Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Dicle University Journal of the Institute of Natural and Applied Sciences
https://dergipark.org.tr/tr/pub/dufed

Derleme Makalesi / Review Article

Bulanık Küme ve Bulanık Sayı: Uygulamalarla Aritmetik İşlemler

Fuzzy Set and Fuzzy Number: Arithmetic Operations with Applications

Ammar HOMAIDA [1,*], Mustafa Hilmi PEKALP [2], Meral EBEGİL [3]

[1] *Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 06560, Ankara, Türkiye*
[2] *Ankara Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, 06590, Ankara, Türkiye*
[3] *Gazi üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06560, Ankara, Türkiye*

https://doi.org/10.55007/dufed.1441147

MAKALE BILGISI

Makale Tarihi

Alınış, 21 Şubat 2024
Revize, 25 Eylül 2024
Kabul, 28 Eylül 2024
Online Yayınlama, 24 Aralık 2024

Anahtar Kelimeler

α-kesim yöntemi, Aritmetik işlemler, Bulanık mantık, Genişletme prensibi

ARTICLE INFO

Article History

Received, 21 February 2024
Revised, 25 September 2024
Accepted, 28 September 2024
Available Online, 24 December 2024

Keywords

α-cut method, Arithmetic operations, Fuzzy logic, Extension principle

ÖZ

Klasik mantıkta ifadeler sadece “doğru” veya “yanlış” olarak ifade edilen iki değerli karar verme yapısına sahip olduğundan belirsizlik durumlarını inceleyemez. Buna karşın gerçek dünyadaki problemler genellikle kesinlik içermemektedir. Bulanık mantık ise insanların günlük hayatta çok yönlü düşünme ve karar verme mekanizmasına benzeyen, kesin olmayan durum ve olaylarla ilgilenen bir sistemdir. Bulanık mantık ilk defa matematiksel olarak, Zadeh’in (1965) çalışmasında ortaya atılmıştır. Klasik mantığın aksine bulanık mantık gerçek dünya problemlerinin içinde bulunan belirsizliğin incelenmesini ve matematiksel olarak modellenmesini sağladığı için kısa sürede pek çok alanda kullanılan bir araç olmuştur. Bu nedenle, bulanık küme teorisine dayanan bulanık mantık ile ilgili kavramların iyi anlaşılması ve bulanık sayılara dayalı olarak yapılan temel aritmetik işlemlerin doğru yapılması önemlidir. Buradan hareketle bu çalışmada öncelikle bulanık mantıkla ilgili temel tanım ve kavramlar anlatılmıştır. Daha sonra ise bulanık sayılarla aritmetik işlemler yapmanın mantığını açıklayabilmek için hem kesikli bulanık sayılarla hem de sürekli bulanık sayılarla aritmetik işlemler örneklerle incelenmiştir.

ABSTRACT

In classical logic, propositions have a two-valued decision structure, expressed solely as 'true' or 'false,' and it cannot examine situations of uncertainty. However, real-world problems often lack precision. Fuzzy logic, contrastingly, is a system that resembles the multifaceted thinking and decision-making mechanisms of humans in daily life and deals with uncertain situations and events. Fuzzy logic was first introduced mathematically in Zadeh’s work (1965). The widespread adoption of

***Sorumlu Yazar**

E-posta Adresleri: ammarhomaida89@gmail.com (Ammar HOMAIDA), mpekalp@ankara.edu.tr (Mustafa Hilmi PEKALP), mdemirel@gazi.edu.tr (Meral EBEGİL)

fuzzy logic stems from its capacity to represent the uncertainty present in real-world issues, making it a valuable tool across fields. Hence, it is crucial to grasp the concepts associated with fuzzy logic, rooted in fuzzy set theory, and execute fundamental arithmetic operation with precision when dealing with fuzzy numbers. With this in mind, this study first provides fundamental definitions and concepts related to fuzzy logic. Subsequently, arithmetic operations with both discrete and continuous fuzzy numbers are examined with examples to establish the logic of performing arithmetic operations with fuzzy numbers.

1. GİRİŞ

Klasik mantık olarak da bilinen Aristoteles mantığı, önermeler sadece “doğru” ya da “yanlış” olarak ifade edildiği ikili bir değerlendirme mekanizmasına sahiptir. Açıktır ki klasik mantık üçüncü bir durumun varlığına izin vermediğinden belirsizlik durumlarını inceleyen bir yapıya sahip değildir. Buna karşın gerçek dünyadaki problemler ele alındığında kesinlik içermeyen olgular ile karşılaşılmaktadır. 20. yüzyılın başlarından itibaren, basit olamayan sistemlerin analizinde çeşitli mantık sistemleri, klasik mantık sistemleri teorisinin alternatifi olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bunlardan birisi bulanık mantıktır [1].

Bulanık mantık, kesin olmayan durumlarla ilgilenir. Gerçek hayatta çoğu zaman bir olayın ya da durumun kesin olarak doğru ya da yanlış olduğuna karar verilemez. Zadeh’in çalışmasında belirsizliği içinde barındıran bulanık mantık kavramı ilk defa matematiksel olarak literatüre girmiştir [2].Klasik mantığına göre “Bir nesne bir kümenin ya elemanıdır ya da elemanı değildir”[3]. Buna karşı, bulanık mantık, klasik iki değerli (doğru/yanlış) karar verme yapılarına ek olarak, doğruluk ve yanlışlık arasındaki derecelendirmeyi içeren çoklu karar alma yapılarına sahiptir. Diğer bir ifadeyle, bulanık mantıkta sadece “doğru” veya “yanlış” durumu değil, aynı zamanda sonsuz sayıda durumda mümkündür. Bu nedenle, matematiksel olarak sadece 0 ya da 1 değerleri almak yerine, [0,1] aralığındaki sayılardan sonsuz tane değerleri de kullanabilir. Örneğin klasik mantıkta bir nesne siyah ya da beyazdır. Oysaki siyah ve beyaz arasında grinin sayısız tonu vardır. Klasik mantıkta arada kalan bu renk tonlarının incelenmesi imkânsızken, bulanık mantığın yapısı gereği bu ara renk tonlarının incelenmesi mümkün olabilecektir [4]. Bulanık mantık, bulanık küme teorisine dayanır. Bulanık küme, belirsizlik kavramının gerçek dünyadaki düşüncelerin ve davranışlarındaki karmaşıklıktan kaynaklanan özelliklerini benzersiz bir şekilde inceleyen ve matematiksel olarak tanımlanan bir mantık sistemidir [5, 6]. Bulanık mantık, insanların düşünce sistemine benzer bir yaklaşımla problem çözme ve karar verme imkânı sunması, belirsizlik içeren karmaşık sistemlerin çözümlenmesinde hızlı ve etkili sonuçlar ortaya koyması, aynı zamanda esnek bir modelleme olanağı sunması sebebiyle çeşitli alanlarda klasik yöntemlere tercih edilmektedir.

Bulanık mantığın temelini oluşturan Zadeh (1965), çalışmasında bulanık küme tanımlarını vermiştir. Aynı zamanda bu çalışmada bulanık kümeler için ana işlemler üzerinde de durulmuştur. Ek olarak, bulanık kümelerin özel bir durumu olarak bulanık sayılarda matematiksel işlemler (bulanık aritmetik) için kurallar da belirtilmiştir [2, 3, 7]. 1975 yılında, Assilian ve Mamdani tarafından geliştirilen bulanık mantık kavramı, ilk kez bir buhar makinasının kontrol sistemi için entegre edilerek uygulanmıştır. Bu tarihten itibaren, bulanık mantık her alanda uygulanmaya başlanmıştır [8].

Bulanık mantık üzerine çalışan bir araştırmacı, olasılık teorisiyle benzerliklerinden dolayı bulanık mantığı olasılık teorisiyle karıştırabilir. Ancak, bu iki kavram arasında önemli farklılıklar bulunmaktadır. Bulanık mantık, önerilen ifadenin doğruluğunun belirsizlik derecesini 0 ile 1 arasında değişen bir değer olarak ölçer. Diğer yandan olasılık teorisi, önerilen ifadenin ne kadar olası olduğunu ölçmek için [0,1] aralığından bir değer atar. Başka bir deyişle, bulanık mantık kısmi doğruluk dereceleriyle ilgili bir mantık olarak kabul edilebilir. Buna karşılık, olasılık teorisi kesin kavramlar ve önermelerle uğraşır, önermeler ya doğru ya da yanlış olurlar; bir önermenin olasılığı, o önermenin doğruluğuna olan inanç derecesini ölçer. Örneğin, bugün güneşli olma olasılığı %40 olarak ifade edildiğinde, sayısal bir olasılık sunulmaktadır. Ancak, bugün hava güneşli olarak ifade edildiğinde, şiddet veya derece hakkında herhangi bir bilgi verilmediği görülmektedir [2, 9].

Bulanık mantıkta, elemanlar bir kümeye belirli bir üyelik derecesiyle dâhil olurlar. Üyelik derecesi 1 olan bir eleman kümeye tamamen aitken, üyelik derecesi 0 olan bir eleman tamamen ait değildir. Üyelik derecesi 0 ile 1 arasında olan elemanlar ise kümeye kısmen aittir. Bu anlamda, klasik kümeler, yalnızca 0 veya 1 üyelik derecelerine sahip özel bir bulanık küme türü olarak kabul edilebilir. Buna örnek olarak renklerin sınıflandırılması verilebilir. Renkler; açık, orta ve koyu renkler şeklinde sınıflandırılabilir. Bu durumda bazı renklerin sınıflandırılmasında belirsizlik oluşabilir.

