
	SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ <i>SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE</i>		
	e-ISSN: 2147-835X Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder		
	Geliş/Received 22-11-2016 Kabul/Accepted 01-04-2017	Doi 10.16984/saufenbilder.267557	

3-Boyutlu öklid uzayında bertrand eğriler ve bishop çatısı

Melek Masal¹, Ayşe Zeynep Azak^{2*1}

ÖZ

Bu çalışmada 1975 yılında L. R. Bishop tarafından tanımlanan Bishop çatısına ait eğriliklerin geometrik anlamları verildi. Daha sonra 1850 yılında Bertrand'ın tanımladığı Bertrand eğri çiftlerinin Bishop vektörleri arasındaki bağıntılar elde edildi. Ayrıca bu Bertrand eğri çiftlerinin paralel eğri olması durumunda bazı ilginç sonuçlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Bertrand eğriler, Bishop çatısı, Frenet çatısı, Öklid uzayı, paralel eğriler

Bertrand curves and bishop frame in the 3-dimensional euclidean space

ABSTRACT

In this paper, the geometric meanings of the curvatures belong to Bishop frame, which was defined by L.R. Bishop in 1975, has been given. Afterwards, the relations between the Bishop vectors of Bertrand curve couple, which Bertrand defined in 1850, has been obtained. Furthermore, some interesting results have been found when these curves become parallel curves.

Keywords: Bertrand curves, Bishop frame, Frenet frame, Euclidean space, parallel curves

¹ Sorumlu Yazar/Corresponding Author

¹Sakarya University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, 54300, Hendek, Sakarya mmasal@sakarya.edu.tr

²Sakarya University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, 54300, Hendek, Sakarya apirdal@sakarya.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Asli normalleri paralel olan eğriler Bertrand tarafından Bertrand eğrileri olarak tanımlanmıştır [4]. Son yıllarda, Bertrand eğrileri bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda (CAD) ve bilgisayar destekli üretimlerde (CAM) önemli bir rol oynamaktadır [16,19]. Bu öneminden ötürü Bertrand eğriler geometriciler tarafından farklı uzaylarda çalışılmıştır [2,3,8,12,14,17,20]. Diğer yandan paralel vektör alanlarına bağlı olarak 1975 yılında eğrilerin alternatif veya paralel çatısı olarak adlandırılan Bishop çatısı, Bishop tarafından tanımlanmış [5], böylece geometriciler bu çatı sayesinde Frenet çatısının tanımlanamadığı durumlar için (özellikle eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda) alternatif bir çatı olarak Bishop çatısını kullanmaya başladılar. Bishop çatısı ile ilgili yapılan makalelere örnek olarak [1,6,7,9,11,13,19,21] verilebilir.

Bizim bu çalışmamız ise iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Bishop eğriliklerinin, Frenet eğriliklerine benzer olarak, geometrik anlamları ifade edildi. İkinci kısımda ise Frenet çatısına göre tanımlanan Bertrand eğri çiftlerinin Bishop vektörleri ve yay parametreleri arasındaki bağıntılar ile Bertrand eğri çiftlerinin paralel eğri olması durumunda eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edildi.

2. ÖN HAZIRLIK (PRELIMINARIES)

E^3 de s yay parametresi ile verilen regüler bir C eğrisinin Frenet ve Bishop bileşenleri $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ ve $\{T, N_1, N_2, k_1, k_2\}$ olmak üzere C eğrisinin s yay parametresine göre Frenet ve Bishop formülleri, [5]

