrat erschöpft ist. Dann ist ein Spieler untergegangen, und der andere überlebt. Das Ergebnis des Spiels ist somit nicht von dem Gewinn abhängig, den die einzelnen Spieler zu erreichen gedenken, sondern von dem Wert, dem sie ihrem Überleben bzw. Untergang beimessen. Der Anwendung eines solchen Modelle auf ökonomische Probleme stehen folgende Punkte entgegen:[54]

(1) Das Spiel ist ein Nullsummenspiel

(2) Die Zielfunktionen der Spieler sind von dem von ihnen ihrem Überleben bzw. Untergang beigelegten Wert bestimmt, und dies trifft für ökonomische Sachverhalte nur in Grenzfällen, in denen eine akute Gefahr eines Zusammenbruchs besteht, zu.

(3) Die Änderungen in dem Zahlungsvorrat von einzelnen Spielern sind eine Folge der Ergebnisse der ständig wiederholten Einperiodenspiele. Auf der anderen Seite ist aber der Prozessablauf eine Funktion des Zahlungsvorrates des einzelnen Spielers, weil durch die Höhe dieses Betrages das Drohpotential des Spielers gestärkt oder geschwächt wird.

(4) In diesem Modell werden die Beträge nach jedem Einperiodenspiel direkt dem Zahlungsvorrat zugefügt.

In der Wirklichkeit wird jedoch der Frage von Gewinnverwendung eine grosse Bedeutung beigemessen, und gerade diese Tatsache, d.h. ob der erzielte Betrag zur Stärkung des Drohpotentials im Unternehmen beibehalten oder an die Eigentümer des Unternehmens ausgeschüttet werden soll und im welchem Verhältnis das geschieht, ist für die Spiele auf Leben und Tod von entscheidender Bedeutung. Mit der Ausschüttung muss auch das Verzinsungsproblem berücksichtigt werden, weil die Ausschüttungen in der Regel im Laufe der Zeit vorgenommen werden.

---

[52] SHUBIK, M., *Strategy and Market Structure*, New. York 1959.

[53] Zwei Partien eines Spiels sind dann identisch, wenn sie die gleiche Zugfolge, d.h. die gleichen Alternativwahlen aufweisen.

[54] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 67 f.
NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 182 f.

SHUBIK versucht diese Faktoren in seinem zweiten Modell «games of economic survival» (ökonomische Spiele auf Leben und Tod) zu berücksichtigen. Bevor dieses zweite Modell behandelt wird, ist über die Spiele von unbestimmter Dauer einiges zu bemerken, die die Grundlage der beiden Modelle bilden.

1. Spiele von unbestimmter Dauer

Diese Spiele sind durch ihre unbestimmte Zugfolge, d.h. durch ihre unendlich vielen Züge, charakterisiert. Man muss sie jedoch von den unendlichen Spielen unterscheiden, in denen die Anzahl von Strategien mindestens eines Spielers unendlich ist.

Diese Spiele von unendlicher Dauer können nur in extensiver Form dargestellt werden, und es ist besonders wichtig, dass in diesen Spielen nicht jeder Partie eine Zahlungsfunktion zugeordnet werden kann. Man bezieht die Zahlungsfunktion entweder auf alle vorangegangenen Züge des Spiels oder auf den letzten Zug des Betrachtungszeitpunktes. Man braucht am besten das zweite Verfahren, in dem der letzte Zug im Zeitpunkt (t) mit r_t bezeichnet wird, der eine Untermenge von R_t ($R_t \subset r_t$) ist. Mit R_t wird die Menge aller Züge bis zum Ende des t-ten Zuges (r_t) gekennzeichnet. Jedem Zug r_t ($t=1,2,\ldots$) wird eine n-tupel -Zahlungsfunktion in folgender Form zugeordnet:

$$h_t\,(r_t) = h_{1,t}\,(r_t), \ldots, h_{n,t}\,(r_t)$$

wobei der Index (1... n) die Spieler kennzeichnet.

Weil der Gesamtzahlungsvorrat eine schon vorher festgesetzte bestimmte Höhe aufweisen muss, ist auch die folgende Axiome hinzuzufügen:

$$\sum_{t=o}^{\infty} h_{i,t}\,(r_t) = \text{beschränkt},$$

wobei $i=1,2,\ldots, n$ und $t=1,2,\ldots$ ist.

Das bedeutet, dass die Summe aller Zahlungen einen gewissen Betrag nicht übersteigen darf. Durch diese Axiome können diese Spiele durch einen einzigen Zug charakterisiert werden, der den letzten Zug des Betrachtungszeitpunktes darstellt.