Bulanık kümelerin özel sınıfı bulanık sayılar, belirli bir değere tam olarak sahip olmayan bir sayıdır. Yani bulanık küme, birbirleriyle ilişkili nesnelerin bir araya getirilmesiyle oluşurken, bulanık sayı belirsizlik ve kesin olmayan durumları ifade etmek için kullanılan bir matematiksel kavramdır. Bulanık kümenin kesin bir değeri yoktur. Ancak bulanık sayı, üçgensel, yamuksal gibi formalarda veya belirli bir olasılık dağılımı yardımıyla ifade edilebilir [2, 3].

Bulanık kümeler kesikli ya da sürekli olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Kesikli bulanık kümeler, elemanları sayılabilir sayıda olan kümelerdir. Örnek olarak, yemeklerin baharat derecesi verilebilir: Hiç (0), Az (1-3 arası), orta (4-6 arası), çok (7-9 arası) ve aşırı (10) olarak değerlendirildiğinde yemeği tadan kişilerden baharat derecesi bakımından yemeklere 1-10 arası puan vermeleri istensin. Açıktır ki 1, 2’den daha azdır fakat o da aynı sınıfa aittir. Sürekli kümeler ise elemanları sayılamaz sonsuzlukta olan kümelerdir. Örneğin, hava durumu tahmini için sıcaklık bulanık bir kümedir: Çok soğuk (-10°C ile 5°C), Soğuk (-5 °C ile 10 °C), ılık (5 °C ile 20 °C), sıcak (15 °C ile 30 °C) ve çok sıcak (25 °C ile 40 °C) gibi.

Bulanık mantık alanındaki çoğu çalışma, matematiksel işlemleri teorik bir bilgi sunmadan gerçekleştirir. Dahası, bu işlemlerin sonuçlarını doğrudan sunarlar. Bir şeyin nasıl yapılacağını bilmek onu kusursuz bir şekilde anlamak ve uygulamak açısından önem taşır. Bu nedenle yapılan çalışmada bulanık kümeler ve bulanık sayıların mantığını anlamaya ve bunlarla ilgili yapılacak aritmetik işlemlerin nasıl uygulayacağına dair adım adım bilgi sunulmaktadır. 2. bölümde bulanık kümeler için temel tanımlamalar ele alınmaktadır. Ayrıca, bulanık kümeler üzerinde yapılacak aritmetik işlemlerin tanımları örneklerle birlikte verilmektedir. 3. bölümde literatürde en sık kullanılan bulanık sayı kavramları yer almaktadır. 4. bölümde ise bulanık sayılar üzerindeki işlemler Zadeh'in genişletme prensibi ve α-kesim yöntemi kullanılarak örneklerle incelenmektedir. İfade edilen kavramların gerçek hayatta nasıl ve ne şekilde karşımıza çıkabileceğine yönelik olarak örnekler de sunulmaktadır.

2. BULANIK KÜME TEORİSİ

Klasik mantığın kesinlik içeren yapısından dolayı, 1900'lü yılların başlarından itibaren açıklayıcı olmayan ve karmaşık sistemlerin çözümü için klasik mantık teorisi dışında diğer mantık yaklaşımları üzerinde araştırmalar yapılmıştır. Bu doğrultuda 1930 yılında, Lukasiewicz[10] ile başlayan üç değerli mantık çalışmaları, 1981 yılında, Knuth ile devam etmiştir [11]. 1924-1927 yılları arasında Alman fizikçi Heisenberg belirsizlikler üzerine çalışmalar yapmıştır [12]. Heisenberg 1927'de kuantum mekaniğindeki belirsizlikleri modellemek üzerine yaptığı çalışmalar sonucunda 'Heisenberg belirsizlik ilkesi' ortaya çıkmıştır. Bu çalışmalar çok değerli mantığa başlangıç niteliğinde çalışmalar olmuştur. Bulanık mantık, belirsizlik kavramını ele alan bir akademik disiplindir ve 1965 yıllında Zadeh'in çalışmasıyla literatüre kazandırılmıştır [2]. Bulanık mantık, klasik mantığın ikili (iki değerli) karar verme yapısına karşılık gelir ve doğruluk ve yanlışlık dereceli doğruluk ve yanlışlık kavramlarını içerir. Bulanık mantıkta önermeler "doğru" ya da "yanlış" olmanın yanı sıra sonsuz derecelerde olabilir. Bulanık mantık, matematiksel olarak ifade edildiğinde önermelerin [0,1] aralığındaki reel sayılardan değerler alabileceği bir sistemdir. Böylece, bulanık küme teorisine dayanarak insan düşünce ve davranışlarındaki belirsiz kavramlarını incelemek ve onları matematiksel olarak ifade etmek mümkün olabilir[1]. Diğer bir ifadeyle, klasik küme mantığında bir elemanın bir kümeye ait olup olmadığı kesin bir durumu ifade ederken, bulanık mantık kavramına dayalı bulanık küme mantığında bir elemanın bir kümeye aidiyet derecesi üzerinde durulur. Yani bir eleman, belirli bir aitlik derecesine sahip olabilir ve bu derece farklı olabilir.

Bulanık kümeler, klasik kümelerin bir genellemesi olarak düşünülebilir. Örneğin, X evrensel küme olmak üzere 20 yaşından az olan bir bireyin genç bir insan olduğu varsayıldığında klasik bir küme, Eşitlik (1)'deki gibi ifade edilebilir:

$$genç = \{x \in X : x \leq 20\} \tag{1}$$

$x = 30$ değerini aldığında x'in "genç" kümesine ait olmayacağı açıktır.

Şimdi bulanık kümeler için aynı örneğin değerlendirilebilmesi adına bazı kavramlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Üyelik fonksiyonu $\begin{matrix} \mu : X \to [0,1] \\ x \to \mu(x) \end{matrix}$ ile tanımlanmaktadır. Üyelik fonksiyonu değeri bir elemanın o kümeye ait olma üyelik derecesidir. Üyelik fonksiyonu sadece 0 ya da 1 değerlerini alıyorsa klasik mantığa dönülmüş olur. Örneğin, yukarıda verilen "genç" klasik kümesi göz önüne alındığında herhangi bir x değerinin o kümeye ait olup olmadığını gösteren üyelik fonksiyonunun Eşitlik (2)'deki gibi olacağıaçıktır.

$$\mu_{genç}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x > 20 \\ 1 & , \quad x \leq 20 \end{cases} \tag{2}$$

Görüldüğü gibi Eşitlik (2)'deki fonksiyon yalnızca 0 ya da 1 değerlerini alan iki değerli bir fonksiyondur. Yani bir kişi 20 yaşında ya da 20 yaşın altında ise genç, 20 yaşın üstünde ise genç değil kategorisine alınmaktadır. Bu durum, her zaman mantıklı olmayabilir. Çünkü genç algısı kişiden kişiye farklılık gösterebilir. Bu tür durumlarda, göz önüne alınan kişinin yaşına bağlı olarak gruplardan birine aitlik derecesi verilebilir. Örneğin, 20 yaşın altı herkes tarafından genç olarak kabul edildiğinde üyelik fonksiyonu değeri kesin olarak 1, 30 yaşın üstü herkes tarafından "genç değil" olarak kabul edildiğinde üyelik fonksiyonu değeri kesin olarak 0 olacaktır. Ancak bu iki yaş arasındaki bireyler kısmi olarak genç grubuna dahil olabilir. Örneğin, 21 yaşında olan bir kişi, 20 yaşına çok yakın olmasına rağmen klasik mantığa göre "genç olmayanlar" grubuna dahil olacaktır. Bunun için Eşitlik (3)'deki gibi üyelik derecesini belirleyecek bir başka fonksiyon tanımlanabilir.

$$\mu_{genç}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 20 \\ 1 - \dfrac{(x-20)}{10} & , \quad 20 < x \leq 30 \\ 0 & , \quad x > 30 \end{cases} \tag{3}$$

Eşitlik (3)'teki üyelik fonksiyonu göz önüne alındığında, 20 ve 20 yaşın altında olan kişilerin üyelik değerleri 1; 21-30 yaş arasında olan kişilerin üyelik değerleri 0 ile 1 arasında ve 30 yaşın üstündeki kişilerin üyelik değerleri ise 0 olarak verilebilir. Örneğin, $x \in \{5,20,22,28,29,30,35,40\}$ yaş değerleri için Eşitlik (2) ve Eşitlik (3)'teki üyelik fonksiyonları kullanılarak, klasik mantık ve bulanık mantık kümelerinin sırasıyla kişilerin yaşları ve ait oldukları kümeye ait üyelik dereceleri ikililer şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

- Klasik mantık: $\{(5,1),(20,1),(22,0),(28,0),(29,0),(30,0),(35,0),(40,0)\}$.
- Bulanık mantık: $\{(5,1),(20,1),(22,0.8),(28,0.2),(29,0.1),(30,0),(35,0),(40,0)\}$.

Herhangi bir bulanık küme için, bir eleman kısmen o kümeye dâhil olabilir veya kısmen dışında kalabilir.

Tanım 2.1: $\forall x \in X$ için $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$ ile verilen $\tilde{A}$ kümesine bir bulanık küme denir. $\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu, X kümesinin her bir elemanını $[0,1]$ aralığında bir değere taşır. Bu değere ise o elemanın üyelik derecesi veya üyelik değeri adı verilir. Bulanık kümelerdeki bir elemanın üyelik derecesi ya da değeri, 1'e yaklaştıkça o kümeye aitlik derecesinin arttığı gözlemlenir. Bu durum, elemanların kümeye aitlik derecelerinin belirsizliğini açıklar.

