DOĞRUSAL FARK DENKLEMLERİ (*)

Tuncer BULUTAY

Bu çalışmamızda dinamik iktisat tahlilinde önemli bir yer tutan doğrusal fark denklemleri üzerinde durmak istiyoruz.

Dört kısımdan ibaret bulunan incelememizin ilk kısmında bazı tanımlar vermekte, genel kavramlar üzerinde durmaktayız.

Bir fark denkleminin genel çözümü, homojen çözümle, özel çözümün birbirlerine eklenmesi yoluyla elde edildiği için, çalışmamızın ikinci kısmına konu olarak homojen eşitliğin çözümünü alıyoruz.

Üçüncü kısım fark denklemlerinin özel çözümünü kapsıyor.

Son kısımda, genel çözümün bir arada gösterilmesine imkân verdikleri için, teorik ve iktisadî özellklerini fazla incelemeden, iki iktisadî dalgalanmalar nazariyesini misal olarak veriyoruz.

I

İsminden de anlaşılacağı üzere, fark denklemleri farklılıkların bahis konusu oldukları bir bağıntıyı ifade etmektedirler. Bu bakımdan, fark denklemi, bağımsız değişkenle fonksiyon ve bu fonksiyonun bir veya daha fazla farklılıkları arasındaki ilişkiyi gösteren bir eşitlik olarak tanımlanabilir.

$$F_o(t)\,Y(t+n) + F_1(t)\,Y(t+n-1) + \ldots + F_n(t)\,Y(t) = f(t) \ldots (1)$$

şeklinde yazılabilen bir fark denkleminde F_o, F_1, F_n, ve f yalnız-

---

(*) Bu çalışmayı okuyup, faydalı tenkitlerde bulunan kardeşim Attila Bulutay'a teşekkür ederim.

ca t nin fonksiyonu iseler (Y(t) nin fonksiyonu değilseler) bu eşitlik doğrusal fark denklemidir. (1).

Meselâ,

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) = 4$$

doğrusal bir fark denklemi olduğu halde,

$$YtY(t+2) - [Y(t)]^2 = 3$$

doğrusal bir fark denklemi değildir.

Katsayıları sabitlerden meydana gelen doğrusal fark denklemi, sabit katsayılı doğrusal fark eşitliği adını alır. Genel olarak

$$a_0 \; Y(t+n) + a_1 \; Y(t+n-1) + \ldots\ldots + a_n \; Y(t) = f(t) \ldots\ldots (2)$$

şeklinde gösterilebilen sabit katsayılı doğrusal fark eşitliğinde f(t) nin sabit olması gerekliliği yoktur.

$$3Y(t+2) - Y(t+1) + 4Y(t) = 3$$
$$Y(t+1) - Y(t) = 3^x$$

denklemleri, sabit katsayılı doğrusal fark eşitliklerinin örnekleridirler.

Yukarda gösterilen (2) sabit katsayılı doğrusal fark eşitliğinin sağ tarafında f(t) nin yerine sıfırın yer alması sabit katsayılı doğrusal homojen fark eşitliğini ortaya çıkarır. Yani

$$a_0 \; Y(t+n) + a_1 \; Y(t+n-1) + \ldots\ldots + a_n \; Y(t) = 0 \ldots\ldots (3)$$

denklemi, (2) de genel formülü verilen sabit katsayılı doğrusal fark eşitliğinin homojen formudur.

Bir fark eşitliği içersinde bulunan en büyük fark, o eşitliğin sırasını gösterir. Böylece, eşitlik taşıdığı farka göre, birinci sıra, ikinci sıra, v.s. fark eşitliği adını alır. Aşağıdaki denklemlerde, parantez içinde sıraları gösterilmiştir:

$$3Y(t+3) + 2Y(t+2) - 4Y(t+1) + Y(t) = 3 \ldots\ldots (\text{sıra } 3)$$
$$Y(t+1) - Y(t) = 3a \qquad (\text{sıra } 1)$$

Biz, bu çalışmamızda yalnızca sabit katsayılı doğrusal fark

(1) Samuel Goldberg, Introduction to difference equations, s. 53-54.

denklemi üzerinde duracağız. Bu denklemin çözümünü elde etmek için, bahis konusu eşitliğin sağ tarafını sıfıra eşit kılmak suretiyle elde olunan homojen eşitliğin çözümü ile, denklemin sağ tarafındaki fonksiyonun mahiyetine göre bulunacak özel çözümü birbirine eklemek gerekecektir.

Evvelâ homojen eşitliğin çözümü üzerinde duracak, sonra özel çözümü incelemeye çalışacağız.