2. Die ökonomischen Spiele auf Leben und Tod (Games of economic survival)

2a) Die Beschreibung der ökonomischen Spiele auf Leben und Tod

SHUBIK berücksichtigt die ökonomischen Faktoren in seinem Modell «games of economic survival», das folgende Eigenschaften aufweist:[55]

(1) Es besteht eine Zerlegung[56] der Züge in (n+1) induzierte Mengen

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n,$$

wobei die Menge v_0 aus Zufallszügen besteht, während die Mengen v_1, $v_2, \ldots, v_n$ die persönlichen Züge der Spieler 1,2,..., n umfassen. Diese Zerlegung wird als Spielerzerlegung bezeichnet.

(2) Jedem Zufallzug in der induzierten Menge v_0 wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auferlegt, die jeder Alternative einen positiven Wert zuordnet, deren Summe 1 ist.

(3) Die Menge M_t enthält alle Partien bis zum t-ten Zug, und m_t bezeichnet eine ganz bestimmte Partie bis zum t-ten Zug. m_t ist also eine Untermenge von M_t, d.h. $m_t \subset M_t$. Jeder Partie m_t sind folgende Gesamtheiten von Zahlen zugeordnet:

$R_{i,t}$; kurzfristige Erlöse
$C_{i,t}$; die Aktiva
$W_{i,t}$; die Ausschüttungen,

wobei i den Index des Spielers (hier Firmen) kennzeichnet; i=1,...,n. Zwischen diesen Grössen besteht folgende Beziehung:

$$C_{i,t} = C_{i,t-1} + R_{i,t} - W_{i,t}$$

$b_{i,t}$; Bankrottgrenze der Aktiva
$L_{i,t}$; der Liquidationswert der Aktiva
$q_{i,t}$; die Diskontrate

(4) Die Züge sind in eine Zerlegung (α) in Informationsmengen $U_{i,d}$ zerlegt, wobei (i) den Index der Spieler und (d) den Index der Informationen

---

[55] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 68 f.

[56] Die Zerlegung einer Menge ist eine erschöpfende Unterteilung dieser Menge in Untermengen derart, dass jedes Element von dieser Menge genau einer Untermenge gehört.

darstellt. Eine Informationsmenge U ist die Verfeinerung der Spielerzerlegung und Alternativzerlegung. Die Letzte ist eine Zerlegung der Züge in Mengen A_j und enthält alle Züge mit j Alternativen; für $j = 1,2,\ldots$

In dieser Weise ist jede Informationsmenge U in der Durchschnittsmenge $p_i \cap A_j$ mit irgendeinem i und j enthalten,[57] wobei die Menge p_i die Züge des i-ten Spielers darstellt-Spielerzerlegung-.

(5) Es gibt für jeden Spieler eine Nutzenfunktion

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

und diese Nutzen- funktion für den i-ten Spieler hat die folgende funktionale Abhängigkeit:

$$p_i = p_i\,(W_{i,o} \cdot q_{i,o}, \ldots, W_{i,\tau} \cdot q_{i,\tau}, L_{i,\tau} \cdot q_{i,\tau})$$
$$i = 1,2,\ldots, n$$

wobei (τ) den Index des Zuges kennzeichnet, bei welchem der i–te Spieler untergeht, bzw. (die Firmen) in die Liquidation eingeht.

Über die Punkte (3) und (5) sind einige Erläuterungen nötig weil die Dynamisierung des Modells hauptsächlich mit Hilfe dieser Punkte erfolgt.

In (3) werden die Gewinnverwendungsmöglichkeiten der Firma berücksichtigt. SHUBIK nennt die kurzfristigen Erlöse $R_{i,t}$ als Nettoerlös der Periode (t) und die Ausschüttungen an die Eigentümer $W_{i,t}$ der Firma (i) als «withdrswal account», die in der Firma zurückbehaltenen Gewinne, d.h. ($R_{i,t} - W_{i,t}$), als «corporate account». Wie schon erwähnt, wird das Drohpotential der Firma durch die Zurückbehaltung der Gewinne gestärkt. Anderseits hängt der Wille der Eigentümer von der Gestalt und dem Umfang der Ausschüttungen ab, ob die Firma in die Liquidation eingehen oder den Kampf (auf Leben und Tod) weiterführen soll.

Durch die Formel $C_{i,t} = C_{i,t-1} + R_{i,t} - W_{i,t}$, die besagt, dass die Aktiva der Firma (i) in der Periode (t) die Summe der Aktiva der Vorperiode und von «corporate account» ($R_{i,t} - W_{i,t}$) sind, wird die Beziehung zwischen Aktiva, Periodennettoerlösen und Ausschüttungen erfasst.[58]

---

[57] Das heisst aber, dass jede Informationsmenge U von einer Partie nur einen persönlichen Zug vi enthält, wobei i=1, 2,...,n ist. Die Menge der Zufallszüge Vo ist eine Untermenge von U, in der Schreibweise $U \subset p_o A_{Aj}$.