$\tilde{A}$ bulanık kümenin kesikli veya sürekli olduğu durumlarda üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{A} = \begin{cases} \sum \dfrac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} & , \quad X - Sayılabilir\ veya\ sonlu \\ \int \dfrac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} & , \quad X - Sayılamaz \end{cases}$$

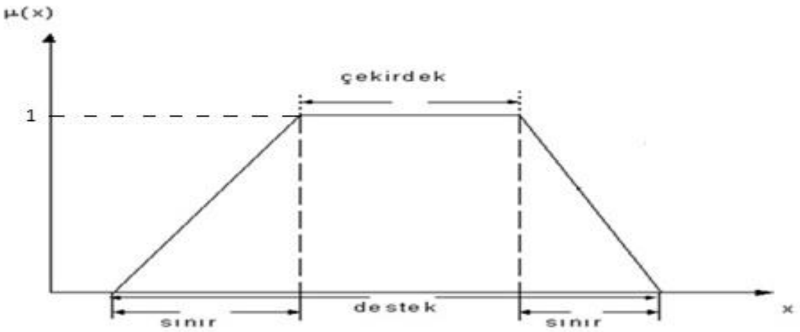
X evrensel küme olmak üzere aşağıdaki tanımlamalar verilsin [2-4, 13, 14]:

Tanım 2.2: $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ olacak şeklinde elde edilen tüm x noktalarının oluşturduğu kümeye destek kümesi denir ve $D(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olacak şeklinde elde edilen tüm x noktalarının oluşturduğu kümeye çekirdek kümesi denir ve $Ç(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4: $\forall x \in X$ için $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ olacak şeklinde elde edilen tüm x noktalarının oluşturduğu kümeye sınır kümesi denir ve $S(\tilde{A}) = \{x \in X : 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımlara göre destek, çekirdek ve sınır kümelerinin grafik sunumu aşağıdaki gibi verilebilir.



Şekil 1. *Üyelik Fonksiyonunun Bileşenleri*

Tanım 2.5: Çekirdek kümesi boş kümeden farklı olan bulanık kümeye normal denir.

Tanım 2.6: $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5$ şartını sağlayan tüm x noktalarının kümesine geçiş noktaları kümesi denir ve $GN(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.7: Destek kümesi tek elemandan oluşan bir bulanık kümeye tekildir (singleton) denir.

Tanım 2.8: $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$ olacak şeklinde elde edilen tüm x noktalarının kümesine α-kesim veya α-seviye kümesi denir ve $\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ ile gösterilir. Eğer x noktalarının kümesi $\mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha$ ile elde ediliyorsa bu kümeye de güçlü α-kesim veya güçlü α-seviye kümesi denir ve $\grave{\tilde{A}}_{\alpha} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ ile gösterilir.

Bu noktaya kadar sunulan tanımları bir örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 1: $X = \{1,2,\dots,10\}$ evrensel küme ve $\tilde{A} = \{(2,0.3),(3,0.2),(4,0.9),(6,0.6),(8,1)\}$ bulanık kümesi verilsin:

$\alpha \in \{0.2,0.3,0.6,0.9,1\}$ değerleri için α-kesim kümeleri: $\tilde{A}_{0.2} = \{2,3,4,6,8\}$, $\tilde{A}_{0.3} = \{2,4,6,8\}$, $\tilde{A}_{0.6} = \{4,6,8\}$, $\tilde{A}_{0.9} = \{4,8\}$, $\tilde{A}_{1} = \{8\}$.

$\alpha \in \{0.2,0.3,0.6,0.9\}$ değerleri için güçlü α-kesim kümeleri: $\grave{\tilde{A}}_{0.2} = \{2,4,6,8\}$, $\grave{\tilde{A}}_{0.3} = \{4,6,8\}$, $\grave{\tilde{A}}_{0.6} = \{4,8\}$, $\grave{\tilde{A}}_{0.9} = \{8\}$.

Destek kümesi: $D(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} = \{2,3,4,6,8\}$. Açıktır ki, destek kümesi tek elemandan oluşmadığı için $\tilde{A}$ tekil değildir.

Çekirdek kümesi: $Ç(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} = \{8\}$. Açıktır ki, çekirdek kümesi boş kümeden farklı olduğu için $\tilde{A}$'ya normal bulanık küme denir.

Sınır kümesi: $S(\tilde{A}) = \{x \in X: 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\} = \{2,3,4,6\}$.

Geçiş noktaları kümesi: $GN(\tilde{A}) = \{x \in X: \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5\} = \emptyset$.

X evrensel küme, $\mu_{\tilde{A}}$ ve $\mu_{\tilde{B}}$ sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları olsun. Bulanık kümeler üzerindeki küme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir [2, 3, 15]:

Tanım 2.9: $\forall x \in X$için $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ ise $\tilde{A}, \tilde{B}$'nin alt kümesidir, yani $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$'dır.

Tanım 2.10: $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ ise $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümeleri eşittir denir, yani $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$'dır.

Tanım 2.11: $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ olmak üzere $\mu_{\tilde{C}}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ olacak şeklide elde edilen tüm x değerlerinin oluşturduğu kümeye birleşim kümesi denir, yani $\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)): \mu_{\tilde{C}}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\}$'dır.

Tanım 2.12: $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ olmak üzere $\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ olacak şeklide elde edilen tüm x değerlerinin oluşturduğu kümeye kesişim kümesi denir, yani $\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)): \mu_{\tilde{C}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\}$'dır.

Tanım 2.13: $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$ olmak üzere $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$ olacak şeklide elde edilen tüm x değerlerinin oluşturduğu kümeye $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı denir, yani $\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)): \mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)\}$'dır.

Tanım 2.14: $\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$ olmak üzere$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$ olacak şeklide elde edilen tüm x değerlerinin oluşturduğu kümeye $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel toplamı denir, yani $\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)): \mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)\}$'dır.

Tanım 2.15: $\tilde{A}^c$ olmak üzere $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ olacak şeklide elde edilen tüm x değerlerinin oluşturduğu kümeye tümleyen denir, yani $\tilde{A}^c = \{(x, \mu_{\tilde{A}^c}(x)): \mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\}$'dır.

Tanım 2.16: $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$ olmak üzere $\mu_{\tilde{C}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}^c}(x)\}$ olacak şeklide elde edilen tüm x değerlerinin oluşturduğu kümeye $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin farkı denir, yani $\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)): \mu_{\tilde{C}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}^c}(x)\}\}$'dır.

Tanım 2.17: Bulanık kümelerin yoğunlaştırılması $\tilde{A}^k = \left\{\left(x, \left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^k : x \in X\right)\right\}$şeklinde tanımlanır. Aynı şekilde, bulanık kümelerin genişletilmesi $\tilde{A}^{\frac{1}{k}} = \{(x, \sqrt[k]{\mu_{\tilde{A}}(x)}: x \in X)\}$ olarak ifade edilir. Burada $k \in \mathcal{Z}^+$'dır.

Şimdi, son sunulan tanımları bir örnek üzerinden açıklayalım.

Örnek 2: $X = \{1,2, \dots ,10\}$evrensel küme olmak üzere $\tilde{A} = \{(2,0.6), (6.1), (8.0.4)\}$ ve $\tilde{B} = \{(2,0.7), (3,1), (8.0.6)\}$ iki bulanık küme olsun:

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(2,0.7), (3,1), (6,1), (8,0.6)\}$	$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(2,0.6), (8,0.4)\}$
$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(2,0.42), (8,0.24)\}$	$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(2,0.88), (3,1), (6,1), (8,0.76)\}$
$\tilde{B}^c = \{(1,1), (2,0.3), (4,1), (5,1), (6,1), (7,1), (8,0.4), (9,1)(10,1)\}$	$\tilde{A} - \tilde{B} = \{(2,0.3), (6,1), (8,0.4)\}$
$k = 2$için: $\tilde{A}^k = \tilde{A}^2 = \{(2,0.36), (6,1), (8,0.16)\}$	$k = 2$için: $\tilde{A}^{\frac{1}{k}} = \tilde{A}^{\frac{1}{2}} = \{(2,0.77), (6,1), (8,0.63)\}$

Bulanık küme teorisinin temel taşlarından biri, klasik matematiksel kavramları, bulanık kümelere genişletme amacıyla kullanılabilen genişletme prensibidir. Bu önemli kavram, ilk olarak Zadeh, çalışmasında, tanımlanmıştır. Genişletme prensibi aşağıdaki şekilde tanımlanır [2]:

Tanım 2.18: X evrensel kümelerin kartezyen çarpımları yani $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_r$ olsun. $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$ sırasıyla $X_1, X_2, \dots, X_r$'de r tane bulanık küme olmak üzere, $f: X \to Y$ fonksiyonu $y = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ bağıntısıyla verilsin. Genişletme prensibi,

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)): y = f(x_1, x_2, \dots, x_r); (x_1, x_2, \dots, x_r) \in X\} \tag{4}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_r)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \mu_{\tilde{A}_3}(x_3), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\} & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \tag{5}$$

ile verilir.

$r = 1$ için genişletme prensibi:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)): y = f(x); x \in X\} \tag{6}$$

ve

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \tag{7}$$

biçiminde uygulanabilir. Bu prensip aşağıdaki örnek ile açıklanır.