II

1. HOMOJEN EŞİTLİĞİN ÇÖZÜMÜ :

Yukarda tanımını verdiğimiz homojen denklemin çözümünü elde etmek için $Y_t = x^t$ yi deneyeceğiz. Bunun kullanılması halinde (3) numaralı formül şu hali alır :

$$a_0 x^{t+n} + a_1 x^{t+n-1} + \ldots\ldots + a_n x^t = 0$$

$$x^t (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n) = 0$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

Yardımcı ya da karakteristik adını alan bu eşitliğin kökleri (3) ün çözümünü vereceklerdir. Böylece, çözüm

$$Y(t) = C_1 x_1^{\,t} + \ldots\ldots + C_n x_n^{\,t}$$

şeklinde gösterilebilecektir. (2)

(2) Bu çözümde C_1, C_n gibi sabitlerin yer almasını ispatlamalıyız.

$$Y(t+2) + AY(t+1) + BY(t) = 0$$

eşitliğini alalım. İspatlıyacağımız husus, x_1^t ve x_2^t yukarıki denklemin çözümü ise $C_1 x_1^t + C_2 x_2^t$ nin de bu eşitliğin çözümü olduğudur. Yani, aşağıdaki eşitliğin bir özdeşlik olduğunu göstermeliyiz.

$$(C_1 x_1^{t+2} + C_2 x_2^{t+2}) + A\,(C_1 x_1^{t+1} + C_2 x_2^{t+1}) + B\,(C_1 x_1^{t} + C_2 x_2^{t}) = 0$$

$$C_1 (x_1^{t+2} + A x_1^{t+1} + B x_1^{t}) + C_2 (x_2^{t+2} + A x_2^{t+1} + B x_2^{t}) = 0$$

parantezdekiler başlangıçtaki faraziye gereği (x_1^t ve x_2^t nin çözüm oldukları faraziyesi) sıfıra eşittirler. O halde, yukarki eşitliğin bir özdeşliği ifade etti-

Bu söylediklerimizi, ilk önce birinci sıra, sonra ikinci sıra doğrusal homojen fark denklemlerini inceliyerek, uygulamaya çalışacağız (3).

A. Sabit katsayılı birinci sıra doğrusal homojen fark denklemi :

Birinci sıra bir fark eşitliği içinde ancak bir fark bulunduracaktır. Genel olarak, bahsi geçen denklem şu şekilde gösterilebilir:

$$Y(t+1) - AY(t) = 0 \qquad (4)$$

Çözümde yukarda anlatılan usul uygulanacaktır. $Y(t) = x^t$ yi kullandığımızda (4) şu şekli alır :

$$x^{t+1} - A\,x^t = 0$$
$$x^t\,(x - A) = 0$$
$$x = A$$

Böylece, eşitliğin çözümü (sabiti de nazara almak gerekeceği için) aşağıdaki şekli alacaktır :

$$Y(t) = C\,A^t$$

İki misalle bu çözümü aydınlatmaya çalışalım :

Misal 1.

$$Y(t+1) - 4Y(t) = 0$$
$$x - 4 = 0$$
$$x = 4$$
$$Y(t) = C\;4^t$$

Misal 2.

$$Y(t+1) + 3Y(t) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$Y(t) = C\;(-3)^t$$

ği gösterilmiş olur. Böylece, $C_1 x_1^t + C_2 x_2^t$ ikinci sıra fark eşitliğinin çözümünü ifade eder.

Ayni yolla n sıra bir fark eşitliği için ispatlama verilebilir.

(3) Üçüncü ve daha yüksek sıra eşitliklerde benzer bir yol uygulanacaktır. Fakat bu eşitliklerin yüksek derecesi dolayısiyle çözümün elde edilmesi güçlüğü artacaktır.

B. Sabit katsayılı ikinci sıra doğrusal homojen fark denklemi:

İçindeki en büyük farkın iki olduğu fark eşitliği bahis konusudur burada. Birinci sıra fark eşitliğinde olduğu gibi, burada da yardımcı (karakteristik) bir eşitlik bulmak yoluyla çözüme ulaşılacaktır. İkinci sıra eşitlik şu şekilde gösterilebilir:

$$Y(t+2) + AY(t+1) + BY(t) = O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$Y(t) = x^t$ kullanalım. Sözü edilen (5) numaralı denklem şu şekli alır:

$$x^{t+2} + A x^{t+1} + B x^t = O$$
$$x^t (x^2 + Ax + B) \quad = O$$

Böylece bulunan, $x^2 + Ax + B$ şeklindeki yardımcı eşitliğin kökleri elde olunarak çözüme ulaşılır.

Elde olunacak çözüm köklerin değerine dayanacaktır. Bunun için kök değerlerine göre, farklı haller ayırıp incelemek uygun düşecektir.

a) Köklerin gerçek ve ayrı olmaları $(A^2 > 4B)$ hali:
Bu halde çözüm

$$Y(t) = C_1 x_1^{\,t} + C_2 x_2^{\,t}$$

şeklinde ifade olunacaktır. (4) İki misal verelim:

Misal 1.

