İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 02 No 02 Özel Sayı Sayfa 151-154 Ağustos 2003

# İki Örneklem Problemi için Dağılımdan Bağımsız bir Test İstatistiği ve Simulasyon Yardımıyla Diğer Testlerle Gücünün Karşılaştırılması

Mehmet Fedai KAYA[*] Coşkun KUŞ Buğra SARAÇOĞLU

## ÖZET

*Bu çalışmada, iki örneklem problemi için yeni bir test istatistiği önerilmiş ve testin gücü Kolmogorov-Smirnov ve Mann-Whitney Wilcoxon testlerinin gücüyle karşılaştırılmıştır.*

***Anahtar Kelimeler.*** *Dağılımdan bağımsız istatistik, iki örneklem problemi, simulasyon*

## 1. GİRİŞ

$X_1, X_2, ..., X_m$ ve $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sırasıyla sürekli $F$ ve $G$ dağılım fonksiyonlarına sahip iki örneklem olmak üzere

$$H_0 : F(x) = G(x), \forall x \in R \text{ hipotezinin}$$

$$H_1 : F(x) \neq G(x) \text{ veya } \left(F(x) > G(x) \text{ veya } F(x) < G(x)\right), \exists x \in R$$

alternatif hipotezine karşı test edilmesi problemine iki örneklem problemi denir.

Burada $F(x) > G(x)$ gösterimi $P\{X \leq x\} > P\{Y \leq x\}$ anlamındadır ve $Y$ rasgele değişkeni stokastik olarak $X$ rasgele değişkeninden daha büyüktür denir.

Smirnov(1939), Dixon(1940), Wald and Wolfowitz(1940), Wilks(1961), Borovkov(1975), Siddiqui ve Gürler(1992), Bairamov ve Özkaya(2000) gibi iki örneklem problemi ile ilgili bir çok çalışma vardır .

## 2. TEST İSTATİSTİĞİ

$X_1, X_2, ..., X_n$ ve $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sırasıyla sürekli $F$ ve $G$ dağılım fonksiyonlarına sahip bağımsız iki örneklem ve $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ ve $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n)}$ bu örneklemlerden oluşturulan sıra istatistikleri olsun.

$$\Delta_i = \left(\min\{X_{(i)}, Y_{(i)}\}, \max\{X_{(i)}, Y_{(i)}\}\right)$$

olmak üzere

$$\eta_i = \#\{X_j, Y_k \in \Delta_i : j = 1, ..., n,\ k = 1, ..., n\}$$

istatistiğini tanımlayalım. $H_0 : F = G$ hipotezini $H_1 : F \neq G$ hipotezine karşı test etmek için $M_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$ istatistiğini öneriyoruz. Önermiş olduğumuz test istatistiği için

[*] Selçuk Üni. Fen-Edeb. Fak. İstatistik Bölümü, Tel:(332) 241 00 11 /1350, e-mail: fkaya@selcuk.edu.tr

kullanılan $\Delta_i$ aralıkları aynı indisli $X_i$'ler ve $Y_i$'ler tarafından ortak olarak oluşturulduğu için iki kitleden de alınan örneklem hacminin eşit olması şarttır. Farklı olduğu durumlarda eşitlik sağlanacak şekilde rasgele olarak gözlem atılmalıdır.

Bu istatistik iki kitlenin aynı dağılıma sahip olması durumunda aynı indisli "$X_{(i)}, Y_{(i)}$" sıra istatistiklerinin birbirine yakın olacağı ve aralarında fazla sayıda $X$'ler ve $Y$'ler bulunamayacağı düşünülerek oluşturulmuştur. Aynı indisli $X_{(i)}$'ler ve $Y_{(i)}$'ler arasında başka ve $X$'ler ve $Y$'ler bulunmaması durumunda $M_n$ istatistiği "en küçük" 0 değerini alır. $X$'ler ve $Y$'lerin tamamen ayrı olduğu durumda ise $M_n$ istatistiği $n(n-1)$ "en büyük" değerini alır. Bu test istatistiğinde örneklem değerlerinin her biri hem $\Delta_i$ aralıklarının inşasında hem de bu aralıklara düşen gözlem sayısı olarak rol oynadıklarından $\Delta_i$ aralığına düşen herhangi bir $X$ veya $Y$ değeri bir başka $\Delta_j$ aralığının sınır olacağından $\Delta_i$'yi oluşturan $X_{(i)}$ veya $Y_{(i)}$'lerden biri bu $\Delta_j$ aralığına düşmek zorundadır. Buda $M_n$ istatistiğinin $0,2,4,6,8,\dots,n(n-1)$ değerlerini alması sonucunu çıkarır.

Test istatistiğinin karmaşık yapısı sebebiyle kesin dağılımı henüz bulunamamıştır. Alternatif $H_1$hipotezinin $F > G$ veya $F < G$ durumu için test bu istatistiğini kullanmak uygun olmayacaktır. Ancak üzerinde yapılacak değişikliklerle $F > G$ veya $F < G$ alternatif hipotezleri de test edilebilir.

