İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 02 No 02 Özel Sayı Sayfa 203-217 Ağustos 2003

# İstatistiksel Parametre Kestirim Tekniklerinin Weibull Dağılımının Parametrelerinin Hesaplanmasında Kullanımı ve Deprem Verilerinin Weibull Dağılımına Uygulanması

Veysel YILMAZ[*] Murat ERİŞOĞLU[**]

## ÖZET

*Bu çalışmada istatistiksel parametre kestirim tekniklerinden "En Çok Olabilirlik Tekniği", "En Küçük Kareler Tekniği" ve "Momentler Tekniği"nin Weibull Dağılımının Parametrelerinin hesaplanmasındaki kullanımı anlatılmıştır. Farklı örneklem büyüklüklerinde sözü edilen teknikler içersinde hangi tekniğin daha iyi olduğunu göstermek amacı ile karşılaştırmalar yapılmış ve karşılaştırma sonuçları gözönüne alınarak deprem verilerine Weibull dağılımının bir uygulamasına yer verilmiştir.*

***Anahtar Kelimeler:*** *Weibull Dağılımı, En Çok Olabilirlik Tekniği, En Küçük Kareler Tekniği, Momentler Tekniği, Deprem*

## 1-WEİBULL DAĞILIMI

X, $\alpha$ ve $\beta$ parametreleri ile Weibull rasssal değişkeni olsun. X'in **olasılık yoğunluk fonksiyonu** aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^{-\beta}x^{\beta-1}\exp(-\alpha^{-\beta}x^{\beta});0<x<\infty,\alpha>0,\beta>0\\ 0 \qquad ;\text{d.d}\end{cases} \quad \text{.......................... (1)}$$

**Ölçek parametresi** $\alpha$ bazen karakteristik yaşam parametresi olarak da isimlendirilir. $\beta$ **biçim parametresi** dağılımın çarpıklığını belirler.

İki parametreli Weibull dağılımının **birikimli dağılım fonksiyonu** aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$F(x)=1-\exp(-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}) \quad \text{.................................................................. (2)}$$

[*] Osmangazi Üniversitesi Fen-Edb. Fak. İstatistik Bölümü Meşelik Kampüsü Eskişehir- vyilmaz@ogu.edu.tr (haberleşme adresi)

[**] Osmangazi Üniversitesi İstatistik Bölümü- merisoglu@mail.com

İki parametreli Weibull dağılımının **güvenirlilik fonksiyonu** ( reliability function); (Emeeker and Escobar, 1995)

R(x)= 1- F(x)

$$R(x)=\exp(-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}) \quad \text{.......... (3)}$$

şeklinde tanımlanır.

İki parametreli Weibull dağılımının **beklenen değeri** aşağıdaki gibidir

$$E(x)=\alpha\Gamma(\frac{1}{\beta}+1) \quad \text{.......... (4)}$$

## 2-İSTATİSTİKSEL PARAMETRE KESTİRİM TEKNİKLERİNİN WEİBULL DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİNDE KULLANIMI

### 2.1- En Çok Olabilirlik Tekniği (Maximum Likelihod Method)

İki parametreli Weibull dağılımı için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \quad \text{.......... (5)}$$

$$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} \beta\alpha^{-\beta}x_i^{\beta-1}\exp(-\alpha^{-\beta}x_i^{\beta}) \quad \text{.......... (6)}$$

şeklindedir. Olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alınırsa,

$$InL(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} In\beta-\beta In\alpha+(\beta-1)Inx_i-\alpha^{-\beta}x_i^{\beta} \quad \text{..........(7)}$$

$$InL(\alpha,\beta)=nIn\beta-n\beta In\alpha+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n} Inx_i-\alpha^{-\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \quad \text{.......... (8)}$$

elde edilir (Lemon ,1975). En çok olabilirlik tekniği ile parametre kestiriminin temeli, olabilirlik fonksiyonunu en büyükleme esasına dayanır. Bunun için olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial InL(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=-n\beta\alpha^{-1}+\beta\alpha^{-(\beta+1)}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}=0 \quad \text{.......... (9)}$$

$$\frac{\partial InL(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=n\beta^{-1}-nIn\alpha+\sum_{i=1}^{n} Inx_i-\alpha^{-\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}Inx_i+\alpha^{-\beta}In\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}=0 \quad \text{.......... (10)}$$

(9) ve (10 ) ile ifade edilen eşitliklerde α'yı elersek (7 ) eşitliği elde edilir.

$$(1-\hat{\beta})\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} + n\hat{\beta}[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}]^{-1}\sum_{i=1}^{n} x^{\hat{\beta}-1} = 0 \qquad (11)$$

(11) eşitliğinin çözümünde ya standart iteratif teknikler kullanılır ya da deneme yanılma tekniği kullanır. (11) ile ifade edilen eşitliğin çözümünden elde edilen $\hat{\beta}$ (12) ile gösterilen eşitlik de yerine konarak $\hat{\alpha}$ elde edilir ( Mark and Austin, 1985).