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 4Y(t) = O$$
$$x^2 - 5x + 4 = O$$
$$x_1 = 4 \qquad x_1 = 1$$
$$Y(t) = C_1 x_1^{\,t} + C_2 x_2^{\,t} = C_1 1^t + C_2 4^t = C_1 + C_2 4^t$$

Misal 2.

$$Y(t+2) - Y(t+1) - 6Y(t) = O$$
$$x^2 - x - 6 = O$$
$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$$
$$Y(t) = C_1 (-2)^t + C_2 3^t$$

(4) C_1 ve C_2 sabitleri, Y_0, Y_1 başlangıç değerleri verildiği takdirde bulunabilir.

b) Köklerin gerçek ve birbirlerine eşit olmaları ($A = 4B$) hali:

Bu halde çözüm

$$Y(t) = C_1 x^t + C_2 t x^t = (C_1 + C_2 t)\, x^t$$

şeklinde ifade edilebilir. (5) (6) İki misal verelim:

Misal 1.

$$Y(t+2) - 6Y(t+1) + 9Y(t) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 3$$

$$Y(t) = C_1 3^t + C_2 t\, 3^t = (C_1 + C_2 t)\, 3^t$$

---

(5) Kökler birbirlerine eşit oldukları takdirde $Y(t) = tx^t$ nin bir çözüm olduğunu göstermeğe çalışalım :

$$Y(t+2) + AY(t+1) + BY(t) = 0$$

Bu denklemde $Y(t) = tx^t$ yi kullanarak şu eşitliğe ulaşırız:

$$(t+2)\, x^{t+2} + A(t+1)\, x^{t+1} + Btx^t = 0 \;\ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots\ldots\; (K)$$

Bu eşitliğin bir özdeşlik olduğunu, yani denklemin sol tarafının sıfıra eşit bulunduğunu göstermemiz gerek. (K) şöyle yazılabilir :

$$tx^{t+2} + 2x^{t+2} + Atx^{t+1} + Ax^{t+1} + Btx^t = 0$$

$$tx^t (x^2 + Ax + B) + x^{t+1} (2x + A) = 0$$

x, yardımcı eşitliğin kökü olduğu için ilk parantez sıfıra eşittir. İkinci derece bir eşitliğin kökleri toplamı, x in katsayısının x^2 nin katsayısına bölümünün eksi işaretlisine eşit olacağı için, incelemekte olduğumuz eşitlikte (—A) iki kökün toplamını verecektir. Fakat, x kök olduğu, ve kökler birbirlerine eşit bulunacakları için (2x) de iki kökün toplamına eşittir. O halde, ikinci parantez de sıfıra eşittir.

Böylece, (K) nın bir özdeşliği ifade ettiği, yani sol tarafının sıfıra eşit bulunduğu gösterilmiş olur. $Y(t) = tx^t$ nin bir çözüm olduğu da ortaya çıkmış olur.

(6) Üçüncü derecede bir yardımcı denklemin köklerinin birbirlerine eşit bulunmaları halinde, çözüm, $Y(t) = C_1 x^t + C_2 tx^t + C_3 t^2 x^t$ olacaktır. Daha

Misal 2.

$$Y(t+2) + 2Y(t+1) + Y(t) = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x_1 = x_2 = -1$$
$$Y(t) = C_1 (-1)^t + C_2\, t\, (-1)^t = (C_1 + C_2 t)(-1)^t$$

c) Köklerin karmaşık (kompleks) olması ($A^2 < 4B$) hali:

Bu halde, yardımcı eşitliğin kökleri karmaşık sayı (7) olacak, çözüm şu şekilde ifade olunacaktır:

$$Y(t) = C_1 (x+iy)^t + C_2 (x-iy)^t$$

Bunun diğer bir ifadesi de

$$Y(t) = Ar^t \operatorname{Cos}(\theta t - B)$$ dir. (8) İki misal verelim:

---

(7) Bilindiği gibi, ikinci derece denklemlerde $b^2 - 4ac < 0$ olduğu zaman köklerin karmaşık sayı olarak ifade edilmeleri zorunluluğu vardır. Bunun için (i) ile ifade olunan hayalî rakamlardan yararlanılır. ($i^2 = -1$ dir.) Böyle bir denklemin kökleri $x + yi$, $x - yi$ şeklinde ifade olunabilirler. (burada x ve y gerçek sayıları, i hayalî sayıyı ifade eder.) $x + yi$ ve $x - yi$ sayılar birbirlerine eşleniktirler. (Complex conjugate)

(8) Bu sonucun çıkarılmasında trigonemetri ve karmaşık sayılar üzerine yazılmış kitaplarda bulunabilen aşağıdaki formüllerden yararlanılmıştır:

$$x + yi = r\,(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sin}\theta)$$
$$x - yi = r\,(\operatorname{Cos}\theta - i\operatorname{Sin}\theta)$$
$$e^{i\theta} = \operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sin}\theta$$
$$e^{-i\theta} = \operatorname{Cos}\theta - i\operatorname{Sin}\theta$$

$$(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sin}\theta)^n = \operatorname{Cos} n\theta + i\operatorname{Sin} n\theta$$
$$\operatorname{Cos}(x-y) = \operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y + \operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}y$$