$\alpha$ seviyeli kritik bölge,

$$C_{n,\alpha} = \{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ve } Y_1, Y_2, \dots, Y_n : M_n \geq c_{n,\alpha}\}$$

biçimindedir. Burada $c_{n,\alpha}$, $\alpha$'ya göre belirlenir.

**Tablo 1.** $n = 10,15,20,25$ için 100.000 deneme yapılarak tahmin edilen çeşitli anlam seviyeleri için kritik değerler

| $\alpha$ | .01159 | .04712 | .1023 |
|---|---|---|---|
| $n = 10$ için kritik değer | 54 | 42 | 34 |
| $\alpha$ | .0131 | .0502 | .10338 |
| $n = 15$ için kritik değer | 106 | 80 | 66 |
| $\alpha$ | .00997 | .05194 | .10064 |
| $n = 20$ için kritik değer | 168 | 126 | 106 |
| $\alpha$ | .01015 | .05028 | .10224 |
| $n = 25$ için kritik değer | 236 | 180 | 150 |

**Tablo 2.** $n = 25$, $\alpha \cong 0.1$ ve farklı dağılımlar için $M_n$, Mann-Whitney Wilcoxon ve Kolmogorov Smirnov testlerinin güçlerinin tahmini

| Dağılımlar / Testler | $X \sim U(0,1)$ $Y \sim U(.2,1.2)$ | $X \sim Üstel(1)$ $Y \sim Üstel(2)$ | $X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(1,1)$ | $X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(0,4)$ | $X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(0,9)$ | $X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(.5,4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mann-Whit. Wil. | .7342 | .6741 | .9603 | .1116 | .1228 | .3014 |
| Kolmog.-Smirnov | .5706 | .5998 | .9172 | .346 | .6802 | .5238 |
| $M_n$ | .7246 | .6806 | .9585 | .3985 | .7972 | .5536 |

## 3. SONUÇ

$X_1, X_2, ..., X_n \sim F$ ve $Y_1, Y_2, ..., Y_n \sim G$ bağımsız iki örneklem olmak üzere, bu çalışmada $H_0 : F = G$ hipotezini $H_1 : F \neq G$ hipotezine karşı test etmek için $M_n$ test istatistiği önerildi. Farklı anlam seviyeleri ve örneklem hacmi için kritik değerler bilgisayar simulasyonu yapılarak elde edildi. Bu yeni istatistiğin gücü, Kolmogorov-Smirnov ve Mann Whitney-Wilcoxon testlerinin güçleri çeşitli dağılımlar için 10000 denemelik simulasyon yapılarak karşılaştırıldı. Tablo 2.'den görüldüğü gibi $M_n$ testinin gücü en az Kolmogorov-Smirnov ve Mann Whitney-Wilcoxon testleri kadar iyidir. Sonuç olarak örneklem varyanslarının tahmini arasındaki fark büyük olduğu durumlarda Mann Whitney-Wilcoxon testi yerine $M_n$ veya Kolmogorov-Smirnov testlerinin kullanılması daha uygun olacaktır. Ayrıca Kolmogorov-Smirnov testinin gücü, iki örneklemin de dağılımının aynı fakat konum parametrelerinin farklı olduğu durumlarda Mann Whitney-Wilcoxon ve $M_n$ testinin gücünden daha kötüdür.

## KAYNAKLAR

BAİRAMOV, I.G., ÖZKAYA N.(2000). *"On The Nonparametric Test For Two Sample Problem Based On Spacings."* Journal Of Applied Statistical Science, vol. 10, No.1 pp.57-68

BOROVKOV, A.A. (1975) *Asymptotically Optimal Tests for Compound Hypotheses.* Theor.Prob. Appl. Vol.20, No:1,pp.447-469

DAVİD H. A. (1970). *Order Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

DİXON, W.J. (1940) *A Criterion for Testing the hypothesis thet Two Samples are From the same Population*, Ann. Math. Stat. ,Vol.11,pp. 199-204

RANDLES, R. H., WOLFE, D.A. (1979). *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

SİDDİQUİ and GÜRLER (1992) *A Two Sample Matching Test, Order Statistics and Nonparametrics:*Theory and Appl. pp.237-243

SMİRNOV, N.(1939) *On the Estimation of the Discrepancy Between Emprical Curves of Distribution for Two Independent Samples,* Bull. Math. Univ. Moscow, Vol. 2,.No:2,pp. 3-16

WALD, A. and WOLFOWİTZ, J.(1940) *On a Test Whether Two Samples are From the same Population, Ann. Math. Stat.,* Vol.11,pp.147-162

WİLKS, S.S. (1962) *A Combinatorial Tests for the Problem of Two Samples are From Continuous Distributions,* Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., University of California Press.

# A Distribution Free Test Statistics for Two Sample Problem and Power Comparison with Other Tests Via Simulation

## ABSTRACT

*In this article, a new test statistics for two sample problem is proposed and the power of the test is compared with power of Kolmogorov-Smirnov and Mann-Whitney Wilcoxon tests.*

***Key Words:*** *Distribution free test statistics ,two sample problem, simulation*