Örnek 3: $X = \{-5, -9, \dots ,9,5\}$ evrensel küme ve $\tilde{A} = \{(-2,0.3), (-1,0.6), (0,0.9), (1,0.7), (2,0.2)\}$ bulanık kümesi verilsin. $f(x^2 + 1)$ fonksiyonu için genişletme prensibi kullanarak:

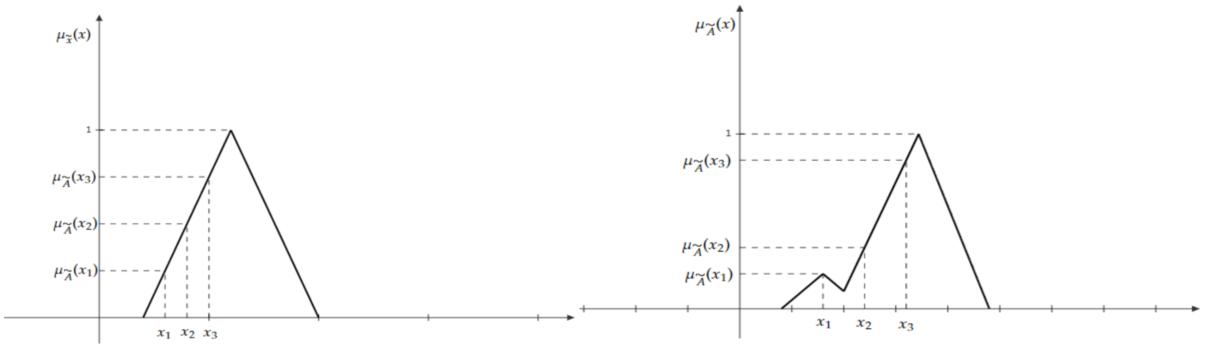
$$\tilde{B} = \{(f(-2), 0.3), (f(-1), 0.6), (f(0), 0.9), (f(1), 0.7), (f(2), 0.2)\}$$
$$= \{(5,0.3), (2,0.6), (1,0.9), (2,0.7), (5,0.2)\}$$

$\tilde{B}$'nin iki elemanı farklı birden fazla üyelik değerine sahiptir. Dolayısıyla:

$\tilde{B} = \{(1,0.9), (2, \max\{0.6,0.7\}), (5, \max(0.3,0.2))\} = \{(0,0.9), (2,0.7), (5,0.3)\}$ olur.

Tanım 2.19: X evrensel bir küme ve $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu ile bulanık bir küme olsun. Herhangi $x_1, x_2, x_3 \in X$ için aşağıdaki koşulu sağlıyorsa dışbükey bulanık küme olarak adlandırılır (Şekil 2):

$$\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_3)\};\ \forall x_1 \leq x_2 \leq x_3 \tag{8}$$



Şekil 2. *Dışbükey Küme (Sol) ve Dışbükey Olamayan (Sağ) Bulanık Küme.*

3. BULANIK SAYI

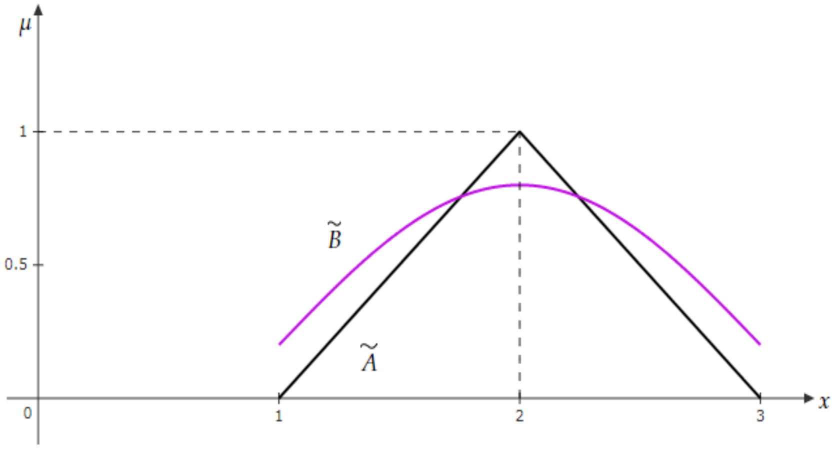
Bazı durumlarda, kesin sayılar veya belirli aralıkların yerine bulanık sayıların kullanılması tercih edilebilir. Bulanık sayılar, kesin sayılara göre daha geniş bir tanım ve esneklik sunar.

Tanım 3.1: X evrensel küme ve $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu ile bir bulanık küme olsun. $\tilde{A}$ kümesi, aşağıda belirtilen koşulları sağlıyorsa, bu küme bulanık bir sayı olarak kabul edilir [16]:

- $\tilde{A}$ normaldir.
- Bulanık küme dışbükey (konveks) olmalıdır.
- $\alpha \in (0,1]$ değerleri için $\tilde{A}_\alpha$ kapalı bir aralıktır.
- $\tilde{A}$'nın desteği sınırlıdır.

Bulanık sayılar, bulanık kümeler teorisinde özel bir konumda bulunan bir alt kümedir. Her bulanık sayı, dışbükey bir bulanık küme oluşturur; ancak bu durumun tersi her zaman geçerli değildir. Örneğin,

X evrensel kümesinde iki bulanık küme $\tilde{A} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right): x \in [1,3],\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - |x - 2|\right\}$ ve $\tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{B}}(x)\right): x \in [1,3],\ \mu_{\tilde{B}}(x) = 0.2 + 0.6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right)\right\}$ olsun. Bu bulanık kümeler $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aşağıdaki şekilde gösterilebilir:



Şekil 3. *Bulanık Kümeler* $\tilde{A}$ *ve* $\tilde{B}$

$\tilde{A}$, üçgensel bir bulanık sayıdır. Tanım 2.19'a göre, $\tilde{A}$'nın bulanık bir sayı olduğu aynı zamanda dışbükey bir küme olduğu açıktır. $\tilde{B}$ de dışbükey bir bulanık kümeyi temsil eder; ancak, $\tilde{B}$ bulanık bir sayıyı ile temsil etmez (Tanım 3.1'e göre $\tilde{B}$ normal olmayan bir küme olduğundan).

Teorem: X evrensel küme ve $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu ile bir bulanık küme olsun. $\tilde{A}$'nın bulanık bir sayı olabilmesi için aşağıdaki şartları sağlanmalı[16]:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [a,b] \\ l(x) & , \quad x \in (-\infty, a) \\ r(x) & , \quad x(b,\infty) \end{cases} \tag{9}$$

burada, $[a,b] \neq \emptyset$.

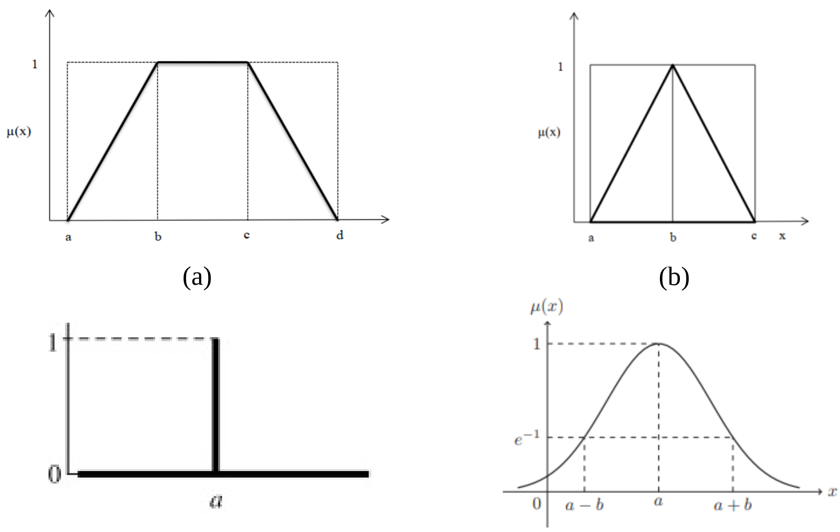
$\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\begin{matrix} l: (-\infty, a) & \to [0,1] \\ x & \to \ l(x) \end{matrix}$ fonksiyonu artan ve sağdan süreklidir.
- $\omega_1 < a$ için $\forall x \in (-\infty, \omega_1)$ ise $l(x) = 0$'dır.
- $\begin{matrix} r: (b, \infty) & \to \ [0,1] \\ x & \to \ r(x) \end{matrix}$ fonksiyonu azalan ve soldan süreklidir.
- $\omega_2 > b$ ise $\forall x \in (\omega_2, \infty)$ ise $r(x) = 0$'dır.

Üyelik fonksiyonları çeşitli formlarda ifade edilebilmektedir. En sık kullanılan bazı üyelik fonksiyonları, Tablo 1'de özetlenmiştir [2, 13]:

Tablo 1. En Yaygın Kullanılan Bazı Üyelik Fonksiyonları (Şekil 4)

Adlandırma	Üyelik Fonksiyonu	Adlandırma	Üyelik Fonksiyonu
Yamuk	$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ 1 & , \quad b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & , \quad c \le x \le d \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$	Tekil (Singleton)	$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq a \\ 1 & , \quad x = a \end{cases}$
Üçgen	$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ \frac{c-x}{d-b} & , \quad b \le x \le c \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$	Gauss	$\mu(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$ $x \in R, b > 0$



(a) (b)

(c) (d)

Şekil 4. *Üyelik Fonksiyonları: (a) Yamuk, (b) Üçgen, (c) Tekil (singleton), (d) Gauss*.

Bulanık mantık bağlamında, aritmetik işlemler, bulanık sayının temsil edildiği biçime bağlı olarak değişiklik gösterebilir. Klasik mantıktaki gibi, kesin sayıların işlemleri tek bir şekilde gerçekleştirilebilir. Bulanık sayılar, klasik mantığa benzer bir yapıya sahip olduklarından, aritmetik işlemler bu yapıyı dikkate alarak geliştirilmiştir [11, 13, 17-21].