Şu işlemler yapılmıştır:

$$Y(t) = C_1 (x+yi)^t + C_2 (x-yi)^t$$
$$= C_1 [r(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sin}\theta)]^t + C_2 [r \operatorname{Cos}\theta - i\operatorname{Sin}\theta)]^t$$
$$= r^t [C_1 (\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sin}\theta)^t] + r^t [C_2 (\operatorname{Cos}\theta - i\operatorname{Sin}\theta)^t]$$
$$= r^t [C_1 (\operatorname{Cos}t\theta + i\operatorname{Sin}t\theta)] + r^t [C_2 (\operatorname{Cos}t\theta - i\operatorname{Sin}t\theta]$$
$$= r^t [(C_1 + C_2)(\operatorname{Cos}t\theta) + i(C_1 - C_2)(\operatorname{Sin}t\theta)]$$

$C_1 + C_2 = A_1$, $i(C_1 - C_2) = A_2$ dersek yukardaki eşitlik şu hali alır:

Misal 1. (9)

$$Y(t+2) + Y(t) = 0$$
$$a^2 + 1 = 0$$
$$a^2 = -1 = i^2$$
$$a_1 = -i \qquad a_2 = i$$

$i = 0 + 1i$ şeklinde gösterilebildiği için $x = 0$, $y = 1$ dir. Çözüm şu şekilde yazılabilir :

$$Y(t) = C_1 (i)^t + C_2 (-i)^t$$

İkinci şekil bir ifadeye ulaşmak için şu işlemlerin yapılması gereklidir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$r \sin \theta = y = 1 \qquad \sin \theta = 1$$
$$r \cos \theta = x = 0 \qquad \cos \theta = 0$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \infty$$

Sinüsü 1, Kosinüsü 0 olan açı olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınabilir. Şu halde, ikinci şekilde ifade şöyle olacaktır.

$$Y(t) = r^t [A_1 (\cos t\theta) + A_2 (\sin t\theta)] \quad \text{.........................} \quad (M)$$

$A_1 = A \cos B \qquad A_2 = A \sin B$ diyelim.

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \tan B = \frac{A_2}{A_1}$ elde edilir.

Bunların kullanılması ile (M) şu şekli alır :

$$Y(t) = r^t \; [\cos t\theta \, A \cos B + \sin t\theta \, A \sin B]$$
$$= Ar^t \; (\cos t\theta \cos B + \sin t\theta \sin B)$$
$$= Ar^t \; \cos(t\theta - B)$$

Not: A_1, A_2 (A) ve B nin değerleri Y_0, Y_1 gibi başlangıç değerlerinden elde edilir. $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ oldukları için r ve θ nin değerleri, x ve y den çıkarılabilirler.

Yukarki eşitliklerden şu sonuçlar kolaylıkla elde olunabilirler:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

(9) Bu misal için bak. Samuel Goldberg, Ad. G. E. (S. 135-140)

$$Y(t) = A\ (1)^t\ \mathrm{Cos}\ (\frac{\pi}{2}\ t - B)$$

$$= A\ \ \mathrm{Cos}\ (\frac{\pi}{2}\ t - B)$$

Misal 2. (10)

$$Y(t+2) - 2Y(t+1) + 2Y(t) = 0$$

$$a^2 - 2a + 2 = 0$$

$$a_1 = 1 + 1i \qquad a_2 = 1 - 1i$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$Y(t) = C_1\ (1 + 1i)^t + C_2\ (1 - 1i)^t$$

Diğer şekilde bir ifade için şu işlemler yapılmalıdır:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \tan \theta = 1$$

Tanjantı 1 olan açı $\frac{\pi}{4}$ olarak alınabildiği için $\theta = \frac{\pi}{4}$ şeklinde yazılabilir.

Böylece, ikinci şekil şöyle ifade edilebilir:

$$Y(t) = A\ (\sqrt{2})^t\ \mathrm{Cos}\ (t\ \frac{\pi}{4} - B)$$

III

Yukarda da işaret olunduğu gibi sabit katsayılı fark eşitliğinin genel çözümüne ulaşmak için, homojen eşitliğin çözümü ile özel çözümün birbirlerine eklenmesi gerekir. Yukarda homojen eşitliğin çözümü incelendiği için, şimdi özel çözümün bulunması konusu incelenmeye çalışılacaktır.

Sabit katsayılı fark eşitliğinin özel çözümü, denklemin sağında yer alan fonksiyonun mahiyetine göre bulunur. Bunun çıkarılışını, önce birinci sıra, sonra ikinci sıra eşitlik üzerinde durarak görmeye çalışalım:

---

(10) Bu misal için bak, R.G.D. Allen, Mathematical Economics, (S. 194)

A. Sabit katsayılı birinci sıra fark eşitliği :

Bu eşitlik şu şekilde gösterilebilir :

$$Y(t+1) - AY(t) = B \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

Burada A ve B sabittirler.