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}}{n} \right)^{1/\hat{\beta}} \qquad (12)$$

(11) nolu eşitliğin çözümünde Newton iterasyonları için genel tekrarlı işlem basamakları şöyledir.

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k + \frac{A + (1/\hat{\beta}_k) - C_k / B_k}{(1/\hat{\beta}_k^{\,2}) + (B_k H_k - C_k^{\,2})/B_k^2}$$

Burada kullanılan A, $B_k$, $C_k$ ve $H_k$ ifadelerinin açılımları aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}, \qquad B_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}_k}, \qquad C_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}_k} \ln x_i \quad \text{ve} \quad H_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}_k} (\ln x_i)^2$$

Bu iterasyonlar için başlangıç noktası olarak $\hat{\beta}_0$'ın kestirimi ise şöyledir.

$$\hat{\beta}_0 = \left\{ \frac{\frac{6}{\pi^2}\left[ \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \right)^2}{n} \right]}{n-1} \right\}^{-1/2}$$

β'nın başlangıç kestirim değeri olarak $\hat{\beta}_0$'ın kullanıldığı zaman 0,0001 duyarlılıkla tam olarak elde etmek için, yani iki ardışık tahmin arasında 0,0001 veya daha az bir mutlak fark elde etmek için ortalama 4 Newton iterasyonunun gerekli olduğu gözlenmiştir (Şahin, 2000).

## 2.2- En Küçük Kareler Tekniği ( Least Squares Method)

En küçük kareler tekniği istatistik kestirim kuramında genellikle kullanılan tekniklerden biridir. Büyük hacimli örneklemler için teknik oldukça iyi sonuçlar vermesine karşı küçük hacimli örneklemlerde diğer kestirim tekniklerine göre yetersiz kalmaktadır. Monte Carlo benzetimi ile yapılan çalışmalarda en küçük kareler tekniği ile hesaplanan parametreler için bulunan hata kareler toplamının, küçük hacimli örneklem durumunda diğer teknikler uygulandığında hesaplanan hata kareler toplamından daha büyük olduğu görülmüştür ( Al. Zenbil, 1991).

(2) nolu eşitlik de gösterilen Weibull dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x_i) = 1 - \exp(-\alpha^{-\beta} x_i^{\beta})$$

$$1 - F(x_i) = \exp(-\alpha^{-\beta} x_i^{\beta})$$

$$\{1 - F(x_i)\}^{-1} = \exp(\alpha^{-\beta} x_i^{\beta}) \qquad \text{.......... (13)}$$

şeklinde düzenlenerek (13) nolu eşitlik elde edilir. Elde edilen eşitliğin doğal logaritması alınırsa,

$$-\ln\{1 - F(x_i)\} = (\alpha^{-\beta} x_i^{\beta}) \qquad \text{.......... (14)}$$

elde edilir. Elde edilen (14) nolu eşitliğin tekrar doğal logaritması alınırsa,

$$\ln[-\ln\{1 - F(x_i)\,] = -\beta\ln\alpha + \beta\ln x_i \qquad \text{.......... (15)}$$

eşitliği elde edilir. (15) nolu eşitliğe bakarak, $\ln x_i$ ile $\ln[-\ln\{1 - F(x_i)\,]$ arasında doğrusal bir ilişki olduğunu söyleyebiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n}\{\ln[-\ln(1 - F(x_i)] - \ln[-\ln(1 - E(F(x_i))]\}^2 \qquad \text{.......... (16)}$$

İki parametreli Weibull dağılımının parametreleri (16) nolu eşitliği en küçüklemeye çalışılarak kestirilir. $\alpha$ ve $\beta$ parametreleri (17) ve (18) nolu eşitlikler kullanılarak kestirilir.

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ln[-\ln\{1 - F(x_i)\}] - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \sum_{i=1}^{n}\ln[-\ln\{1 - F(x_i)\}]}{n\sum_{i=1}^{n}\ln x^2 - \{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\}^2} \qquad \text{.......... (17)}$$

$$\hat{\alpha} = \exp\{\frac{\hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \sum_{i=1}^{n}\ln[-\ln\{1 - F(x_i)\}]}{n\hat{\beta}}\} \qquad \text{.......... (18)}$$

## 2.3- Momentler Tekniği ( Method of Moments)

Momentler tekniği belki de kestirim tekniklerinin en eskisidir. Eğer kestirilecek k parametre varsa, bu parametrelere bağlı ilk k evren momenti, karşılık gelen örneklem momentlerine eşitlendiğinde bu parametreleri bulunduran k sayıda eşitlik elde edilir. Elde edilen bu k sayıdaki denklem, bilinmeyen parametreler için çözülerek kestirim değerleri bulunur (Bury 1975).