4. ARİTMETİK İŞLEMLER

Bulanık sayılar üzerindeki aritmetik işlemler, klasik sayılarla yapılan işlemlerden geliştirilmiştir. Bulanık sayılar üzerinde toplama ve çıkarma işlemleri değişme ve birleşme özelliklerine sahipken, çarpma ve bölme işlemleri bu özelliklere sahip değildir. Aritmetik işlemleri uygulayabilmek için genellikle genişletme prensibi veya α-kesim yöntemi ele alınır. Bu bölümde bu yöntemler tanıtılarak nasıl uygulandıklarına yönelik örnekler sunulacaktır.

4.1 Genişletme Prensibi ile Aritmetik İşlemler

Kesikli ya da sayılabilir bulanık sayılar aritmetik işlemleri için genişletme prensibi kullanılarak yapılabilir. * herhangi bir aritmetik işlemi temsil etsin. Genişletme prensibini kullanarak bulanık * işlemini gerçekleştirmek için, $x * y = z, x \in \tilde{A}$ ve $y \in \tilde{B}$olacak şekilde $z \in \left(\tilde{A} * \tilde{B}\right)$'nin üyelik değerini elde etmek için aşağıdaki ifade göz önüne alınır [2, 3]:

$$\mu_{\tilde{A}*\tilde{B}}(x) = max\{min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}\}$$

Bu ifade aşağıda verilen örnek üzerinde açıklansın.

Örnek 4: X evrensel kümesinde iki bulanık sayı $\tilde{A} = \{(8,0.4), (11,1), (12,0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(2,0.3), (4,0.6), (5,1), (8,0.7), (10,0.5)\}$ olsun. Genişletme prensibi kullanılarak, temel işlemler aşağıdaki şekilde uygulanabilir:

Toplama:

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{B} = \{&(8+2, \min\{0.4,0.3\}), (8+4, \min\{0.4,0.6\}), (8+5, \min\{0.4,1\}), (8+8, \min\{0.4,0.7\}),\\ &(8+10, \min\{0.4,0.5\}), (11+2, \min\{1,0.3\}), (11+4, \min\{1,0.6\}), (11+5, \min\{1,1\}),\\ &(11+8, \min\{1,0.7\}), (11+10, \min\{1,0.5\}),(12+2, \min\{0.6,0.3\}), (12+4, \min\{0.6,0.6\}),\\ &(12+5, \min\{0.6,1\}), (12+8, \min\{0.6,0.7\}), (12+10, \min\{0.6,0.5\})\}\end{aligned}$$

Yukarıda yapılan işlemlerin sonucunda aşağıdaki toplam elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{B} = \{&(10,0.3), (12,0.4), (13,0.4), (16,0.4), (18,0.4), (13,0.3)(15,0.6), (16,1),(19,0.7), (21,0.5),\\ &(14,0.3), (16,0.6), (17,0.6), (20,0.6), (22,0.5)\}\end{aligned}$$

Genişletme prensibinin tanımına göre, bazı değerler birden fazla üyelik fonksiyonu değerine sahip olduğundan üyelik fonksiyonunun en büyük değeri alınır, yani

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{B} = \{&(10,0.3), (12,0.4), (13, \max(0.4,0.3)), (14,0.3), (15,0.6), (16, \max(0.4,1,0.6))(17,0.6),\\ &(18,0.4), (19,0.7), (20,0.6), (21,0.5), (22,0.5)\}\end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix}(10,0.3), (12,0.4), (13,0.4), (14,0.3), (15,0.6), (16,1), (17,0.6), (18,0.4), (19,0.7), (20,0.6),\\ (21,0.5), (22,0.5)\end{Bmatrix}$$

Yukarıda yapılan tüm işlemler yardımcı tabloların kullanılmasıyla aşağıdaki biçimde yeniden ifade edilebilir.

Tablo 2. Genişletme Prensibi ile İki Bulanık Sayının Toplaması

$\tilde{A}+\tilde{B}$	(2,0.3)	(4,0.6)	(5,1)	(8,0.7)	(10,0.5)
(8,0.4)	10 0.3	12 0.4	13 0.4	~~16~~ ~~0.4~~	18 0.4
(11,1)	~~13~~ ~~0.3~~	15 0.6	16 1	19 0.7	21 0.5
(12,0.6)	14 0.3	~~16~~ ~~0.6~~	17 0.6	20 0.6	22 0.5

Çıkarma: X evrensel bir küme olmak üzere$\tilde{A} = \{(7,0.4), (8,1), (9,0.6)\}$ ve $\tilde{B} = \{(1,0.3), (2,0.6), (3,1), (4,0.7), (5,0.5)\}$ iki bulanık küme yardımcı tablonun kullanılmasıyla çıkarma işlemi aşağıdaki gibi verilir.

Tablo 3. Genişletme Prensibi ile İki Bulanık Sayının Çıkarması

$\tilde{A}-\tilde{B}$	(1,0.3)	(2,0.6)	(3,1)	(4,0.7)	(5,0.5)
(7,0.4)	~~6~~ ~~0.3~~	~~5~~ ~~0.4~~	~~4~~ ~~0.4~~	~~3~~ ~~0.4~~	2 0.4
(8,1)	~~7~~ ~~0.3~~	~~6~~ ~~0.6~~	5 1	4 0.7	3 0.5
(9,0.6)	8 0.6	7 0.6	6 0.6	~~5~~ ~~0.6~~	~~4~~ ~~0.5~~

Bu durumda $\tilde{A} - \tilde{B} = \{(2,0.4), (3,0.5), (4,0.7), (5,1), (6,0.6), (7,0.6), (8,0.6)\}$ olarak hesaplanır.

Çarpma: X evrensel bir küme olmak üzere $\tilde{A} = \{(3,0.2), (4,1), (5,0.8)\}$ ve $\tilde{B} = \{(2,0.1), (3,0.4), (4,1), (5,0.5), (6,0.3)\}$ iki bulanık küme yardımcı tablonun kullanılmasıyla çarpma işlemi aşağıdaki gibi verilir.

Tablo 4. Genişletme Prensibi ile İki Bulanık Sayının Çarpması

$\tilde{A}\cdot\tilde{B}$	(2,0.1)	(3,0.4)	(4,1)	(5,0.5)	(6,0.3)
(3,0.2)	6 0.1	9 0.2	~~12~~ ~~0.2~~	~~15~~ ~~0.2~~	18 0.2
(4,1)	8 0.1	12 0.4	16 1	~~20~~ ~~0.5~~	24 0.3
(5,0.8)	10 0.1	15 0.4	20 0.8	25 0.5	30 0.3

Bu durumda $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(6,0.1), (8,0.1), (9,0.2), (10,0.1), (12,0.4), (15,0.4), (16,1),(18,0.2), (24,0.3), (25,0.5), (30,0.3)\}$ olarak hesaplanır.

Bölme: X evrensel bir küme olmak üzere $\tilde{A} = \{(10{,}0.5), (12{,}1), (14{,}0.4)\}$ ve $\tilde{B} = \{(2{,}0.6), (5{,}1), (6{,}0.3)\}$ iki bulanık küme yardımcı tablonun kullanılmasıyla bölme işlemi aşağıdaki gibi verilir.

Tablo 5. Genişletme Prensibi ile İki Bulanık Sayının Bölmesi

$\tilde{A}/\tilde{B}$	(2,0.6)	(5,1)	(6,0.3)
(10,0.5)	5 0.5	2 0.5	1.67 0.3
(12,1)	6 0.6	2.4 1	~~2~~ ~~0.3~~
(14,0.4)	7 0.4	2.8 0.4	2.33 0.3

Bu durumda $\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \{(1.67{,}0.3), (2{,}0.5), (2.33{,}0.3), (2.4{,}1), (2.8{,}0.4), (5{,}0.5), (6{,}0.6), (7{,}0.4)\}$ olarak hesaplanır.

4.2 α-kesim ile Aritmetik İşlemler

Bulanık sayılar üzerindeki aritmetik işlemleri yapabilmek için kullanılan diğer bir yöntem olan α-kesim yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanır [22]:

Varsayalım ki $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık sayı olsun ve * işareti temel aritmetik işlemleri temsil etsin. Bu durumda $\tilde{A} * \tilde{B}$ işlemi.

$$\tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\tilde{A}_\alpha * \tilde{B}_\alpha\right) = \left\{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)) : \exists y, z; x = y * z, y \in \tilde{A}, z \in \tilde{B}\right\} \tag{10}$$

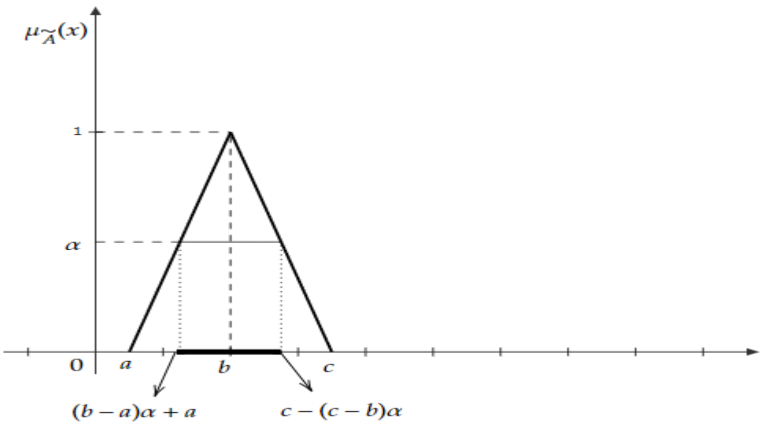
ile verilir. * işareti için bölme işlemi göz önüne alınırsa $0 \notin \tilde{B}_\alpha$ olacağı açıktır.