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \quad (1)$$

ve

$$\begin{aligned} T' &= k_1 N_1 + k_2 N_2 \\ N_1' &= -k_1 T \\ N_2' &= -k_2 T \end{aligned} \quad (2)$$

dır. C eğrisinin Frenet ve Bishop bileşenleri arasında

$$\begin{aligned} T &= C' \\ N &= \cos \theta N_1 + \sin \theta N_2 \\ B &= -\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2 \end{aligned} \quad (3)$$

ve

$$\begin{aligned} N_2 &= T \wedge N_1, \quad \tau(s) = \theta'(s), \\ \kappa(s) &= \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}. \end{aligned} \quad (4)$$

bağıntıları vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \kappa(s) \cos \theta(s) \\ k_2(s) &= \kappa(s) \sin \theta(s) \end{aligned} \quad (5)$$

Eğer C ve C^* uzay eğrilerinin karşılıklı noktalarında teğet vektörleri paralel ise (C, C^*) eğri çiftine paralel eğri çifti denir. [16].

3. BISHOP ÇATISINA GÖRE EĞRİLİKLERİN ANLAMI (MEANINGS OF THE CURVATURES ACCORDING TO BISHOP FRAME)

E^3 de bir C eğrisinin Bishop bileşenleri $\{T, N_1, N_2, k_1, k_2\}$ ise C eğrisinin Bishop çatısına göre normal uzayı onun T teğet vektör alanının ortogonal komplemanı T^\perp dir. Buna göre

$$T^\perp = \{X \in E^3 \mid \langle X, T \rangle = 0\} = S_p \{N_1, N_2\}.$$

C eğrisinin Bishop çatısına göre rektifiyan uzayı onun 1.normal vektör alanı N_1 in ortogonal komplemanı N_1^\perp olup

$$N_1^\perp = \{X \in E^3 \mid \langle X, N_1 \rangle = 0\} = S_p \{T, N_2\}.$$

C eğrisinin Bishop çatısına göre oskültör uzayı ise onun 2. binormal vektör alanının ortogonal komplemanı N_2^\perp

$$N_2^\perp = \{x \in E^3 \mid \langle X, N_2 \rangle = 0\} = S_p \{T, N_1\}.$$

C eğrisi E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. α eğrisini $s_0 \in I$ nın bir komşuluğunda Taylor serisine açarsak

$$\alpha(s) \cong \alpha(0) + s.\alpha'(0) + \frac{s^2}{2} \alpha''(0) + \frac{s^3}{6} \alpha'''(0) + \dots \quad (6)$$

dır, burada $s_0=0$ alınmıştır.

$\alpha(0)$ noktasındaki Bishop bileşenleri $\{T_0, N_{10}, N_{20}, k_{10}, k_{20}\}$ ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, (2) den

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= T_0 \\ \alpha''(0) &= k_{10}N_{10} + k_{20}N_{20} \\ \alpha'''(0) &= -(k_{10}^2 + k_{20}^2)T_0 + k'_{10}N_{10} + k'_{20}N_{20} \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir. (7) denklemleri (6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(0) + \left(s - (k_{10}^2 + k_{20}^2) \frac{s^3}{6} + \dots \right) T_0 \\ &+ \left(\frac{s^2}{2} k_{10} + \frac{s^3}{6} k'_{10} + \dots \right) N_{10} \\ &+ \left(\frac{s^2}{2} k_{20} + \frac{s^3}{6} k'_{20} + \dots \right) N_{20} \end{aligned} \quad (8)$$

bulunur. $s_0=0$ noktasının bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda ε un çok küçük bir değeri için

$s \neq 0, s^2 = s^3 = s^4 = \dots = 0$ olsun. Bu durumda

α nın bir $\hat{\alpha}$ parçası, (8) den

$$\hat{\alpha}(s) = \alpha(0) + s.T_0$$

olur. Bu ise bize α eğrisinin en iyi lineer yaklaşımını verir.

Şimdi ise $s_0=0$ noktasının öyle bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda eğrimizi ele alalım ki,

$s \neq 0, s^2 \neq 0, s^3 = s^4 = \dots = 0$ olsun. Bu

durumda α nın bir $\hat{\alpha}$ parçası, (8) den,

$$\hat{\alpha}(s) = \alpha(0) + sT_0 + \frac{s^2}{2} k_{10}N_{10} + \frac{s^2}{2} k_{20}N_{20}$$

bulunur. $\hat{\alpha}$ eğrisine α eğrisinin Bishop yaklaşımı denir.