Weibull dağılımının parametrelerinin kestiriminin momentler tekniği ile kestiriminde dağılımın sıfır etrafındaki birinci ve ikinci momentleri kullanılır. İki parametreli Weibull dağılımının sıfır etrafındaki k. momenti,

$$E(x^k) = \alpha^k \Gamma(\frac{k}{\beta} + 1) \quad \text{.......... (19)}$$

şeklindedir. (19) nolu eşitlik kullanıldığında sıfır etrafındaki ilk iki moment,

$$E(x) = \alpha \ \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$$

$$E(x^2) = \alpha^2 \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)$$

şeklindedir. E(x)'in karesinin $E(x^2)$'ye bölünmesi ile yalnızca β parametresine bağlı bir fonksiyon elde edilecektir.

$$\bar{x} = \alpha \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1) \quad \text{.......... (20)}$$

$$\frac{\{\sum_{i=1}^{n} x_i\}^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\{\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)\}^2}{\Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)} \quad \text{.......... (21)}$$

(21) nolu eşitlik deneme yanılma tekniği kullanılarak ya da standart iteratif teknikler yardımıyla çözülerek β parametresi kestirilir. Daha sonra elde edilen $\hat{\beta}$, (20)'de yerine konularak α parametresi kestirilir.

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\Gamma(\frac{1}{\hat{\beta}} + 1)} \quad \text{.......... (22)}$$

## 3-WEİBULL DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN KESTİRİM TEKNİKLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde Weibull dağılımının parametrelerinin kestirim tekniklerinden, "En Çok Olabilirlik Tekniği (MLE)", "En Küçük Kareler Tekniği (LSM)" ve "Momentler Tekniği (MOM)"nin karşılaştırılması yapılacak ve hangi durumda hangi tekniğin daha iyi sonuç vereceği belirlenecektir [Weibull dağılımı parametrelerine ilişkin kestirim teknikleri hakkında ayrıntılı bilgiler için bakınız: Al- Fawzan Mohammad A. 2000, Al-Baidhani, F. A. , and Sinclair, C. D.1987, Flygare, Mark E. , Austin, John A. , and Buckwalter, Ross M. 1985, Kappenman, Russell F.1985, Sinha, S. K.1987, Zanakis, Stelios H. , and Kyparisis, J.1986] .

Biçim parametresi $\beta$ ve ölçek parametresi $\alpha$'nın bilinen değerleri için 10, 30, 50, 100 ve 120 birimlik örneklemler üretilecektir. Üretilen örneklemlere üç farklı teknik uygulanarak her örneklem için $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}$ hesaplanacaktır. Her bir teknik için aşağıda formülü verilen Toplam Değişkenlik (TD) hesaplanacaktır (Al- Fawzan, 2000).

$$TD = \left|\frac{\hat{\beta}-\beta}{\beta}\right| + \left|\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\alpha}\right| \quad \text{......} \quad (23)$$

Burada $\beta$ ve $\alpha$ bilinen parametreleri, $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}$ tekniklerle kestirilen parametrelerdir. Kestirim tekniklerinin her biri için hesaplanan Toplam Değişkenlikler (TD) içersinde en küçük TD değerine sahip teknik, en iyi teknik olarak belirlenecektir.

Karşılaştırmalar sonrası Tablo 1 elde edilir. Tablo 1 incelendiğinde genel olarak genel olarak 250 karşılaştırmanın 122'sinde MLE, 24'ünde MOM ve 104'ünde LSM en iyi parametre kestirim tekniği olarak seçilmiştir. Buna göre MLE tüm durumların %48,8'sinde en iyi teknik olarak seçilerek karşılaştırılan üç teknik içersinde en iyi teknik olarak seçilmiştir.

**Tablo 1.** Karşılaştırma Sonuçlarının Özeti

| n | MLE | % | MOM | % | LSM | % | EN İYİ TEKNİK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 25 | **0,50** | 6 | **0,120** | 19 | **0,38** | MLE |
| **30** | 21 | **0,42** | 8 | **0,160** | 21 | **0,42** | MLE-LSM |
| **50** | 23 | **0,46** | 4 | **0,080** | 23 | **0,46** | MLE-LSM |
| **100** | 21 | **0,42** | 3 | **0,060** | 26 | **0,52** | LSM |
| **120** | 32 | **0,64** | 3 | **0,060** | 15 | **0,30** | MLE |
| **GENEL** | 122 | **0,488** | 24 | **0,096** | 104 | **0,416** | MLE |

Örneklem hacminin 10 olduğu 50 karşılaştırma yapılmış ve bu karşılaştırmaların
Örneklem hacminin 10 olduğu 50 karşılaştırma yapılmış ve bu karşılaştırmaların

25'inde MLE, 6'sında MOM ve 19'unda LSM en iyi parametre kestirim tekniği olarak seçilmiştir. Örneklem hacminin 10 olduğunda yapılan karşılaştırmaların %50'sinde MLE en iyi teknik olarak seçilerek 10 birimlik örneklemler için karşılaştırılan üç teknik içersinde en iyi teknik olarak seçilmiştir.

Örneklem hacminin 30 olduğu 50 karşılaştırmadan 21'erinde MLE ve LSM en iyi teknikler olarak ortaya çıkarken, MOM sadece 8'inde en iyi teknik olarak seçilmiştir. 30 birimlik örneklemler için karşılaştırılan üç teknik içersinden %42'şerlik yüzdelerle MLE ve LSM en iyi teknikler olarak ortaya çıkmıştır.