Bulanık sayıların üzerindeki aritmetik işlemleri daha açık bir şekilde açıklayabilmek amacıyla üçgen bulanık sayıları ele alarak işlemlere devam edilecektir.$\tilde{A} = (a, b, c)$bir üçgensel bulanık sayı olsun. $\tilde{A}$ sayının üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & ; \quad a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & ; \quad b \le x \le c \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases} \tag{11}$$

ile verilir. α-kesim yönteminin tanımına göre, $\tilde{A}$ bulanık sayısının α-kesim kümesi bir aralık tanımlar. $\tilde{A}$ üçgen bulanık sayının α'ya göre sol ve sağ referans fonksiyonları sırasıyla $\alpha = \frac{x-a}{b-a}$ ve $\alpha = \frac{c-x}{c-b}$ olarak ifade edilir. Burada $\alpha \in [0,1]$'dir. Bu durumda α'ya göre karşılık gelen x değerleri $x = (b-a)\alpha + a$ ve $x = c - (c-b)\alpha$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla üçgen bulanık sayının α-kesimi $\tilde{A}_\alpha =$

$[(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha]$gibi elde edilir.



Şekil 5. *Üçgen Bulanık Sayının α-Kesimi*

$\alpha=0$ alındığında $\tilde{A}_0=[a,c]$ ve $\alpha=1$ olduğunda $\tilde{A}_1=[b,b]=b$ olacağını açıktır. Sol ve sağ uzunluklar birbirine eşit ise bulanık sayı simetrik olur.

Bulanık sayılar pozitif, negatif veya kısmi negatif olabilirler. Örneğin, $\tilde{A}=(a,b,c)$ üçgen bulanık sayısı için [23]:

- $a>0$ olduğunda $\tilde{A}$ pozitiftir.
- $c<0$ olduğunda $\tilde{A}$ negatiftir.
- $a<0$ ve (($b<0$ ve $c>0$) veya (($b>0$ ve $c>0$)) olduğunda $\tilde{A}$ kısmi negatif bir sayıdır.

α-kesim ile aritmetik işlemler aşağıdaki adımlar takip edilerek gerçekleştirilir [2, 3, 18, 24]:

1. Bulanık sayıların α-kesimleri bulunur.
2. Aralık aritmetiği kuralları göz bulundurularak işlem gerçekleştirilir.
3. Elde edilen sonucun, α değerine bağlı olarak sağ ve sol sınırları, yani x değerleri hesaplanır.
4. Elde edilen sonucun α değerine göre, aralıklar üzerindeki üyelik fonksiyonu değerleri hesaplanır.
5. Yapılan işlemin üyelik fonksiyonu hesaplanır.

$\tilde{A}=(a,b,c)$ ve $\tilde{B}=(l,m,n)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun. Bu iki sayının üyelik fonksiyonları, aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & ; \quad a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & ; \quad b\le x\le c\\ 0 & ; \quad d.d.\end{cases} \quad \mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-l}{m-l} & ; \quad l\le x\le m\\ \dfrac{n-x}{n-m} & ; \quad m\le x\le n\\ 0 & ; \quad d.d.\end{cases}$$

Önerilen adımlara göre; $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayılarının α-kesimleri sırasıyla $\tilde{A}_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$ ve $\tilde{B}_\alpha = [(m-l)\alpha + l, n-(n-m)\alpha]$ olarak bulunur. Şimdi bu α-kesimleri kullanılarak bazı aritmetik işlemler üzerinde yukardaki adımlarının nasıl uygulanacağını açıklayalım:

Toplama:

Adım 2.$\tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] + [(m-l)\alpha + l, n-(n-m)\alpha]$
$= [(b-a+m-l)\alpha + a + l, c + n - (c-b+n-m)\alpha]$

Adım 3.$x = (b-a+m-l)\alpha + a + l$ ve $x = c + n - (c-b+n-m)\alpha$

Adım 4.$\alpha = \frac{x-(a+l)}{(b+m)-(a+l)}; (a+l) \leq x \leq (b+m)$ ve $\alpha = \frac{(c+n)-x}{(c+n)-(b+m)}; (b+m) \leq x \leq (c+n)$

Adım 5.$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x-(a+l)}{(b+m)-(a+l)} & ; \quad (a+l) \leq x \leq (b+m) \\ \frac{(c+n)-x}{(c+n)-(b+m)} & ; \quad (b+m) \leq x \leq (c+n) \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Çıkarma:

Adım 2.$\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] - [(m-l)\alpha + l, n-(n-m)\alpha]$
$= \left[(b-a)\alpha + a - (n-(n-m)\alpha), c-(c-b)\alpha - \left((m-l)\alpha - l\right)\right]$
$= [(a-n) + (b-a+n-m)\alpha, (c-l) - (c-b+m-l)\alpha]$

Adım 3.$x = (a-n) + (b-a+n-m)\alpha$ ve $x = (c-l) - (c-b+m-l)\alpha$

Adım 4.$\alpha = \frac{x-(a-n)}{(b-m)-(a-n)}; (a-n) \leq x \leq (b-m)$ ve $\alpha = \frac{(c-l)-x}{(c-l)-(b-m)}; (b-m) \leq x \leq (c-l)$

Adım 5.$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x-(a-n)}{(b-m)-(a-n)} & ; \quad (a-n) \leq x \leq (b-m) \\ \frac{(c-l)-x}{(c-l)-(b-m)} & ; \quad (b-m) \leq x \leq (c-l) \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Çarpma:Çarpma işlemi, pozitif ve pozitif olmayan sayılar için farklı sonuçlar üretebilir. $\tilde{A}$ve$\tilde{B}$ iki pozitif bulanık sayı olarak kabul edilsin, yani $\tilde{A}$ için $a > 0$ ve $\tilde{B}$ için $l > 0$ olsun.

Adım 2.$\tilde{A}_\alpha \cdot \tilde{B}_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot [(m-l)\alpha + l, n-(n-m)\alpha]$
$= \left[\left((b-a)\alpha + a\right) \cdot \left((m-l)\alpha + l\right), (c-(c-b)\alpha) \cdot (n-(n-m)\alpha)\right]$

Adım 3.$x = (b-a)(m-l)\alpha^2 + \left((b-a)l + (m-l)a\right)\alpha + al$
$x = (c-b)(n-m)\alpha^2 - \left((n-m)c + (c-b)n\right)\alpha + cn$

Adım 4.$\alpha = \frac{-\left((b-a)l+(m-l)a\right)+\sqrt{\left((b-a)l+(m-l)a\right)^2-4(b-a)(m-l)(al-x)}}{2(b-a)(m-l)}$ $; al \leq x \leq bm$

$$\alpha = \frac{\left((n-m)c + (c-b)n\right) - \sqrt{\left((n-m)c + (c-b)n\right)^2 - 4(c-b)(n-m)(cn-x)}}{2(c-b)(n-m)}$$
$; bm \leq x \leq cn$

Adım 5.$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{-\left((b-a)l+(m-l)a\right)+\sqrt{\left((b-a)l+(m-l)a\right)^2-4(b-a)(m-l)(al-x)}}{2(b-a)(m-l)} & ; \quad al \leq x \leq bm \\ \frac{\left((n-m)c+(c-b)n\right)-\sqrt{\left((n-m)c+(c-b)n\right)^2-4(c-b)(n-m)(cn-x)}}{2(c-b)(n-m)} & ; \quad bm \leq x \leq cn \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bölme: Çarpma işlemi gibi bölme işlemi de pozitif ve pozitif olmayan sayılar için işlemlerde farklı sonuçlar üretebilir. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki pozitif bulanık sayı olarak kabul edilsin, yani $\tilde{A}$ için $a > 0$ ve $\tilde{B}$ için $l > 0$ olsun.

Adım 2. $\frac{\tilde{A}_\alpha}{\tilde{B}_\alpha} = \frac{[(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha]}{[(m-l)\alpha+l, n-(n-m)\alpha]} = \left[\frac{(b-a)\alpha+a}{n-(n-m)\alpha}, \frac{c-(c-b)\alpha}{(m-l)\alpha+l}\right]$

Adım 3. $x = \frac{(b-a)\alpha+a}{n-(n-m)\alpha}$ ve $x = \frac{c-(c-b)\alpha}{(m-l)\alpha+l}$

Adım 4. $\alpha = \frac{xn-a}{(b-a)+(n-m)x}$; $\frac{a}{n} \le x \le \frac{b}{m}$ ve $\alpha = \frac{c-lx}{(c-b)+(m-l)x}$; $\frac{b}{m} \le x \le \frac{c}{l}$

Adım 5. $\mu_{\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}}(x) = \begin{cases} \frac{xn-a}{(b-a)+(n-m)x} & ; \quad \frac{a}{n} \le x \le \frac{b}{m} \\ \frac{c-lx}{(c-b)+(m-l)x} & ; \quad \frac{b}{m} \le x \le \frac{c}{l} \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bulanık sayının tersi: $\tilde{A}$ pozitif bir sayı olsun. ($a > 0$ olmak üzere)

Adım 2. $\frac{1}{\tilde{A}_\alpha} = \frac{1}{[(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha]} = \left[\frac{1}{c-(c-b)\alpha}, \frac{1}{(b-a)\alpha+a}\right]$

Adım 3. $x = \frac{1}{c-(c-b)\alpha}$ ve $x = \frac{1}{(b-a)\alpha+a}$

Adım 4. $\alpha = \frac{cx-1}{x(c-b)}$; $\frac{1}{c} \le x \le \frac{1}{b}$ ve $\alpha = \frac{1-ax}{x(b-a)}$; $\frac{1}{b} \le x \le \frac{1}{a}$