Buradan $k_{10}=0$ olması halinde eğrinin $\{T_0, N_{20}\}$ in gerdiği alt uzayda, $k_{20}=0$ olması halinde

eğrinin $\{T_0, N_{10}\}$ in gerdiği alt uzayda, $k_{10}=0$ ve $k_{20}=0$ olması halinde eğrinin bir doğru (teğet doğrusu) olduğu söylenebilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 1. E^3 de bir C eğrisinin

i) Birinci Bishop eğriliği sıfır ise eğri Bishop çatısına göre rektifyan uzayda yatar.

ii) İkinci Bishop eğriliği sıfır ise eğri Bishop çatısına göre oskülütör uzayda yatar.

iii) Birinci ve ikinci Bishop eğrilikleri sıfır ise eğri teğet doğrusu ile çakışıktır.

4. BERTRAND EĞRİLERİ (BERTRAND CURVES)

Yay-parametreleri s ve s^* olan C ve C^* birim hızlı regüler eğrilerinin Frenet bileşenleri

$\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*, \kappa^*, \tau^*\}$, Bishop

bileşenleri $\{T, N_1, N_2, k_1, k_2\}$ ve

$\{T^*, N_1^*, N_2^*, k_1^*, k_2^*\}$ olsun.

Tanım 1. C ve C^* eğrilerinin asli normal vektörleri lineer bağımlı ise (C, C^*) eğri çiftine Bertrand eğri çifti denir. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise,

$$C(s) = C^*(s^*) + \lambda(s^*)N^*(s^*) \quad \text{ve} \quad \lambda = sb \text{ dir.}$$

(C, C^*) Bertrand eğri çiftlerinin teğetleri T ve T^* arasındaki açı α ise

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} \quad (9)$$

yazılabilir.

Ayrıca (C, C^*) eğri çiftinin Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ için $\lambda_1\kappa + \lambda_2\tau = 1$ olmasıdır, [10].

Teorem 2. (C, C^*) E^3 de Bertrand eğri çifti ise Bishop vektörleri arasında

$$\begin{aligned}
 T^* &= \cos \alpha T + \sin \alpha \sin \theta N_1 - \sin \alpha \cos \theta N_2 \\
 N_1^* &= (-\sin \theta^* \sin \alpha)T \\
 &\quad + (\cos \theta^* \cos \theta + \sin \theta \sin \theta^* \cos \alpha)N_1 \\
 &\quad + (\sin \theta \cos \theta^* - \sin \theta^* \cos \theta \cos \alpha)N_2 \\
 N_2^* &= (\cos \theta^* \sin \alpha)T \\
 &\quad + (\sin \theta^* \cos \theta - \cos \theta^* \sin \theta \cos \alpha)N_1 \\
 &\quad + (\sin \theta^* \sin \theta + \cos \theta^* \cos \theta \cos \alpha)N_2
 \end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

İspat. (C, C^*) E^3 de Bertrand eğri çifti ise (3) ve (9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T^* \\ N_1^* \\ N_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^* & -\sin \theta^* \\ 0 & \sin \theta^* & \cos \theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 T^* &= \cos \alpha T + \sin \alpha \sin \theta N_1 - \sin \alpha \cos \theta N_2 \\
 N_1^* &= (-\sin \theta^* \sin \alpha)T \\
 &\quad + (\cos \theta^* \cos \theta + \sin \theta \sin \theta^* \cos \alpha)N_1 \\
 &\quad + (\sin \theta \cos \theta^* - \sin \theta^* \cos \theta \cos \alpha)N_2 \\
 N_2^* &= (\cos \theta^* \sin \alpha)T \\
 &\quad + (\sin \theta^* \cos \theta - \cos \theta^* \sin \theta \cos \alpha)N_1 \\
 &\quad + (\sin \theta^* \sin \theta + \cos \theta^* \cos \theta \cos \alpha)N_2
 \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1. (C, C^*) Bertrand eğri çifti aynı zamanda paralel eğri çifti ise Bishop vektörleri arasında,