[58] In dieser Formel wird vorausgesetzt, dass Firma weder Kredite von drittel Seite noch Einlagen von den Eigentümern für die Kapitalerhöhung bekommen darf.

Der Liquidationswert $L_{i,t}$ ist im Falle eines Bankrotts gewöhnlich kleiner als der Buchwert der Aktiva. Es gilt:

$$O \leqq L_{i,t} \leqq C_{i,t} \quad \text{wenn } C_{i,t} > O$$

$$L_{i,t} = O \quad \text{wenn } C_{i,t} \leqq O$$

$$q = \frac{1}{1+r}, \text{ wobei } r \geqq O$$

dem langfristigen Zinsfuss entspricht, gilt nur für die ausgeschütteten Gewinne ($W_{i,t}$), weil die Verzinsung von «corporate account» ($R_{i,t} \ldots W_{i,t}$) in Nettoerlösen der folgenden Periode erfolgt.

Die Nutzenfunktion des Spielers i

$$p_i = p_i\,(W_{i,o}, \cdot\, q_{i,o}, \ldots, W_{i,\tau} \cdot q_{i,\tau} \cdot L_{i,\tau} \cdot q_{i,\tau}),$$

die eine allgemeine Zahlungsfunktion des Spielers i darstellt, besagt, dass der Nutzen der Spieler eine Funktion der Summe von diskontierten ausgeschütteten bzw. entnommenen Gewinnen und dem ebenfalls diskontierten Liquidationswert ist.

2b) Die Lösungskonzepte der ökonomischen Spiele auf Leben und Tod

2b1) Die Strategien der Spieler

In ökonomischen Spielen auf Leben und Tod bleibt der Strategiebegriff wie auch in statischen Modellen im Mittelpunkt der Lösung. Darum ist es zweckmässig, bevor die Lösung behandelt wird, die Besonderheiten der Strategien in einem ökonomischen Spiel auf Leben und Tod darzulegen.

Weil ein solches Spiel als dauernde Wiederholung eines und desselben Ein-Periodenspiels zu verstehen ist, sind die Alternativen bei jedem Zug die gleichen.[59] «Die Wirklichkeit wird auf diese Weise natürlich nur grob approximiert».[60] Die Menge aller Strategien des i-ten Spielers in der Periode t wird mit $S_{i,t}$, und eine ganz bestimmte Strategie aus dieser Menge, mit $s_{i,t}$ bezeichnet. $S_{i,t}$ ist also die Obermenge von $s_{i,t}$, d.h. $S_{i,t} \supset s_{i,t}$.[61]

---

[59] Die Alternativen eines Zuges stellen in einem Einperiodenspiel ihrem Wesen nach die Strategien des betreffenden Spielers in dieser Periode dar.

[60] NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 188

[61] In diesen Bezeichnungen ist allerdings der Indext überflüssig, weil die Anzahl der Strategien in jeder Periode, d.h. in jedem dauernd in gleicher Weise wiederholten Ein-Periodenspiel, immer gleich ist.

Die Spieler haben in «games of economic survival» in jeder Strategiewahl zwei Entscheidungen zu treffen: eine Entscheidung bezüglich des Marktverhaltens und die andere bezüglich der Gewinnverwendung. Die erste Enstcheidung bezieht sich auf den Perioden - Nettoerlös $R_{i,t}$ und die zweite Entscheidung auf die Aufteilung des Nettoerlöses in «corporate account» ($R_{i,t} - W_{i,t}$) und «withdrswal account» ($W_{i,t}$).

Die Marktkomponente der Strategie $s_{i,t}$ wird mit $m_{i,t}$ und die finanzielle Komponente mit $f_{i,t}$ bezeichnet.[62]