Adım 5. $\mu_{\frac{1}{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{cx-1}{x(c-b)} & ; \quad \frac{1}{c} \le x \le \frac{1}{b} \\ \frac{1-ax}{x(b-a)} & ; \quad \frac{1}{b} \le x \le \frac{1}{a} \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bulanık sayının üstel formu: $\tilde{A}$ pozitif bir sayı olsun. ($a > 0$ olmak üzere)

Adım 2. $e^{\tilde{A}_\alpha} = e^{[(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha]} = \left[e^{(b-a)\alpha+a}, e^{c-(c-b)\alpha}\right]$

Adım 3. $x = e^{(b-a)\alpha+a}$ ve $x = e^{c-(c-b)\alpha}$

Adım 4. $\alpha = \frac{\ln(x)-a}{b-a}$; $e^a \le x \le e^b$ ve $\alpha = \frac{c-\ln(x)}{c-b}$; $e^b \le x \le e^c$

Adım 5. $\mu_{e^{\tilde{A}}} = \begin{cases} \frac{\ln(x)-a}{b-a} & ; \quad e^a \le x \le e^b \\ \frac{c-\ln(x)}{c-b} & ; \quad e^b \le x \le e^c \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bulanık sayının logaritma formu: $\tilde{A}$ pozitif bir sayı olsun. ($a > 0$ olmak üzere)

Adım 2. $\mathrm{Ln}(\tilde{A}_\alpha) = \ln([(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha]) = [\ln((b-a)\alpha+a), \ln(c-(c-b)\alpha)]$

Adım 3. $x = \ln((b-a)\alpha+a)$ ve $x = \ln(c-(c-b)\alpha)$

Adım 4. $\alpha = \frac{e^x-a}{b-a}$; $\ln(a) \le x \le \ln(b)$ ve $\alpha = \frac{c-e^x}{c-b}$; $\ln(b) \le x \le \ln(c)$

Adım 5. $\mu_{\ln(\tilde{A})} = \begin{cases} \frac{e^x-a}{b-a} & ; \quad \ln(a) \le x \le \ln(b) \\ \frac{c-e^x}{c-b} & ; \quad \ln(b) \le x \le \ln(c) \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

n. dereceden kökü: $\tilde{A}$ pozitif bir sayı olsun. ($a > 0$ olmak üzere)

Adım 2.$\sqrt[n]{\tilde{A}_\alpha} = \sqrt[n]{[(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha]} = \left[\sqrt[n]{(b-a)\alpha+a}, \sqrt[n]{c-(c-b)\alpha}\right]$
Adım 3.$x = \sqrt[n]{(b-a)\alpha+a}$ ve $x = \sqrt[n]{c-(c-b)\alpha}$
Adım 4.$\alpha = \frac{x^n-a}{b-a}$; $\sqrt[n]{a} \leq x \leq \sqrt[n]{b}$ ve $\alpha = \frac{c-x^n}{c-b}$; $\sqrt[n]{b} \leq x \leq \sqrt[n]{c}$
Adım 5.$\mu_{\sqrt[n]{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{x^n-a}{b-a} & ; \quad \sqrt[n]{a} \leq x \leq \sqrt[n]{b} \\ \frac{c-x^n}{c-b} & ; \quad \sqrt[n]{b} \leq x \leq \sqrt[n]{c} \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

olur. Şimdi, yukarıda sunulan işlemleri bir örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 5: $\tilde{A} = (2,4,9)$ ve $\tilde{B} = (3,8,10)$ iki üçgen bulanık sayı olsun. ($a > 0$ ve $f > 0$ olduğundan bu iki bulanık sayının pozitif olduğu açıktır)

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayının α-kesimleri, $\tilde{A}_\alpha = [2\alpha+2, 9-5\alpha]$ ve $\tilde{B}_\alpha = [5\alpha+3, 10-2\alpha]$ olarak bulunur.

Toplama:

Adım 2.$\tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha = [7\alpha+5, 19-7\alpha]$
Adım 3.$x = 7\alpha+5$ ve $x = 19-7\alpha$
Adım 4.$\alpha = \frac{x-5}{7}$; $5 \leq x \leq 12$ ve $\alpha = \frac{19-x}{7}$; $12 \leq x \leq 19$
Adım 5.$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{7} & ; \quad 5 \leq x \leq 12 \\ \frac{19-x}{7} & ; \quad 12 \leq x \leq 19 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Çıkarma:

Adım 2.$\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha = [-8+4\alpha, 6-10\alpha]$
Adım 3.$x = -8+4\alpha$ ve $x = 6-10\alpha$
Adım 4.$\alpha = \frac{x+8}{4}$; $-8 \leq x \leq -4$ ve $\alpha = \frac{6-x}{10}$; $-4 \leq x \leq 6$
Adım 5.$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x+8}{4} & ; \quad -8 \leq x \leq -4 \\ \frac{6-x}{10} & ; \quad -4 \leq x \leq 6 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Çarpma:

Adım 2.$\tilde{A}_\alpha.\tilde{B}_\alpha = [10\alpha^2+16\alpha+6, 10\alpha^2+68\alpha+90]$
Adım 3.$x = 10\alpha^2+16\alpha+6$ ve $x = 10\alpha^2+68\alpha+90$
Adım 4.$\alpha = \frac{-16+\sqrt{256-40(6-x)}}{20}$; $6 \leq x \leq 32$ ve $\alpha = \frac{68-\sqrt{4624-40(90-x)}}{20}$; $32 \leq x \leq 90$
Adım 5.$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{-16+\sqrt{256-40(6-x)}}{20} & ; \quad 6 \leq x \leq 32 \\ \frac{68-\sqrt{4624-40(90-x)}}{20} & ; \quad 32 \leq x \leq 90 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bölme:

Adım 2. $\frac{\tilde{A}_\alpha}{\tilde{B}_\alpha} = \left[\frac{2\alpha+2}{10-2\alpha}, \frac{9-5\alpha}{5\alpha+3}\right]$
Adım 3. $x = \frac{2\alpha+2}{10-2\alpha}$ ve $x = \frac{9-5\alpha}{5\alpha+3}$
Adım 4. $\alpha = \frac{10x-2}{2+2x}$; $0.2 \leq x \leq 0.5$ ve $\alpha = \frac{9-3x}{5+5x}$; $0.5 \leq x \leq 3$
Adım 5. $\mu_{\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}}(x) = \begin{cases} \frac{10x-2}{2+2x} & ; \quad 0.2 \leq x \leq 0.5 \\ \frac{9-3x}{5+5x} & ; \quad 0.5 \leq x \leq 3 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bulanık sayının tersi:

Adım 2. $\frac{1}{\tilde{A}_\alpha} = \left[\frac{1}{9-5\alpha}, \frac{1}{2\alpha+2}\right]$
Adım 3. $x = \frac{1}{9-5\alpha}$ ve $x = \frac{1}{2\alpha+2}$
Adım 4. $\alpha = \frac{9x-1}{5x}$; $\frac{1}{9} \leq x \leq 0.25$ ve $\alpha = \frac{1-2x}{2x}$; $0.25 \leq x \leq 0.5$
Adım 5. $\mu_{\frac{1}{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{9x-1}{5x} & ; \quad \frac{1}{9} \leq x \leq 0.25 \\ \frac{1-2x}{2x} & ; \quad 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & ; \quad d.d \end{cases}$

Bulanık sayının üstel formu:

Adım 2. $e^{\tilde{A}_\alpha} = [e^{2\alpha+2}, e^{9-5\alpha}]$
Adım 3. $x = e^{2\alpha+2}$ ve $x = e^{9-5\alpha}$
Adım 4. $\alpha = \frac{\ln(x)-2}{2}$; $e^2 \leq x \leq e^4$ ve $\alpha = \frac{9-\ln(x)}{5}$; $e^4 \leq x \leq e^9$
Adım 5. $\mu_{e^{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)-2}{2} & ; \quad e^2 \leq x \leq e^4 \\ \frac{9-\ln(x)}{5} & ; \quad e^4 \leq x \leq e^9 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bulanık sayının logaritma formu:

Adım 2. $\ln(\tilde{A}_\alpha) = [\ln(2\alpha+2), \ln(9-5\alpha)]$
Adım 3. $x = \ln(2\alpha+2)$ ve $x = \ln(9-5\alpha)$
Adım 4. $\alpha = \frac{e^x-2}{2}$; $\ln(2) \leq x \leq \ln(4)$ ve $\alpha = \frac{9-e^x}{5}$; $\ln(4) \leq x \leq \ln(9)$
Adım 5. $\mu_{\ln(\tilde{A})}(x) = \begin{cases} \frac{e^x-2}{2} & ; \quad \ln(2) \leq x \leq \ln(4) \\ \frac{9-e^x}{5} & ; \quad \ln(4) \leq x \leq \ln(9) \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

n. dereceden kökü:

Adım 2. $\sqrt[n]{\tilde{A}_\alpha} = \left[\sqrt[n]{2\alpha+2}, \sqrt[n]{9-5\alpha}\right]$
Adım 3. $x = \sqrt[n]{2\alpha+2}$ ve $x = \sqrt[n]{9-5\alpha}$
Adım 4. $\alpha = \frac{x^n-2}{2}$; $\sqrt[n]{2} \leq x \leq \sqrt[n]{4}$ ve $\alpha = \frac{9-x^n}{5}$; $\sqrt[n]{4} \leq x \leq \sqrt[n]{9}$

Adım 5. $\mu_{\sqrt[n]{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{x^n-2}{2} & ; \quad \sqrt[n]{2} \leq x \leq \sqrt[n]{4} \\ \frac{9-x^n}{5} & ; \quad \sqrt[n]{4} \leq x \leq \sqrt[n]{9} \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

Bulanık sayıların kullanımı, çalışma alanlarına göre farklılık gösterecektir. Aşağıda, gerçek dünya problemlerine göre ele alınan örnekler için yukarıda tanıtılan kavramlar kullanılarak iki örnek sunulacaktır. İlk örnekte genişletme prensibi, ikinci örnekte ise α-kesim yöntemi ele alınacaktır.