Örneklem hacminin 50 olduğu 50 karşılaştırmadan 23'erinde MLE ve LSM en iyi teknikler olarak ortaya çıkarken, MOM sadece 4'ünde en iyi teknik olarak seçilmiştir. 50 birimlik örneklemler için karşılaştırılan üç teknik içersinden %46'şarlık yüzdelerle MLE ve LSM en iyi teknikler olarak belirlenmiştir.

Örneklem hacminin 100 olduğu 50 karşılaştırma yapılmış ve bu karşılaştırmaların 21'inde MLE, 3'ünde MOM ve 26'sında LSM en iyi parametre kestirim tekniği olarak seçilmiştir. Örneklem hacminin 100 olduğunda yapılan karşılaştırmaların %52'sinde LSM en iyi teknik olarak seçilerek 100 birimlik örneklemler için karşılaştırılan üç teknik içersinde en iyi teknik olarak seçilmiştir.

Örneklem hacminin 120 olduğu 50 karşılaştırma yapılmış ve bu karşılaştırmaların 32'sinde MLE, 3'ünde MOM ve 15'inde LSM en iyi parametre kestirim tekniği olarak seçilmiştir. Örneklem hacminin 120 olduğunda yapılan karşılaştırmaların %64'ünde MLE en iyi teknik olarak seçilerek 120 birimlik örneklemler için karşılaştırılan üç teknik içersinde en iyi teknik olarak seçilmiştir.

**Tablo 2.**Karşılaştırmalarda Ortalama TD ve TD'in Standart Sapması

| n | | MLE | MOM | LSM |
|---|---|---|---|---|
| 10 | *Ortalama TD* | 0,305936 | 0,977885 | 0,305064 |
| | *TD'in s.sapması* | 0,222574 | 0,920091 | 0,200191 |
| 30 | *Ortalama TD* | 0,245939 | 0,900393 | 0,236755 |
| | *TD'in s.sapması* | 0,222933 | 1,263645 | 0,196535 |
| 50 | *Ortalama TD* | 0,172942 | 0,768266 | 0,180687 |
| | *TD'in s.sapması* | 0,140656 | 0,705012 | 0,134003 |
| 100 | *Ortalama TD* | 0,107474 | 0,446420 | 0,102269 |
| | *TD'in s.sapması* | 0,076151 | 0,454859 | 0,065372 |
| 120 | *Ortalama TD* | 0,079788 | 0,435660 | 0,090765 |
| | *TD'in s.sapması* | 0,055065 | 0,558857 | 0,050586 |
| GENEL | *Ortalama TD* | 0,182416 | 0,705725 | 0,183108 |
| | *TD'in s.sapması* | 0,179899 | 0,855969 | 0,164343 |

Tablo 2'de karşılaştırmalar için ortalama TD ve TD'in standart sapması verilmiştir. Karşılaştırmaların geneline bakıldığında MLE tekniğinde ortalama TD

0,182416, MOM tekniğinde ortalama TD 0,705725 ve LSM tekniğinde TD 0,183108 olarak ortaya çıkmıştır

Tablo 2 incelendiğinde MLE, MOM ve LSM tekniklerinde örneklem hacimleri arttıkça ortalama TD'in azaldığı görülmektedir. Bu sonuçlar ışığında örneklem hacimlerinin büyük olması durumunda, kestirimlerin gerçek değere daha yakın olduğunu söyleyenebilir.

30 ve 50 birimlik örneklemler için MLE ve LSM en iyi teknikler olarak ortaya çıkmışlardı. Tablo 2'deki ortalama TD'liklerine bakarak iki teknik arasında bir tercih yapılabilir. 30 birimlik örneklemler için 0,236755 ortalama TD'lik ile LSM tekniğini en iyi teknik olarak seçerken, 50 birimlik örneklemler için 0,172942 ortalama TD'likle MLE tekniği en iyi teknik olarak tercih edilebilir.

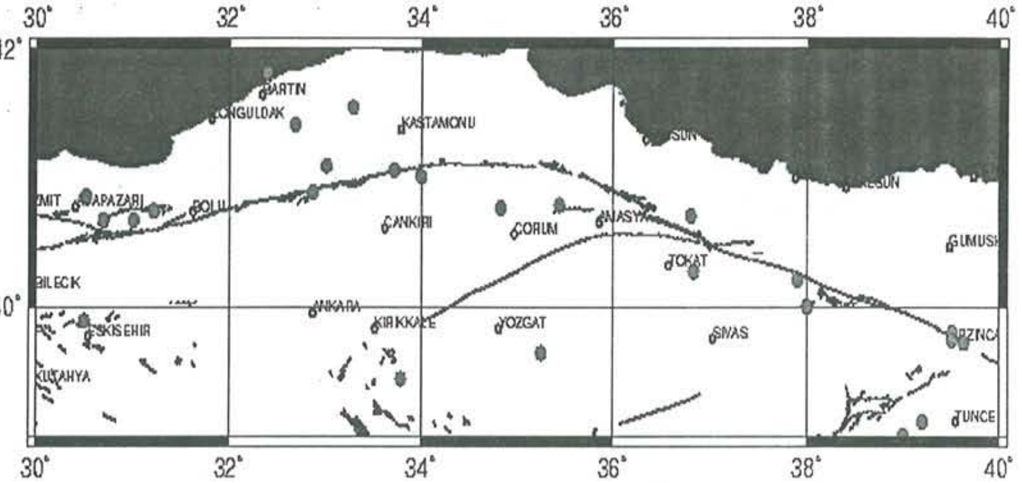
## 4-KUZEY ANADOLU FAY ZONUNDA DEPREM RİSKİNİN SAPTANMASINDA WEİBULL DAĞILIMININ KULLANILMASI