Bu denklemin özel çözümünü aşağıdaki formül ifade eder: (11)

$$Y(t) = \begin{cases} B \dfrac{1-A^t}{1-A} & A \neq 1 \\ Bt & A = 1 \end{cases} \quad \text{ise}$$

Misal.

$$Y(t+1) - 3Y(t) = 2$$

Burada A = 3 B = 2 oldukları için özel çözüm şu şekilde ifade olunabilir :

$$Y(t) = 2 \frac{1-3^t}{1-3}$$

Genel çözüm ise

$$Y(t) = C\,3^t + 2 \frac{1-3^t}{1-3}$$

şeklinde gösterilebilir.

B. Sabit katsayılı ikinci sıra fark eşitliği :

Bu eşitliğin özel çözümü, denklemin sağ tarafında yer alan f(t) fonksiyonunun mahiyetine dayanacaktır. f(t) nin aldığı bazı çeşitlere göre, özel çözümü, bu halleri ayrı ayrı inceleyerek bulmıya çalışalım :

---

(11) Bu formül şu şekilde elde olunur: t = o değerini verirsek (6) şu şekli alır: $Y(1) = AY(O) + B$

t ye 1, 2 değerleri verilerek şöyle devam olunabilir:

1. f(t) nin sabit olması hali :

Bahsi edilen sabiti (L) ile gösterirsek, özel çözüm şu şekilde bulunabilir :

$$k = \frac{L}{a_o + a_1 + \ldots + a_n}$$

$a_o, a_1, \ldots\ldots a_n$ eşitliğin katsayılarıdır. (12)

$$\begin{aligned} Y(2) = AY(1) + B &= A(AY(O) + B) + B \\ &= A^2 Y(O) + AB + B \\ Y(3) = AY(2) + B &= A(A^2 Y(O) + AB + B) + B \\ &= A^3 Y(O) + A^2 B + AB + B \end{aligned}$$

Bu işleme t ye kadar devam edilirse,

$$Y(t) = A^t Y(O) + (A^{t-1} + A^{t-2} + \ldots\ldots\ldots + A + 1)\, B$$

elde olunur.

$S(t) = 1 + A + A^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A^{t-1}$ diyelim

$A S(t) = A + A^2 + A^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A^t$ olur.

$S(t) - A s(t) = 1 - A^t \qquad S(t)(1 - A) = 1 - A^t$

$$S(t) = \frac{1 - A^t}{1 - A}$$ elde olunur.

Böylece

$$Y(t) = A^t Y(O) + B \frac{1 - A^t}{1 - A^t} \qquad \text{eğer } A \neq 1 \text{ ise}$$

$$Y(t) = Y(O) + Bt \qquad \text{eğer } A = 1 \text{ ise}$$

Y (O) yerine sabiti ifade eden C nin konulması halinde

$$Y(t) = C A^t + B \frac{1 - A^t}{1 - A^t} \qquad \text{eğer } A \neq 1 \text{ ise}$$

$$Y(t) = C + Bt \qquad \text{eğer } A = 1 \text{ ise}$$

elde olunur.

Bu formül sabit katsayılı birinci sıra fark eşitliğinin genel çözümünü verecektir. Yukarda gösterildiği gibi CA^t homojen eşitliğin çözümü olduğu için

$$Y(t) = \begin{cases} B \dfrac{1 - A^t}{1 - A} & A \neq 1 \\ Bt & A = 1 \end{cases}$$

bahsi geçen fark eşitliğinin özel çözümünü ifade eder.

(12) İncelemekte olduğumuz eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilir :

Misal.

$$Y(t+2) - 2Y(t+1) + 5Y(t) = 16$$

$$k = \frac{16}{1 - 2 + 5} = 4$$

Bu özel çözüm, yukardaki denklemin homojen eşitliğinin çözümüne eklendiğinde genel çözüme ulaşılır.

Burada, a_o, a_1, ... , a_n nin toplamının sıfıra eşit çıkması halinde, k nin kullanılmasının bizi çözüme ulaştırmıyacağına işaret etmemiz gerekir. (13). Böyle bir durum belirdiğinde k nın değil kt nin kullanılması zorunluluğu vardır. Meselâ

$$Y(t+2) + 3Y(t+1) - 4Y(t) = 8$$

denkleminin özel çözümünü elde etmeye çalıştığımızda kt yi kullanmalıyız. Eşitlik şu şekli alır:

$$k(t+2) + 3k(t+1) - 4k(t) = 8$$

$$5k = 8 \qquad k = \frac{8}{5}$$

Böylece, $kt = \frac{8}{5}t$ özel çözüm olarak bulunur. (14)

$$a_o Y(t+n) + a_1 Y(t+n-1) + \dots\dots + a_n Y(t) = L$$

Y(t+n), Y(t+n—1), Y(t) yerine k koyalım. Yukardaki denklem şu hali alır:

$$a_o k + a_1 k + \dots\dots + a_n k = L$$

$$k(a_o + a_1 + \dots\dots + a_n) = L$$

$$k = \frac{L}{a_o + a_1 + \dots\dots + a_n}$$

(13) Meselâ,

$$\begin{array}{lccccc} & Y(t+2) & + 3Y(t+1) & - 4Y(t) & = 8 \\ \text{eşitliğinde} & k & + 3k & - 4k & = 8 \\ & & 0 = 8 & & \end{array}$$

gibi anlamsız bir durum ortaya çıkacaktır.