SHUBIK unterscheidet den zwei Arten von Strategien: Eine konstante Marktstrategie liegt vor, wenn für jedes $m_{i,t}$ gilt:

$$m_{i,t} = \overline{m}_i \text{ für } t = 0,1,2,\ldots$$

Eine stationäre Strategie liegt vor, wenn für jedes $s_{i,t}$ gilt:

$$s_{i,t} = \overline{s}_i \text{ für } t = 0,1,2,\ldots$$

Eine konstante Marktstrategie wird also durch die Gleichheit der Marktkomponenten und die stationäre Strategie durch die Gleichheit sowohl der Marktkomponenten als auch der finanziellen Komponenten in jeder Periode charakterisiert. SHUBIK macht diese Unterscheidung der Strategien einmal darum, weil in manchen Fällen, z.B. wenn die Zahlungsfunktionen beider Spieler positive Werte aufweisen (Nicht-Nullsummenspiel), die finanzielle Komponente unabhägig von der Marktkomponente sein wird, und zum anderen, um die sogenannte Drohstrategie definitorisch zu erfassen, die in der Theorie «Games of economic survival» eine besondere Rolle spielt. Zur Definition dieser Drohstrategie können beide Strategiarten benutzt werden. Es erfolgt z.B. mit Hilfe der stationären Strategie in folgender Weise:

$$s_{i,o} = \overline{s}_i$$

$$s_{i,t} = \overline{s}_i \text{ wenn } s_{j,\tau} = \overline{s}_j \text{ für } \tau = 0,1,\ldots\ t-1$$

$$s_{i,t} = F(s_{i,1},\ldots\ldots, s_{i,t-1}; \ldots\ldots, s_{j,t-1})$$

$$\text{für } t = \tau + 1,\ \tau + 2,\ldots$$

$$\text{wenn } s_{j,\tau} \neq \overline{s}_j$$

[62] Als Marktstrategien (mi) kommen die verschiedenen Arten des Konkurrierens, wie Preiskonkurrenz, Produktdifferenzierung, Werbung, Aufmachung, Mode, Einführung von Neuerungen, Absatzorganisation usw., und als finanzielle Strategien (fi) in der Gewinnverwendungspolitik, die Verhältnisse auf dem Geld - und Kapitalmarkt, Liquiditätsgrad der Aktiva usw. in Betracht.

Demnach ist eine Drohstrategie nichts anderes als um eine Drohkomponente ergänzte stationäre Strategie. Nach dieser Drohstrategie sind also die Spieler bereit, solange stationär zu spielen, bis der Gegenspieler den status quo nicht verlässt. Wird ein Spieler den status quo verlassen, dann hat der andere seine Drohstrategie bereit und wird Vergeltungsmassnahmen ergreifen.

Die letzte eigentliche Drohung im Zeitpunkt (t) ist eine Funktion sowohl der eigenen als auch der gegnerischen Strategien von der Periode (1) bis (t—1). «Dies ist erklärlich, denn die Ergebnisse der Ein-Periodenspiele in Verbindung mit der Art der Gewinnverwendung bestimmen die Vermögensstruktur der Unternehmung und damit letztlich den Strategienraum».[63]

Die konstante Marktstrategie und statonäre Strategie der Spieler können theoretisch ebensogut reine wie auch gemischte Strategien sein. Die Anwendung der gemischten Strategie wird aber sehr problematisch, weil der Gegenspieler in einem solchen Fall nicht genau wissen kann, ob es sich beim Abweichen von der stationären Strategie um eine gemischte Strategie handelt oder das Verlassen des status quo bedeutet. Es werden deswegen nur reine Strategien zugelassen.

2b2) Lösung im Zwei-Personenspiel

«Die Lösung eines ökonomischen 2-Personenspiels auf Leben und Tod ist die Menge aller stationären Ergebnisse, die durch entsprechende Drohstrategie-Paare als Gleichgewichtspunkte erzwungen werden können».[64]

Damit wird gemeint, dass die Drohstrategie des kampfstärkeren Spielers ausreicht, um zu verhindern, dass der Gegenspieler den status quo verlässt, und dessen stationäre Strategie in bezug auf die Drohstrategie des kampfstärkeren Spielers optimal ist. Die Drohstrategien beider Spieler verhindern also gegenseitig das Verlassen des status quo von einem Spieler und schaffen in dieser weise Gleichgewichtssituationen. Dazu wird das folgende Beispiel gewählt.[65] In einem «Ein-Perioden-Nicht-kooperativen Spiel» ergibt sich als Gleichgewichtspunkt das Matrixelement (3,3), weil jeder Spieler durch die Anwendung seiner zweiten Strategie das beste Spielergebnis (6) heraus holen will, in der Erwartung, dass sein Gegner die erst Strategie wählt. In dieser Bedingung von Nicht-Kooperation wird in einer begrenzten Wieder-

[63] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 72.
[64] NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 192.
[65] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 70
NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 193.

$$
\begin{array}{ccc}
B \rightarrow \\ A \downarrow & A_1 & B_2 \\
A_2 & 5;5 & 2;6 \\
A_1 & 6;2 & 5;5
\end{array}
$$

Matrix 11

holung des gleichen Spiels dasselbe Ergebnis zustandekommen. -Im NEUMANN-MORGENSTERNschen Lösungskonzept, in dem die Koalitionabildung (als Folge des Rationalverhaltens) als selbstverständliche Bedingung vorausgesetzt wird, würde als Gleichgewichtspunkt das gemeinsame Gewinnmaximum (5,5) verwirklicht, das durch die Anwendung der ersten Strategien A_1 und B_1 erreicht werden kann-.