Bu çalışmada, Kuzey Anadolu Fay Zonunun üniform özellik gösteren ve aynı tektonik rejim sonucu oluşan depremlerin yer aldığı $30.00^0$-$40.00^0$ boylamları arasında kalan yaklaşık 100 km genişliğindeki orta kesim inceleme bölgesi olarak seçilmiştir (Kolçak, Altınok ve Gündoğdu, 1987 ).

Ülkemizde Weibull dağılımı kullanılarak inceleme alanlarında belli bir magnitüde sahip depremlerin olma riskinin saptandığı çalışmalar da genel olarak zaman olarak yıl alınmış ve bölümlendirilmiş sıklık dağılımı ile çalışılmıştır. Bölümlendirilmiş sıklık dağılımı ile çalışılırken zaten yetersiz olan verilerden bilgi kaybı yapılıyor ve zaman yıl olarak alınarak da duyarlılık yitiriliyordu. Bu sakıncalar dikkate alınarak yapılan uygulamalarda zaman birimi olarak gün alınmış ve sıklık dağılımı olarak dizi tercih edilmiştir. Weibull dağılımı kullanılarak yapılan çalışmalardaki temel bir hata da her zaman için parametre kestirimleri için "En Küçük Kareler Tekniğinin" kullanılmasıdır. Bu çalışmada karşılaştırma sonuçları gözönüne alınarak örneklem hacimleri dikkate alınacak ve parametre kestirimleri için en uygun teknik kullanılacaktır. [Deprem kestirim teknikleri ve uygulamalarıyla ilgili ayrıntılı bilgi için bakınız: Dargahi, G.R. 2002, Jeen-Hwa Wang and Chiao-Hui Kuo 1998, Rikitake, T. 1975 ve 1999, Kayabali, Kamil and Akin, Müge 2003, Sergio G.Ferraes 2003 ].

X rassal değişkeni, KAFZ'ın $39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamlarında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte ($M \geq 6$) ard arda meydana gelen iki deprem arasında geçen zaman (gün) olarak tanımlansın.

KAFZ'ın $39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamlarında 1900-2000 yılları arasında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte ($M \geq 6$) meydana gelen depremlere ait veri seti düzenlenirse Tablo 3'e ulaşılır. Şekil 1'de $39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamında 1900-2000 yılları arasında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen depremler gösterilmiştir.




**Şekil 1.** 39.00$^0$-42.00$^0$ kuzey enlemleri ile 30.00$^0$-40.00$^0$ doğu boylamında 1900-2000 yılları arasında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen depremler*

**Tablo 3.** Uygulamaya İlişkin Düzenlenmiş Veri Seti**

| x (gün) | x (gün) | x (gün) | x (gün) | x (gün) | x (gün) |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 182 | 458 | 633 | 1163 | 3258 |
| 67 | 217 | 501 | 756 | 1821 | 3528 |
| 143 | 323 | 590 | 899 | 2039 | 4863 |
| 159 | 398 | 616 | 979 | 2117 | 8592 |

X'nin, $\alpha$ ve $\beta$ parametreleri ile Weibull rassal değişkeni olduğunu kabul edersek, X'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^{-\beta}x^{\beta-1}\exp(-\alpha^{-\beta}x^{\beta});0<x<\infty,\alpha>0,\beta>0\\ 0 \qquad ;\text{d.d}\end{cases}$$

şeklindedir. 30 birimlik örneklem hacimleri için En Çok Olabilirlik Tekniğini veya En Küçük Kareler Tekniğinin kullanılmasını önermiştik. İki teknik arasında bir tercih yapmak amaçı ile 30 birimlik örneklem hacimleri için tekniklerin ortalama TD'lerine bakmış ve daha küçük ortalama TD'ye sahip En Küçük Kareler Tekniğini seçmiştik. Bu seçime bağlı kalarak, uygulamamızdaki 24 birimlik örneklem hacminde, parametre kestirimlerinde kullanacağımız teknik En Küçük Kareler Tekniğidir. Parametre kestirimleri Weibull++6 paket programında gerçekleştirilmiştir. Parametre kestirim sonuçları Tablo 4'de verilmiştir.

* Deprem verileri www.koeriboun.edu.tr adresinden alınmıştır.