(14) kt nin kullanılmasında da anlamsız bir durumun ortaya çıkması halinde kt^2 yi

2. f(t) nin A^t (A sabit) olması hali :

Bu halde $Y(t) = CA^t$ nin denenmesi ile özel çözüme varılmaya çalışılacaktır. (15) Bunu bir misal ile açıklamaya çalışalım :

$$Y(t+2) - 3Y(t+1) + 2Y(t) = 4^t$$

$Y(t) = C4^t$ yi koyalım. Eşitlik şu şekli alır :

$$C4^{t+2} - 3C\,4^{t+1} + 2C4^t = 4^t$$

$$C4^t\,(4^2 - 3.4 + 2) = 4^t$$

$$C\,(4^2 - 3.4 + 2) = 1$$

$$C = \frac{1}{4^2 - 3.4 + 2} = \frac{1}{6}$$

Böylece, bahsi edilen eşitliğin özel çözümü $Y(t) = \frac{1}{6}\,4^t$ olarak bulunur. (16)

---

denemek gerekecektir. Böylece, kt^n nin denenmesine kadar gidilebilir. (Bak, W. J. Baumol, Economic Dynamics, (S. 182-187)

(15) Bir sabit olan (A) nın yardımcı eşitliğin köklerinden birine eşit olması halinde $Y(t) = CA^t$ nin denenmesi bir sonuç vermiyecektir. $Y(t) = Ct\,A^t$ nin denenmesi zorunluluğu ortaya çıkacaktır. Meselâ,

$$Y(t+2) - 3Y(t+1) + 2Y(t) = 2^t$$

denkleminde, $Y(t) = Ct\,2^t$ yi kullanmamız gerekecektir. Bunun kullanılması halinde, yukardaki denklem şu hali alacaktır:

$$C(t+2)\,2^{t+2} - 3C(t+1)\,2^{t+1} + 2Ct2^t = 2^t$$

$$C\,2^t\,(4t + 8 - 6t - 6 + 2t) = 2^t$$

$$2C = 1 \qquad C = \frac{1}{2}$$

Böylece, $Y(t) = \frac{1}{2}\,t\,2^t$ yukarki denklemin özel çözümü olarak bulunacaktır.

Homojen eşitliğin çözümünde $Ct\,A^t$ şeklinde bir sonuç ortaya çıktığı takdirde $Y(t) = Ct\,A^t$ nin denenmesi de yetmiyecek, bu sefer $Y(t) = Ct^2\,A^t$ nin kullanılması gerekecektir.

(16) Görüldüğü gibi, özel çözümün elde edilmesinde şöyle bir formül kullanılmıştır:

$$\frac{A^t}{A^2 - 3A + 2}$$

Bu formülde paydanın derecesi, fark eşitliğinin derecesince tayin olunmuştur. Bu kullanışı ilham eden yol şöylece gösterilebilir: (Bak, R.G.D. Allen, Ad. Ge. Es. S. 194)

$F(E) = a_0\,E^n + a_1\,E^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ yazalım.

3. f(t) nin t^n olması hali :

Fark eşitliğinin sağ tarafının t^n şeklinde olması halinde, özel çözüm, $Y(t) = A_o + A_1 t + \dots\dots\dots + A_n t^n$ nin denemesi ile elde olunacaktır. (17) Bir misal ile bu söylediklerimizi açıklamaya çalışalım :

$$Y(t+2) - 3Y(t+1) + 2Y(t) = t^2$$

Bunun homojen eşitliğinin çözümü şu sonucu verecektir :

$$Y(t) = C_1 + C_2 2^t$$

Özel çözümü bulmak için $Y(t) = A_o + A_1 t + A_2 t^2$ yi denememiz lâzım. Ama, bu, homojen eşitliğin çözümünde mevcut olan (C_1) gibi bir sabit taşıdığı için, t ile çarpılma zorunluğu vardır. Böylece, deneyeceğimiz formül şu şekilde olacaktır :

$$Y(t) = A_o t + A_1 t^2 + A_2 t^3$$

Bunu yukarki denklemde kullanırsak şu eşitliğe ulaşırız:

$$A_o(t+2) + A_1(t+2)^2 + A_2(t+2)^3 - 3\,[A_o(t+1) + A_1(t+1)^2 + A_2(t+1)^3\,] + 2\,(A_o t + A_1 t^2 + A_2 t^3) = t^2$$

Zorunlu hesaplar yapıldıktan sonra şu sonuç elde edilir :

(E, $EY(t) = Y(t+1)$ şeklinde tanımlanmaktadır. Böylece, $Y(t+2) = E^2\,Y(t)$, $Y(t+n) = E^n\,Y(t)$ şeklinde ifade olunabilir.)