In der unbegrenzten Wiederholung des gleichen Spiels ist der Gleichgewichtspunkt in folgender Weise zu ermitteln:

Der Spieler A wird seinem Gegner B von dem Augenblick an drohen, in dem B den stationären Zustand verlässt, d.h. die zweite Strategie B_2 wählt, ebenfalls seine zweite Strategie A_2 zu wählen. Infolge dieser Drohung des Spielers A muss der Spieler B seine Strategien B_1 und B_2 bewerten: — Der Zeitpunkt, in dem B den status quo verlässt, wird mit (τ) bezeichnet.

Bei der Strategie B_1 beträgt sein Einkommen

$$(1) \qquad (5) \cdot \sum_{t=o}^{\infty} q_t$$

Bei dem Abweichen zuder Strategie B_2 im Zeitpunkt τ beträgt sein Einkommen.

$$(2) \qquad (5) \cdot \sum_{t=o}^{\tau-1} q^t + 6. q + (3) \cdot \sum_{t=\tau+1}^{\infty} q^t$$

Bis zum Zeitpunkt τ bedient sich der Spieler B der Strategie B_1, während sein Gegner A ebenfalls die erste Strategie A_1 wählt und gewinnt nach jedem Spiel (in jeder Periode) 5 Einheiten. Er geht im Zeitpunkt (τ) zu seiner zweiten Strategie B_2 über und gewinnt in dieser Periode 6 Einheiten, Das Verlassen des status quo durch B veranlasst A, seine Drohstrategie anzuwenden, d.h. er geht ebenfalls von A_1 zu A_2 über, und B gewinnt ab diesem Zeitpunkt (τ) nur 3 Einheiten je Periode. Entsprechendes gilt auch für den Spieler A.

Das erste Einkommen von B ist bei normalem Zinsfuss viel höher als sein zweites Einkommen[66] und das bedeutet, dass für beide Spieler die einmal gewählte erste Strategie A_1 bzw. B_1 beizubehalten günstiger als das Verlassen dieses realisierten stationären Zustandes ist. Dann wird das gemeinsame Gewinnmaximum (5,5) zum Gleichgehung in einem «games of economic survival» Gleichgewichte schafft, die in Spielen von festgelegter und begrenzter Dauer nicht existieren.[67]

In diesem Beispiel führt nur eine Zurechnung zum Gleichgewicht, nämlich die Zurechnung, in der beide Spieler 5 Einheiten bekommen. In der Regel wird aber mit vielen Zurechnungen bzw. vielen Gleichgewichtspunkten zu rechnen sein, weil durch die Drohstrategien der Spieler fast jede mögliche Marktaufteilung als Gleichgewichtslage zu erzwingen ist.[68]

2b3) Der Lösungsansatz in allgemeinen ökonomischen n-Personenspielen auf Leben und Tod

Die Lösung der n-Personenspiele ist in «games of economic survival» ebenfalls schwieriger als die der Zweipersonenspiele, wie es auch in statischen Modellen der Fall ist. «Nun reicht nicht mehr die sich neutralisierende Wirkung eines Paares von Drohstrategien zum Gleichgewicht aus, sondern dafür wird ein n-tupel von Drohstrategien bestimmend».[69]

Für den einzelnen Spieler i (i=1,2,...,n) ist die Drohstrategie in ihrer Grundlage nicht anders als in Zwei-Personenspielen. Ein Spieler (i) wählt solange seine stationäre Strategie, bis die anderen Spieler den status quo beibehalten, und er geht sofort zu seiner Drohstrategie über, wenn auch

---

[66] Sofern der Zinsfuss 200 % nicht übersteigt, ist das erste Ergebnis höher als das zweite. Das gilt auch für A. NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 192.

[67] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 71.

[68] NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 192.