**Tablo 4.** Parametre Kestirim Değerleri

| | |
|---|---|
| $\hat{\beta}$ | 0,7796 |
| $\hat{\alpha}$ | 1256,4433 |

$39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen depremlerin ortalama yineleme periyodu aşağıdaki gibi bulunur.

$$E(x) = \alpha\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$$

$$E(x)=1256.4433\,\Gamma(\frac{1}{0,7796} + 1)$$

$$E(x)=1450,8759 \cong 1451 \text{ gün}$$

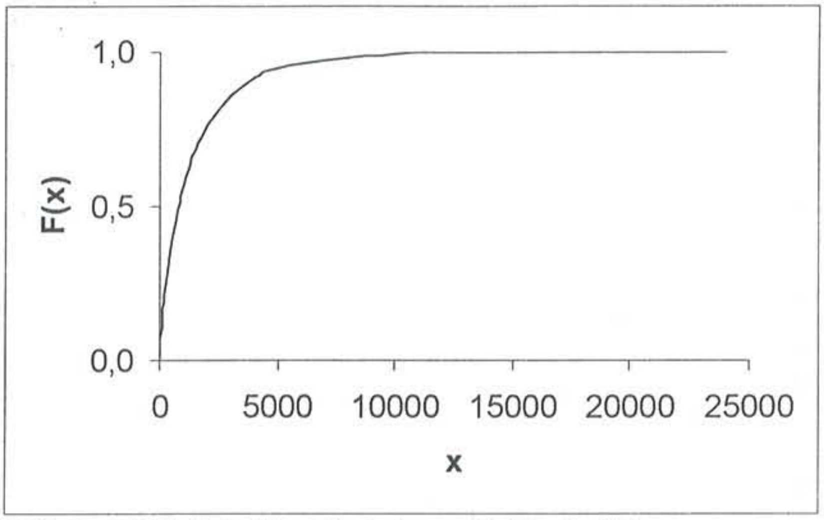
$39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen depremlerin ortalama yineleme periyodu 1451 gündür. Buna göre, $39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir deprem sonrası ortalama 1451 gün sonra magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte bir deprem meydana gelmesi beklenmektedir.

$39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir depremden sonra farklı x günleri içersinde, inceleme bölgesinde magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte bir depremin meydana gelme risklerini gösteren tasarım periyodu Tablo 5'de verilmiştir.

**Tablo 5.**Farklı x'ler İçin Tasarım Periyodu

| x(gün) | F(x) |
|---|---|
| 1 | 0,0038 |
| 10 | 0,0228 |
| 100 | 0,1298 |
| 200 | 0,2123 |
| **500** | **0,3859** |
| 750 | 0,4877 |
| 1000 | 0,5670 |
| 1500 | 0,6828 |
| 2000 | 0,7623 |
| 3000 | 0,8607 |
| 4000 | 0,9151 |
| 5000 | 0,9469 |
| 10000 | 0,9935 |
| 20000 | 0,9998 |
| 24000 | 1,0000 |

Tablo 5'den hareketle örneğin x=500 gün için $39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile $30.00^0$-$40.00^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir depremden sonra 500 gün içersinde magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte bir deprem meydana gelme olasılığı %38,59'şeklinde yorum yapılabilir. Şekil 2'de birikimli dağılım fonksiyonu F(x)'nin grafiği verilmiştir.




**Şekil 2.** Birikimli Dağılım Fonksiyonu F(x)'in Grafiği

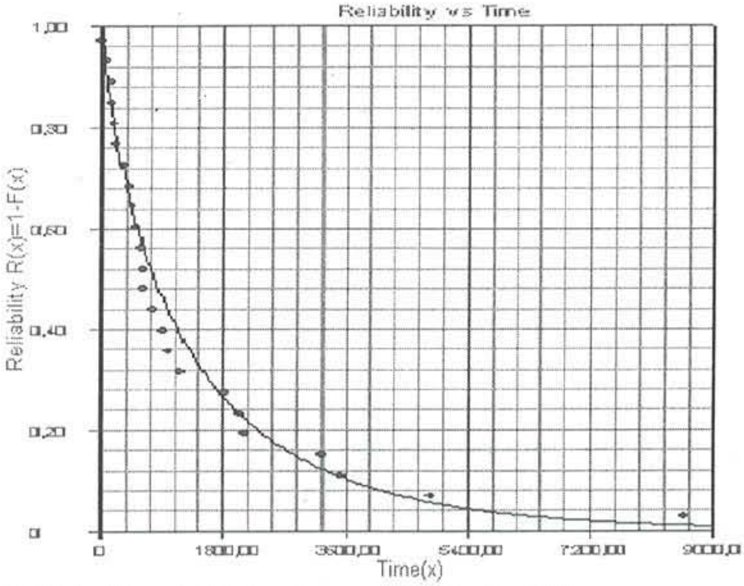
Farklı x'ler için hesaplanan güvenirlilik fonksiyonu değerleri Tablo 6'da gösterilmiştir.