Fark denkleminin genel formülünü verelim :

$$a_o Y(t+n) + a_1 Y(t+n-1) + \dots\dots\dots + a_n Y(t) = f(t)$$

$$a_o E^n Y(t) + a_1 E^{n-1} Y(t) + \dots\dots\dots + a_n Y(t) = f(t)$$

$$Y(t)\,[\,a_o E^n + a_1 E^{n-1} + \dots\dots\dots + a_n\,] = f(t)$$

parantez içindeki değer F(E) olduğu için şöyle devam olunabilir:

$$Y(t)\,.\,F(E) = f(t)$$

$$Y(t) = \frac{f(t)}{F(E)}$$

(17) Özel çözümün homojen eşitliğin çözümündeki terimlere benzer terim taşıması halinde denediğimiz Y(t) yi t ile çarpmamız gerekecektir.

$$(-3A_2)\,t^2 + (-2A_1 + 3A_2)\,t + (5A_2 + A_1 - A_0) = t^2$$

Böylece, $\quad -3A_2 = 1 \qquad A_2 = -\dfrac{1}{3}$

$$-2A_1 + 3A_2 = 0 \qquad A_1 = -\frac{1}{2}$$

$$5A_2 + A_1 - A_0 = 0 \qquad A_0 = -\frac{13}{6}\ \text{dir.}$$

Özel çözüm, $Y(t) = -\dfrac{13}{6}t - \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{3}t^3$ olarak elde edilir.

IV

Burada, iki iktisadî dalgalanma teorisini ele alarak, incelediğimiz esasların uygulanışını göstermeye çalışacağız. Bunlar, homojen çözümle, özel çözümün birbirlerine eklenmesi ile elde olunan genel çözümün de ifadesine imkân vereceklerdir.

İlk olarak incelemeye çalışacağımız teori, P. Samuelson tarafından ileri sürülen nazariyedir. (18) Bu nazariyede Samuelson, ekonominin içsel işleyişinde hızlandıranın, çoğaltanla birlikte pay sahibi olduğunu ifade etmiştir. Bahsi geçen teorinin ileri sürüldüğü makalede Samuelson marjinal istihlâk temayülü ve hızlandıran katsayısına (ilişki) çeşitli değerler vererek gelirde meydana gelecek seyri göstermiştir.

Bu modele göre, t devresinde millî gelir şu şekilde yazılabilir :

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

C(t) istihlâk harcamasını, I(t) uyarılmış özel yatırımı, G(t) de devlet harcamasını ifade etmektedir.

---

(18) P.A. Samuelson, İnteractions Between The Multiplier Analysis And The Principle Of Acceleration, The Review Of Economic Statistics, May 1939. Keza, Readings İn Business Cycle Theory, adlı kitabın içinde.

Samuelson üç faraziye yapmaktadır:

(1) İstihlâk harcaması bir önceki devrenin millî gelirinin bir nisbetidir.

$$C(t) = a\,Y(t-1)$$

a, marjinal istilâk temayülünü ifade eder.

(2) Uyarılmış özel yatırım, bahis konusu devrede bir önceki devreye nazaran meydana gelen istihlâk artışının bir nisbetidir. (hızlandıran prensibi)

$$I(t) = b\,[C(t) - C\,(t-1)]$$

b ye ilişki ya da hızlandıran katsayısı adı verilir.

(3) Devlet harcamaları her devre için sabittirler. Burada basitleme olarak $G(t) = 1$ kabul edilebilir.

Bu faraziyeler ışığında (7) şu şekilde yazılabilir:

$$Y(t) = a\,Y(t-1) + b\,[C(t) - C(t-1)] + 1$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned} b\,[C(t) - C(t-1)] &= b\,[a\,Y(t-1) - a\,Y(t-2)] \\ &= ab\,Y\,(t-1) - a\,b\,Y(t-2) \end{aligned}$$

olduğu için, yukardaki eşitlik şu şekli alır:

$$Y(t) = a(1+b)\,Y\,(t-1) - ab\,Y(t-2) + 1$$

Bu eşitlik şu şekilde yazılabilir:

$$Y(t+2) - a(1+b)\,Y(t+1) + ab\,Y(t) = 1$$

Bu, sabit katsayılı ikinci sıra bir fark eşitliğidir. Çüzümünde yukarda anlatılan genel usul uygulanacaktır. Önce homojen eşitliğin çözümü bulunacak, buna özel çözümün eklenmesi ile genel çözüme ulaşılacaktır.