[69] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 73.

nur ein Spieler den status quo verlässt. Die Drohstrategie von dem i-ten Spieler muss also in allgemeinen ökonomischen n-Personenspielen in folgender Form definiert werden:

$$s_{i,o} = \bar{s}_i$$

$$s_{i,t} = \bar{s}_i \qquad \text{für } t = 0,1,2,\ldots$$

$$s_{j,o} = \bar{s}_j$$

$$s_{j,\tau} = \bar{s}_j$$

$$\text{für alle } j \neq i$$

$$\text{und } i = 1,2,\ldots,n$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

$$\tau = 0,1,2,\ldots,\ t-1$$

$$s_{i,t} = F\,(s_{i,1}\,,\, s_{i,2}\,,\ldots,\ s_{i,t-1}\,;\, s_{j,1}\,,\, s_{j,2}\ldots,\ s_{j,t-1})$$

$$\text{für } t = \tau + 1,\ \tau + 2,\ldots$$

$$\text{und } i \neq j \qquad \gamma$$

$$i = 1,2,\ldots n,$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

Die Drohstrategie jedes Spielers ist also eine Funktion der eigenen und aller fremden Strategien von der Periode (1) bis zur Periode (t—1).

Es ist aber zu berücksichtigen, dass die Reaktionsweise von einzelnen Spielern in einem n-Personenspiel auf das Verlassen des status quo durch einen oder mehrere Spieler ungewiss ist. SHUBIK teilt daher die n Spieler in drei Gruppen auf:

[r] = die Anzahl der Spieler, die durch das Verlassen des status quo einen individuellen Vorteil erwarten

[k] = Die Anzahl der Spieler, die durch ihre Drohstrategien das Verlassen des status quo von r Spielern zu verhindern entschlossen sind

[n — (k+r)] = Die Anzahl der Spieler, die auf jeden Fall, wenn auch einige Spieler den status quo verlassen, stationär Spielen wollen.

Durch diese Aufteilung definiert SHUBIK das Gleichgewicht in folgender Weise: «Wenn die Drohstrategien der Spielergruppe (k) stark genug sind, um die Spielergruppe (r) dem Verlassen des status quo zu hindern, so liegt ein (k_i — (r_i) — stabiles Gleichgewicht vor».[70] Wenn die Spieler von Gruppe (k) und (r) sich gegenseitig in Schach halten, so wird sowohl (k_i) — (r_j) als auch (r_j — k_i) zum Gleichgewichtspunkte führen, und im Grunde scheint nur dieser letzte Fall das eigentliche Marktgleichgewicht zu sein.[71]

Mit diesem Gleichgewichtsbegriff können auch die verschiedenen Konkurrenzgrade gekennzeichnet werden, die sich von der vollkommenen Konkurrenz ((0) — (n) –Stabiles Gleichgewicht) bis zur vollständigen Zusammenarbeit ((n—1) — (1) –stabiles Gleichgewicht) erstrecken[72]

Ausserdem können die Erscheinungen auf dem Markt wie Preisfüh rerschaft, Qualitätskonkurrenz (non-price competition) und Preisstarrheit mit diesem Gleichgewichtsbegriff erfasst werden.[73]

---

[70] MEISSNER, W., *a.a.O.*, b. 73.

[71] NICOLIN, R., *a.a.O.*, s. 196 f.

[72] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 73.

In vollkommener Konkurrenz wird kein Anbeiter sich zur Reaktion veranlasst fühlen, wenn ein oder mehrere Gegenspieler den status quo verlassen, d.h. in der Gruppe (k) gibt es keinen Spieler. In einer vollständigen zusammenarbeit von (n) Spielern (z.B. Kollektivmonopol) wird das Verlassen des status quo nur von einem Spieler (r=1), alle übrigen Spieler zur Reaktion veranlassen (k=n—1).

[73] MEISSNER, W., *a.a.O.*, s. 73.

OYUN TEORİSİ

ÖZET

Bir karar modelindeki değişkenler, kıstas karar verici olmak üzere, kontrol edilebilen ve kontrol edilemiyen değişkenler olmak üzere iki gruba ayrılabilirler. Şayet kontrol edilemiyen değişkenler sabit iseler, problem determinist bir model içinde, istatistiki bir dağılım gösteriyorlarsa stokastik bir model içinde (doğrusal programlama, transportasyon modeli, kuyruk teorisi, stoklama modeli v.b. gibi metodlarla) çözüme ulaştırılabilir.

Şayet kontrol edilemiyen değişkenler birer sabite değilse ve istatistiki bir dağılım göstermeyip, bilinçli ve rasyonel davranış gösteren bir başka kuvvet tarafından tayin ediliyorsa; ayrıca modelin kontrol edilebilen değişkenleri üzerinde hakim olan kuvvet ile, modelin kontrol edilemiyen değişkenlerini tayin eden kuvvet arasında bir «çıkar çatışması» söz konusu ise, problemin yukarıda sözü edilen metodlarla çözümü bahis konusu değildir. Böyle bir modelin çözümü için geliştirilen «oyun teorisi» tekniğinde, çıkarları çatışan iki kuvvetin uygulayacakları stratejilerin oyunun sonucunu tayin edeceğinden hareket edilmektedir. Aşağıdaki örnekte oyun teorisine esas olan durum açık bir şekilde görülmektedir.