**Tablo-6:** Farklı x'ler İçin Güvenirlilik Fonksiyonu R(x)'in Değerleri

| x(gün) | R(x) |
|---|---|
| 1 | 0,9962 |
| 10 | 0,9772 |
| **100** | **0,8702** |
| 200 | 0,7877 |
| 500 | 0,6141 |
| 750 | 0,5123 |
| 1000 | 0,4330 |
| 1500 | 0,3172 |
| 2000 | 0,2377 |
| 3000 | 0,1393 |
| 4000 | 0,0849 |
| 5000 | 0,0531 |
| 10000 | 0,0065 |
| 14000 | 0,0014 |
| 20000 | 0,0002 |

Tablo 6'daki değerlerin yorumlamasına bir örnek olması amaçı ile x=100 gün için yorumumuzu yapalım. Hesaplamalara göre $39.00^0$-$42.00^0$ kuzey enlemleri ile

30.00$^0$-40.00$^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir depremden sonra 100 gün içersinde magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte bir deprem meydana gelmeme olasılığı %87,02'dir. Şekil 3'de güvenirlilik fonksiyonunun grafiği verilmiştir.




**Şekil 3.** Güvenirlilik Fonksiyonu R(x)'in Grafiği

39.00$^0$-42.00$^0$ Kuzey Enlemleri İle 30.00$^0$-40.00$^0$ Doğu Boylamında Magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir depremden sonrası 1000 gün içersinde magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte bir deprem meydana gelmesi olasılığı %56,7'dir. Yıkıcı, can ve mal kayıplara neden olabilecek $M \geq 6$ büyüklüğündeki bir depremin 1000 gün içersinde tekrarlanma olasılığının bu kadar yüksek olması Türkiye'de deprem gerçeğini gözler önüne sermektedir.

## 5- SONUÇ

"En Çok Olabilirlik Tekniği", "En Küçük Kareler Tekniği" ve "Momentler Tekniği " istatistiksel parametre kestirim teknikleri arasında en yaygın kullanılan tekniklerdirKarşılaştırmalar sonrası genel olarak 250 karşılaştırmanın 122'sinde MLE, 24'ünde MOM ve 104'ünde LSM en iyi parametre kestirim tekniği olarak seçilmiştir. Buna göre MLE tüm durumların %48,8'sinde en iyi teknik olarak seçilerek karşılaştırılan üç teknik içersinde en iyi teknik olarak seçilmiştir.Örneklem hacminin 10, 50 ve 120 olduğu durumlarda Weibull dağılımının parametrelerinin kestiriminde MLE, 30 ve 100 olduğu durumlarda ise LSM kullanılmalıdır.Bu çalışmada, yapılan karşılaştırma sonucu gözönüne alınarak çözümleme "En Küçük Kareler Tekniği" kullanılarak gerçekleştirilmiştir Örneklem büyüklükleri değiştikçe iyi performans gösteren tekniğin değiştiği sonucu ile karşılaşıldığından bundan sonra yapılacak çalışmalarda parametre kestirim tekniği seçilirken örneklem hacmi gözönüne alınmalı ve çözümleme en uygun teknik ile yapılmalıdır.

Uygulama sonunda çıkan sonuçlar ise aşağıda kısaca özetlenmiştir;

-39.00$^0$-42.00$^0$ kuzey enlemleri ile 30.00$^0$-40.00$^0$ doğu boylamında magnitüdü 5 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir depremden sonra 500 gün içersinde magnitüdü 5 veya yukarı büyüklükte bir deprem meydana gelme olasılığı %84,31'dir.

-39.00$^0$-42.00$^0$ kuzey enlemleri ile 30.00$^0$-40.00$^0$ doğu boylamında magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte meydana gelen bir depremden sonra 5000 gün içersinde magnitüdü 6 veya yukarı büyüklükte bir deprem meydana gelme olasılığı ise %94,69'dur.

- Magnitüdü 5 veya yukarı büyüklükte bir deprem olduktan sonra ilk 3000 gün içinde en riskli alan batı inceleme alanı iken, 3000 gün sonunda ise orta inceleme alanı en riskli alanıdır. Doğu inceleme alanı ise, batı ve orta inceleme alanlarına göre daha az risklidir.

Weibull dağılımı kullanılarak deprem riskinin saptanmasına yönelik çalışmalarda görülen zaaflar dikkate alınarak gerçekleştirilen çözümleme sonrası inceleme alanında deprem riskinin son derece yüksek olduğu görülmüştür. Deprem ülkesi olan ülkemizde depremle yaşamanın gereklerini yapmanın zorunluluğu bu çalışma sonrası bir defa daha gözler önüne konulmuştur.

## KAYNAKLAR

A.ZENBİL El-Bashir (1991), *"Estimation Techniques For A Class Of Non-Regular Distributions: The Weibull Case."*, Doktora Tezi, ODTÜ.

Al- Fawzan MOHAMMAD A. (2000), ***"Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution"***, Email: mfawzan@kacst.edu.sa.

AL-BAİDHANİ, F. A. , and SİNCLAİR, C. D.,(1987), *"Comparison of methods of estimation of parameters of the Weibull distribution"*, Communications in Statistics, Part B--Simulation and Computation, 16,373-384.

ALTİNOK,Y., and KOLCAK, DEMİR ,(1999), *" An application of the semi-Markov model for earthquake occurances in North Anatolia, Turkey"*, Journal of the Balkan Geophysical Society, 2, 90-93.