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N_1^* \\ N_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta^* - \mu\theta) & -\mu \sin(\theta^* - \mu\theta) \\ 0 & \sin(\theta^* - \mu\theta) & \mu \cos(\theta^* - \mu\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

bağıntıları vardır. Burada

$$\mu = \begin{cases} +1, & \alpha = 0 \text{ için} \\ -1, & \alpha = \pi \text{ için} \end{cases}$$

dır.

İspat. (C, C^*) Bertrand eğri çifti aynı zamanda paralel eğri çifti ise $\alpha = 0$ veya $\alpha = \pi$ 'dir.

Bu durumda Teorem 2 den C ve C^* Bishop vektörleri arasında

$$\begin{aligned}
 T^* &= \mu T \\
 N_1^* &= \cos(\theta^* - \mu\theta)N_1 - \mu \sin(\theta^* - \mu\theta)N_2 \\
 N_2^* &= \sin(\theta^* - \mu\theta)N_1 + \mu \cos(\theta^* - \mu\theta)N_2
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem3. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise

$$\cos \alpha \frac{ds}{ds^*} = 1 - \lambda \kappa^*$$

dır. Burada λ sabittir.

İspat. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise

$$C(s) = C^*(s^*) + \lambda N^*(s^*), \quad \lambda = sb \text{ 'dir.}$$

Bu eşitliğin her iki tarafının s^* a göre türevi alınırsa, (2) den,

$$\begin{aligned}
 T \frac{ds}{ds^*} &= (1 - \lambda \kappa^*)T^* + (-\lambda \tau^* \sin \theta^*)N_1^* \\
 &\quad + (\lambda \tau^* \cos \theta^*)N_2^*
 \end{aligned} \tag{10}$$

elde edilir. (10) denkleminin her iki tarafının T^* ile iç çarpımı alınırsa,

$$\cos \alpha \frac{ds}{ds^*} = 1 - \lambda \kappa^*$$

elde edilir.

Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 2. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise

$$s^* + c_1 = \int \cos \alpha ds + \lambda \int \kappa^* ds^*$$

dır. Burada c_1 integrasyon sabitidir.

Teorem4. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise

$$\sin \alpha \frac{ds}{ds^*} = \lambda \tau^*$$

dır. Burada λ sabittir.

İspat. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise (10)

denkleminin her iki tarafının N_1^* ile iç çarpımı alınırsa,

$$\sin \alpha \frac{ds}{ds^*} = \lambda \tau^*, \quad \lambda = sb$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç3. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise

$$\lambda \theta^* + c_2 = \int \sin \alpha ds$$

dır. Burada c_2 integrasyon sabitidir.

Teorem5. (C, C^*) Bertrand eğri çifti paralel eğri çifti ise

$$\kappa^* = -\mu\kappa \frac{ds}{ds^*} \quad \text{ve} \quad \tau^* = \mu\tau \frac{ds}{ds^*}$$

dır.

İspat. (C, C^*) Bertrand eğri çifti olduğundan

$N = N^*$ alınabilir. Her iki tarafın s^* a göre türevi alınır, (1) ve (3) denklemlerinden

$$-\kappa \frac{ds}{ds^*} T - \tau \frac{ds}{ds^*} \sin \theta N_1 + \tau \frac{ds}{ds^*} \cos \theta N_2 =$$

$$-\kappa^* T^* - \tau^* \sin \theta^* N_1^* + \tau^* \cos \theta^* N_2^*$$

elde edilir. Sonuç 1 den

$$\kappa^* = -\mu\kappa \frac{ds}{ds^*} \quad \text{ve} \quad \tau^* = \mu\tau \frac{ds}{ds^*}$$

bulunur.