Bazı kimseler geçirdikleri bazı tecrübeler sonucunda şöyle bir sonuca varabilirler: «ne zaman piknik yapmaya gitmişsek yağmur yağmıştır ve rahatımız bozulmuştur. O halde bundan böyle de pikniğe gidersek yağmur yağacaktır. (SHUBİK, M., «Spieltheorie und die Untersuchung des sozialen Verhaltens:» Eine einführende Darstellung., in: Spieltheorie und Sozialwissenschaften, Hrg.: SHUBIK, M., Hamburg, 1965, s. 18 ve devamı)

Böyle bir sonuca varmak, yani doğa üstü bir kuvvetin piknik yapacağımız zamanı kollayarak, bizim neşemizi kaçırmaya, bizi rahatsız etmeye çalıştığını zannetmek veya buna inanmak hissi bir duyuş olabilir, fakat aklen böyle bir şeyi kabul edemeyiz.

Öte yandan bir savaş alanında, bir milletvekili adayının seçim kampanyasında, poker oyununda, iki büyük rakip firmanın rekabet mücadelesin-

de alınacak kararlarda ve girişilecek operasyonlar da, karşı tarafta en azından bizim birkaç çıkarımıza zıt çıkarları olan bilinçli ve aktif bir kuvvetin varlığını kabul edebilir ve bu kuvvetin bizim plân ve operasyonlarımıza karşı tedbirler alacağını ve hatta karşı operasyonlara girişebileceğini plânımızda göz önünde tutabiliriz; daha doğrusu rasyonel davranışa ulaşmak istiyorsak bu gerçekleri plânımızda muhakkak göz önünde tutmamız gerekir. (SHUBIK, M., Spieltheorie und die Untersuchung des sozialen Verhaltens: eine Einführung, in: Spieltheorie und Sozialwissenschaften, Hrg.: SHUBIK, M., Hamburg 1965, s. 18 ve devamı). Bu durumda karar verici, plânını sadece kendi amaçlarına, yeteneklerine ve imkânlarına göre değil, başkalarının da amaç imkân ve yeteneklerini göz önünde tutarak hazırlamalıdır; başka bir deyimle tatbik edeceği stratejisini karşı tarafın stratejilerini de göz önünde tutarak tayin etmelidir.

Burada kısaca özetlemeye çalıştığımız, yukarıda almanca olarak sunulan bu çalışmanın konusu (Oyun teorisi), «çıkarların çatışması» şeklinde beliren böyle bir durumda uygulanabilecek bir karar verme aleti olarak geliştirilmiştir ve uygulama sahası ve olanağı daha geniş olan «doğrusal programlama metodu», «transportasyon metodu», «kuyruk teorisi» vb. gibi diğer tekniklerle birlikte yöneylem araştırmasının (operation research) kapsamına girer.

Oyun teorisinin esası ilk olarak 1928 yılında von NEUMANN tarafından tamamen matematiksel olarak Minimax teoreminin isbatı ile ortaya konmuş ve 1944 yılında von NEUMANN ve MORGENSTERN tarafından hazırlanan «Theory of Games and Economic Behavior» kitabıyla geliştirilmiş ve bu geliştirme süreci günümüze kadar devamedegelmiştir.

Bu çalışmamızda önce oyun teorisi ile ilgili terimler açıklanmış (Kısım, I), daha sonra da oyun teorisinin amacı ele alınmıştır (Kısım II). Oyun teorisinin amacı olarak, yukarıda açıklamaya çalıştığımız «çıkarların çatışması» durumunda, oyuncuların rasyonel hareket edecekleri varsayılarak, oyunculara hangi davranışların tavsiye edilebileceği noktasından hareket edilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde (kısım III), oyunun ekstansif ve normal olarak tanımı incelenmiştir. Oyunun ekstansif tanımlanmasında, oyunun bütün aşamaları, hamleleri, her kademedeki alternatifler ve bunlardan birinin seçimi, oyuncuların enformasyon durumunun kademelerin ilerlemesine bağlı olarak değişmesi, oyunun başından sonuna kadar takip edilmekte ve oyunun sonucu verilmektedir. Buna ait örnek şekil 1 de (Abb—1) verilmiştir. Oyunun normal şekilde tanımı ile ektansif şekilde tanımı matematiksel olarak tamamen birbirleriyle aynıdırlar. (äquivalent); oyunun normal şekilde tanımında, tek bir oyunun (parti) sonucu, oyuncuların stratejilerinin bir fonksiyonu olarak kabul edilir. Çalışmamızın müteakip bölümünde (kısım IV), oyun teorisinin en geliştirilmiş şekli olan «toplamı sıfır olan oyunlar» ın incelenmesine çalışmıştır. Bu bölümde, «iki şahıslı toplamı sıfır olan oyunlara» geçmeden önce, Minimax prensibi ele alınmış (kısım IV, 1, a), rasyonel davranış şekli olarak A ve B oyuncuları için Minimax stratejileri (V_1 ve V_2) açıklanmış ve Minimax prensibi en genel ifade tarzıyla, (i) ödeme matriksinin (Auszahlungsmatrix) dizilerini ve (j) da sütunlarını göstermek üzere,