BURY, K.V., (1975) . *Statistical Models in Applied Science*, John Wiley&Sons.

CAERS, J., BEİRLANT, J. and MAES, M.A., *"Statistics for modeling heavy Tailed disribution in Geology"*, Part I and II, Mathematical Geology, 31(4): 391-410 and 411-434.

DARGAHİ, G.R. ,(2002), *"The use modern statistical theories in the assesment of earthquake hazard, with aplication to quiet of eastern Nort America"*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 22, 361-369.

ELLİS, WAYNE C. , and TUMMALA, V. M. RAO ,(1986), *"Minimum expected loss estimators of the shape and scale parameters of the Weibull distribution"*, IEEE Transactions on Reliability, 35 , 212-213.

FLYGARE, MARK E. , AUSTİN, JOHN A. , and BUCKWALTER, ROSS M. ,(1985), *"Maximum likelihood estimation for the 2-parameter Weibull distribution based on interval-data"*, IEEE Transactions on Reliability, 34 , 57-59.

JEEN-HWA W., and CHİAO-HUİ K., (1998), *"On the frequency distribution of interoccurrence times of* earthquakes",Journal of Seismology, 2 (4): 351-358.

JAIMYOUNG K., KYOUNGWON M., PETER J. BICKEL, P., R. RENNE, (2002), *"Statistical Methods for Jointly Estimating the Decay Constant of $^{40}K$ and the Age of a Dating Standard"*, Mathematical Geology, 34 (4): 457-474.

KAYABALİ, K., and AKİN, M., (2003), *"Seismic hazard map of Turkey using the deterministic apporach"*, Engineering Geology, 69, 127-137.

KAPPENMAN, RUSSELL F., (1985), *"Estimation for the three-parameter Weibull, log-normal, and gamma distributions"*, Computational Statistics and Data Analysis, 3, 11-23.

KOLÇAK D.- ALTİNOK Y.- GÜNDOĞDU Y, *"Kuzey Anadolu Fay Zonunda Weibull Olasılık Dağılımı İle Deprem Riskinin Saptanması"*, Deprem Araştırma Bülteni, 76, 68-79

LEMON, GLEN H.,(1975), *"Maximum likelihood estimation for the three parameter Weibull distribution based on censored samples"*, Technometrics, 17 , 247-254.

AMBRASEYS , N. ,(1999), *"The* **earthquake** *of 10 July 1894 in the Gulf of Izmit (Turkey) and its relation to the* **earthquake** *of 17 August 1999"*, Journal of Seismology, 2 (4): 351-358.

RİKİTAKE, T.,(1975), *"Statistics of Ultimate Strain of the Earts Crust's and Probability of Earthquake Occurance"* , Tectonophysics, Vol.26, 1-21.

RİKİTAKE, T. ,(1999), *"Probability of a great earthquake to recur in the Tokai district, Japan: revaluation based on newly-developed paleoseismology, plate tectonics, tsunami study, micro-seismicity and geodetic measurements"*, Earth Planets Space, 51, 147-157.

SERGİO, G.,F., (2003), *"Probabilistic prediction of the next large earhquake in the Michoacan fault-segment of the Mexican subduction zone"*, Geofisica Internacional, 42, 69-81.

SERGİO, G., F., (2003), *"The conditional probability of* earthquake *occurrence and the next large* earthquake *in Tokyo, Japan,* "Journal of Seismology ,7 (2): 145-153.

SİNHA, S. K.,(1987)," *Bayesian estimation of the parameters and reliability function of a mixture of Weibull life distributions"*, Journal of Statistical Planning and Inference, 16 , 377-387.

ŞAHİN S. (2000) ***"İstatistiksel Kalite Kontrolünde Üstel ve Weibull Dağılımların X-Kontrol Grafiklerine Uygulanması Üzerine Teorik Bir Yaklaşım"***, Doktora Tezi- Cumhuriyet Üniversitesi.

V. F. PISARENKO and A. A. LYUBUSHIN, (1997), ***"Statistical estimation of maximum peak ground acceleration at a given point of a seismic region,*** "Journal of Seismology, 1 (4): 395-405.

W.Q. MEEKER and L.A. ESCOBAR, (1995), Statistical Methods for Reliability, John Wiley&Sons.

ZANAKİS, STELİOS H. , and KYPARİSİS, J., (1986) , ***" A review of maximum likelihood estimation methods for the three-parameter Weibull distribution",*** Journal of Statistical Computation and Simulation, 25, 53-73.

# The Use of Statistical Parameter Estimation Methods in the Calculation of the Parameters Weibull Distribution and the Application of Weibull Distribution to Earthquake Data

## ABSTRACT

*In this study , "Maximum Likelihod Method", "Least Squares Method" and "Method of Moments" which are the statistical parameter estimation methods of use in the calculation of the parameters Weibull distribution is being explained. We compare this methods in different sample sizes to show which one is the best and the results of this compare is used to apply the weibull distribution to earthquake dates.*

***Key Words:*** *Weibull Distibution, Maximum Likelihod Method, Least Squares Method Method Of Moments, Earthquake*