REFERENCES

- [1] E. As, A. Sarioğlugil, “On the Bishop curvatures of involute-evolute curve couple in E^3 ”, *International Journal of Physical Sciences*, vol. 9, no. 7, pp. 140-145, 2014.
- [2] H. Balgetir, M. Bektaş, J. Inoguchi, “Null Bertrand curves and their characterizations”, *Note di Matematica*, vol. 23, no. 1, pp. 7-13, 2004.
- [3] H. Balgetir, M. Bektaş, M. Ergüt, “Bertrand curves for nonnull curves in three dimensional Lorentzian space”, *Hadronic Journal*, vol. 27, pp. 229-236, 2004.
- [4] J. Bertrand, “La theories de courbes a double courbure”, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, vol. 15, pp. 332-350, 1850.
- [5] L. R Bishop, “There is more than one way to frame a curve”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, no. 3, pp. 246-251, 1975.
- [6] B. Bükcü, M. K Karacan., “Special Bishop motion and Bishop darboux rotation axis of the space curve”, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, vol. 6, no. 1, pp. 27-34, 2008.
- [7] B. Bükcü, M. K. Karacan, “The slant helices according to Bishop frame”, *International Journal of Computer and Mathematical Science*, vol. 3, no. 2, pp. 67-70, 2009.
- [8] J. H. Choi, T. H. Kang, Y. H. Kim, “Bertrand curves in 3-dimensional space forms”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 3, pp. 1040-1046, 2012.
- [9] M. Çetin, Y. Tunçer, M. K.. Karacan, “Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space”, *General Mathematics Notes*, vol. 20, no. 2, pp. 50-66, 2014.
- [10] M. P. Do Carmo, “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Prentice-Hall, Saddle River, New Jersey, 1976.
- [11] R. Ghadami, Y. Yaylı, “A new characterization for inclined curves by the

- help of spherical representations according to Bishop frame”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 74, no. 4, pp. 455-463, 2012.
- [12] S. Izumiya, N. Takeuchi, “Generic properties of helices and Bertrand curves”, *Journal of Geometry*, vol. 74, pp. 97-109, 2002.
- [13] T. Körpınar, V. Asil, S. Baş., “On characterization inextensible flows of curves according to Bishop frame”, *Notas de Matematica*, vol. 7(1), no. 302, pp. 37-45, 2011.
- [14] P. Lucas, J. A. Ortega-Yagües, “Bertrand curves in the three-dimensional sphere”, *Journal of Geometry and Physics*, vol. 62, no. 9, pp. 1903-1914, 2012.
- [15] A. W. Nutbourne, R. R. Martin, “Differential geometry applied to the design of curves and surfaces”, Ellis Horwood, Chichester, UK, 1988.
- [16] B. O’Neill, “Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity”, Academic Press, New York, 1983
- [17] A. O. Öğrenmiş, H. Öztekin, M. Ergüt, “Bertrand curves in Galilean space and their characterizations”, *Kragujevac Journal of Mathematics*, vol. 32, pp. 139-147, 2009.
- [18] S. G. Papaioannou., D. Kiritsis, “An application of Bertrand curves and surface to CAD/CAM”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 17, no. 8, pp. 348-352, 1985.
- [19] D. Ünal, İ. Kişi, M. Tosun, “Spinor Bishop equations of the curves in Euclidean 3-space”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 23, no. 3, pp. 757-765, 2013.
- [20] M. Y. Yılmaz, M. Bektaş, “General properties of Bertrand curves in Riemann–Otsuki space”, *Nonlinear Analysis*, vol. 69, no. 10, pp. 3225-3231, 2008.
- [21] S. Yılmaz, E. Özyılmaz, M. Turgut, “New spherical indicatrices and their characterizations”, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, vol. 18, no. 2, pp. 337-354, 2010.