$$V_1 \leqslant V_2$$

veya daha açık ifade tarzıyla

$$\max_i \min_j W(A_i B_j) \leqq \min_j \max_i W(A_i B_j)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Minimax prensibi incelendikten sonra, «Toplamı sıfır olan iki şahıslı oyunlar»ın çözümü, tamamen belirli oyunlar, yani pür stratejili oyunlar (eindeutig bestimmte Spiele, Spiele mit reinen Strategien) için ($V_1 = V_2$), ve tamamen belirli olmayan oyunlar, yani karmaşık stratejili oyunlar (nicht eindeutig bestimmte Spiele, Spiele mit gemischten Strategien) için ($V_1 < V_2$) olmak üzere çalışmanın (IV,1,b) ve (IV,1,c) bölümlerinde ele alınmıştır. Tamamen belirli olmayan oyunlar için yapılan çözüm örneklerinde önce A ve B oyuncularının ikişer stratejiye sahip oldukları durum, yani (2x2) oyunları, daha sonra (A) nın (m) ve (B) nin (n) stratejiye sahip olduğu kabul edilerek (2xn) ve (mx2) oyunları, daha sonra da (3x3) oyunları çalışmanın (IV,1, c11; IV,1, c12; ve IV,1, c13) bölümlerinde ele alınmıştır. Genel nitelikteki (mxn) oyunlarının çözümü ise doğrusal programlama metoduyla gerçekleştirilebildiğinden incelemenin dışında bırakılmıştır. Daha sonra çalışmamızın (IV,2) bölümünde, «n-şahıslı toplamı sıfır olan oyunlar», üç şahıslı oyunlar esas alınarak incelenmiş ve bunların nasıl genelleştirilebileceğine değinilmiştir. Bu tip oyunların en önemli özellikleri olarak koalisyon teşkili ve kazancın dağıtımı, karakteristik fonksiyon ve dominanz, stratejik eş-değerlilik (strategische Aquivalenz) problemleri, çalışmamızın (IV,2,b1) (IV,2,b2) ve (IV,2,b3) bölümlerinde ele alınmıştır.

Çalışmamızın müteakip bölümünde (kısım V.) oyunların sonuçlarının toplamının sıfır olma şartı kaldırılarak «genel n-şahıslı oyunlar»ın koalisyon teşkili yoluyla çözümüne geçilmiştir. «Genel n-şahıslı oyunlar»ın çözümü önce MORGENSTERN ve von NEUMANN tarafından geliştirilen metodla incelenmiş, daha sonra da çalışmamızın (kısım VI) bölümünde SHAPLEY tarafından geliştirilen metodla çözüme ulaştırılmıştır.

Çalışmamızın (Kısım VII) bölümünde «genel n-şahıslı oyunlar»da koalisyon teşkili varsayımı da kaldırılarak, NASH tarafından geliştirilen ve oyuncuların herhangi bir koalisyona girmeden oynadıkları «Kooperatif olmayan oyunlar»a geçilmiştir.

Oyun teorisiyle ilgili olarak buraya kadar geliştirilen bütün modeller statik bir karakter taşımaktadır. Çalışmamızın son bölümünde (Kısım VIII) SHUBIK tarafından geliştirilen «dinamik oyun teorisi modeli» ele alınmıştır. Bu modelde, oyun süresinin belirsizliği yani hamle (Zug) sayısının sonsuz olabilmesi problemi çalışmanın (VIII,1) kısmında incelenmiştir. Çalışmamızın (VIII. 2) kısmında ekonomik ölüm-kalım oyunları (games of economic survival, Spiele auf Leben und Tod) önce iki şahıslı oyunlar için (kısım, VIII, 2b2), daha sonra da genel n-şahıslı oyunlar için (kısım VIII, 2b3) inceleme konusu edilmiştir.