Homojen eşitliğin çözümü şöyle bir sonuç verecektir: (19)

$$Y(t) = C_1\,(x_1)^t + C_2\,(x_2)^t$$

---

(19) İncelemekte olduğumuz denklemin yardımcı eşitliği şöyle olacaktır:

$$x^2 - a(1+b)\,x + ab = 0$$

$$\text{Kökler} \quad x_1 = \frac{a\,(1+b) + \sqrt{[a\,(1+b)]^2 - 4\,ab}}{2}$$

Özel çözüm şöyle bulunacaktır:

$$k - a(1+b)\,k + abk = 1$$

$$k - ak = 1$$

$$k = \frac{1}{1-a}$$

Böylece, genel çözüm

$$Y(t) = C_1\,(x_1)^t + C_2\,(x_2)^t + \frac{1}{1-a}$$

larak ortaya çıkacaktır.

İkinci olarak, L. A. Metzler tarafından ileri sürülen, müteşeb-islerin stokları belli bir seviyede tutma gayretlerinin ortaya çı-ardığı stok dalgalanmaları teorisini misal olarak verelim. (20) u nazariyeye göre müteşebbisler, satış ya da stok seviyesini mu-afaza amaçlarıyla istihlâk malları istihsal ederler.

U(t), t devresinde satış için istihsal edilmiş istihlâk mallarını, (t), t devresinde stoklar için istihsal olunmuş istihlâk mallarını östersin. Her devrede, V ile gösterilen, sabit uyarılmamış net bir tırım yapıldığı farz olunsun. t devresindeki toplam gelir bu üç ısurun birbirlerine eklenmesi ile elde olunacaktır. (21) Yani

$$Y(t) = U(t) + S(t) + V \qquad \text{dir.}$$

Şu ek faraziyeler yapılıyor:

(1) Bir devrede gerçekleşen satışlar, o devrenin toplam geli-nin bir nisbetidir.

$$x_2 = \frac{a(1+b) - \sqrt{[a(1+b)]^2 - 4ab}}{2}$$

olarak bulunacaktır.

Açık olarak görüldüğü gibi köklerin değeri, marjinal istihlâk temayülü ile hızlandıran katsayısının değerine bağlı bulunacaktır.

) Bu teoriyi, bu çalışmamızda önemli ölçüde yararlandığımız, Samuel Goldberg'in «Introduction to difference equations» adlı kitabına (S. 98 - 100 ve 158 - 160) dayanarak anlatmağa çalışıyoruz.

(2) Bir devre için plânlanan hasıla, bir önceki devrenin gerçekleşen satışlarına eşittir. Yani

$$U(t) = a\, Y(t-1) \qquad \text{dir.}$$

a , marjinal istihlâk temayülüdür.

(3) Müteşebbisler, stoku sabit, normal saydıkları bir seviyede tutmağa çalışırlar. Bir devredeki stoklar için yapılan istihsal bir önceki devrenin umulan ve gerçekleşen satışları farkına eşit olacaktır. (t—1) devresinin umulan satışları U(t—1) dir ve a Y(t—2) ye eşittir. Ayni devrenin gerçekleşen satışları (birinci faraziye dolayısıyle) aY(t—1) dir. Böylece, $S(t) = a\, Y(t-1) - a\, Y(t-2)$ olarak ortaya çıkacaktır.

Bu değerleri, toplam gelir eşitliğindeki yerlerine koyarsak şu denklem elde olunur :

$$Y(t) = a\, Y(t-1) + [a\, Y(t-1) - a\, Y(t-2)] + V$$

Bu şu şekilde yazılabilir :

$$Y(t+2) - 2a\, Y(t+1) + a\, Y(t) = V$$

Bu eşitlik, sabit katsayılı ikinci sıra fark eşitliğidir. Çözümde bilinen usul uygulanacaktır.

Homojen eşitliğin çözümü şöylece ifade olunabilecektir: (22)

$$Y(t) = C_1 (x_1)^t + C_2 (x_2)^t$$

---

(22) Yardımcı eşitlik şu şekilde ifade edilebilecektir:

$$x^2 - 2ax + a = 0$$

$$x_1 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 4a}}{2} = a + \sqrt{a^2 - a}$$

$$x_2 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 4a}}{2} = a - \sqrt{a^2 - a}$$

Normal olarak, a (marjinal istihlâk temayülü) birden küçük olduğu için $a^2 - a < 0$ olacaktır. Yani, yukarda incelediğimiz yardımcı eşitliğin kökleri karmaşık sayılar olarak bulunacaktır. Bu durum, homojen eşitliğin çözümünün $Ar^t \cos(t\theta - B)$ şeklinde gösterilmesi zorunluluğunu ortaya çıkaracaktır. Kosinüslü terimin çözümde yer alması dalgalanmaların meydana geldiğini

Özel çözümün elde edilmesinde şöyle hareket edilecektir:

$$k - 2ak + ak = V$$

$$k(1 - a) = V$$

$$k = \frac{V}{1 - a}$$

Böylece, genel çözümün ifadesi şu şekli alacaktır:

$$Y(t) = C_1 (x_1)^t + C_2 (x_2)^t + \frac{V}{1 - a}$$