Örnek 6: Bir firma, müşterilerine sunduğu Hizmet A ve Hizmet B ile ilgili olarak müşterilerinin memnuniyet seviyelerini belirlemek istesin. Bunun için müşteri memnuniyet ölçümlerindeki belirsizliği modelleyebilmek amacıyla $\tilde{A}$, Hizmet A ile ilgili memnuniyeti ve $\tilde{B}$, Hizmet B ile ilgili memnuniyeti temsil eden bulanık sayılar olarak ele alınsın.

Hizmet A ile Müşteri Memnuniyeti: $\tilde{A} = \{(80,0.9),(60,1),(40,0.7)\}$.
Hizmet B ile Müşteri Memnuniyeti: $\tilde{B} = \{(70,0.8),(50,1),(30,0.6)\}$.

$\tilde{A}$, mümkün olan memnuniyet seviyelerini ve bunların ilişkilendirilmiş üyelik derecelerini içerir. Üyelik fonksiyonu değerleri, uzmanlar tarafından yapılan önceki hizmet değerlendirmeleri ve bazı değerlendirme ölçütleri kullanılarak hesaplanmıştır. Hizmet A için 80, 60, 40 değerleri üç yeni müşterinin değerlendirme puanlarını ifade etmektedir. Ayrıca, bu değerlere ilişkin üyelik değerleri, önceki anketlerden elde edilen verilere dayanarak belirli ölçülere göre hesaplanmıştır. Bu hesaplamada, önceki dönemlerde her bir puanı veren müşteri sayısı da dikkate alınmıştır. Örneğin, 60 puan, müşteriler tarafından en çok verilen puan olmak üzere 300 kişinin 60 puan verdiğini ve aynı değerlendirme döneminde 270 kişinin de 80 puan verdiğini varsayalım. Bu değerlendirmeleri göz önüne alarak 60 puan için 1 ve 80 puan için 0.9 üyelik değerleri atanabilir. Bu atama yapılırken 300 ve 270 sayıları arasındaki oran dikkate alınmıştır. Benzer yöntemle Hizmet B için de üyelik fonksiyonu değerleri atanmıştır.

Şimdi bu iki sayı için bazı aritmetik işlemlerin sonuçları aşağıdaki gibidir:

Toplam $\tilde{A} + \tilde{B} = \{(70,0.6),(90,0.7),(110,1),(130,0.9),(150,0.8)\}$, Hizmet A ve Hizmet B ile müşteri memnuniyetinin birleşik seviyesini temsil eder. İki bulanık sayının toplamı, memnuniyet seviyelerin toplamı gösterir.

Çıkarma $\tilde{A} - \tilde{B} = \{(-30,0.7),(-10,0.7),(10,0.6),(30,0.6),(50,0.6)\}$, Hizmet A ve Hizmet B ile müşteri memnuniyeti seviyeleri arasındaki potansiyel farklılık veya sapmayı temsil eder. İki bulanık sayı arasındaki fark, memnuniyet seviyeleri arasındaki belirsizliği içerir.

Çarpma $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(1200{,}0.6), (1800{,}0.6), (2000{,}0.7), (2400{,}0.6), (2800{,}0.7), (3000{,}1), (4000{,}0.9), (4200{,}0.8), (5600{,}0.8)\}$ Hizmet A ve Hizmet B ile müşteri memnuniyeti seviyelerinin birleşik etkisini temsil eder. Bu iki bulanık sayının çarpımı, bulanık sayıların ayrık doğasını göz önünde bulundurarak memnuniyet seviyelerinin potansiyel etkileşimlerini gösterir.

Bölme $\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \{(0.57{,}0.7), (0.8{,}0.7), (0.86{,}0.8), (1.14{,}0.8), (1.2{,}1), (1.33{,}0.6), (1.6{,}0.9), (2.7{,}0.6), (2{,}0.6)\}$, Hizmet A ve Hizmet B ile müşteri memnuniyeti seviyeleri arasındaki oranı veya orantıyı temsil eder. Bu iki sayının oranı, iki hizmetteki memnuniyet seviyelerinin göreceli büyüklüklerini ve ilişkili belirsizlikleri yansıtır.

Şimdi α-kesim yöntemi için aşağıdaki örnek ele alınsın.

Örnek 7: Belirli bir ürüne ait üretim süreci ele alınsın. Bu ürün iki farklı üretim hattı kullanılarak üretilsin ve üretim miktarlarındaki belirsizliği temsil etmek amacıyla iki üçgensel bulanık sayı kullanılsın.

A Hattı için: $\tilde{A} = (12{,}13{,}14)$.
B Hattı için: $\tilde{B} = (11{,}12{,}13)$.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, iki farklı üretim hattı için tahmin edilen üretim miktarını temsil eder, yani üretim tahminlerindeki belirsizliği tespit etmek için bu üçgensel bulanık sayılar ele alındığında $\tilde{A}$ için 12 değeri birim cinsinden minimum değeri, 13 değeri mod ve 14 değeri de maksimum üretim miktarını temsil eder. Benzer olarak $\tilde{B}$ için 11 değeri birim cinsinden minimum değeri, 12 değeri mod ve 13 değeri de maksimum üretim miktarını temsil eder. Bununla birlikte bu iki sayıya ait üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-12 & ; \quad 12 \leq x \leq 13 \\ 14-x & ; \quad 13 \leq x \leq 14 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}, \qquad \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x-11 & ; \quad 11 \leq x \leq 12 \\ 13-x & ; \quad 12 \leq x \leq 13 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

Bu iki sayının toplamı, her iki üretim hattındaki mümkün toplam üretim miktarını temsil eder.

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-23}{2} & ; \quad 23 \leq x \leq 25 \\ \dfrac{27-x}{2} & ; \quad 25 \leq x \leq 27 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

Bu iki sayının farkı, iki üretim hattı için üretim miktarların arasındaki farkı ifade edecektir.

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{3-x}{2} & ; \quad 1 \le x \le 3 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

Bu iki sayının çarpımı, her iki üretim hattındaki üretim miktarlarının birleşik etkisini veya etkileşimini gösterecektir.

$$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \dfrac{-23+\sqrt{529-4(132-x)}}{2} & ; \quad 132 \le x \le 156 \\ \dfrac{27-\sqrt{729-4(182-x)}}{2} & ; \quad 156 \le x \le 182 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

Bu iki sayının oranı, iki hat arasındaki üretim miktarlarının oranını veya orantısını ifade edecektir.

$$\mu_{\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}}(x) = \begin{cases} \dfrac{13x-12}{1+x} & ; \quad \dfrac{12}{13} \le x \le \dfrac{13}{12} \\ \dfrac{14-11x}{1+x} & ; \quad \dfrac{13}{12} \le x \le \dfrac{14}{11} \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

$\tilde{A}$ sayının üstel formu, A üretim hattı çıkış değerlerinin büyüme faktörünü değerlendirmemize imkan sağlayacaktır.

$$\mu_{e^{\tilde{A}}} = \begin{cases} \ln(x) - 12 & ; \quad e^{12} \le x \le e^{13} \\ 14 - \ln(x) & ; \quad e^{13} \le x \le e^{14} \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

5. SONUÇLAR

Bu çalışma, bulanık mantığın temel prensiplerini ele alarak bulanık küme ve sayıların aritmetik işlemlerle uygulanmasının önemi vurgulamıştır. Geleneksel mantık ile karşılaştırıldığında, bulanık mantığın daha fazla bilgi sunma kapasitesine sahip olduğu açıkça görülmüştür. Bu durum, özellikle belirsizlik içeren veya kesin sınırların belirlenmesinin zor olduğu durumlar için büyük bir avantaj sunar. Bulanık sayılar, geniş bir aralığı temsil edebilme yeteneği sayesinde gerçek dünyadaki belirsizlikleri ve karmaşıklıkları daha iyi ifade edebilirler. Ancak, bu esnekliğin bir sonucu olarak, bulanık sayıların farklı biçimlerde ifade edilebileceği ve kullanılabileceği unutulmamalıdır. Kesin sayılar kullanıldığında, elde edilebilecek ek bilgilerin kaybedileceği bir durum ortaya çıkabilir. Bu, bulanık sayılarla ifade edilen belirsizlik ve esneklik özelliklerine kıyasla önemli bir sınırlamayı temsil eder.

Bu çalışmanın öne çıkardığı temel amaç, bulanık mantığın temel prensiplerini kavramak ve bu prensipleri aritmetik işlemlerle etkili bir şekilde bütünleştirmektir. Aritmetik işlemler, yazılım araçları kullanılarak hızlıca gerçekleştirilebilir olsa da bu işlemlerin nasıl gerçekleştirildiğini anlamak, araştırmacılara daha fazla bilgi ve içgörü sağlar. Dolasıyla bu çalışma, bulanık mantığın temel prensiplerini derinlemesine anlamayı hedeflemektedir. Bu anlayış, bilim ve mühendislik alanlarındaki uygulamalara önemli katkılar sunabilir ve gelecekteki çalışmalar için sağlam bir temel oluşturabilir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

ETİK BEYANI

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

YAZARLARIN KATKILARI

Yazarların makaleye katkıları eşit orandadır.

KAYNAKLAR

[1] A. A. Vargeloğlu, “Sezgisel kümelere dayalı bulanık regresyon analizi ve uygulamaları,” Yüksek lisans tezi, İstatistik, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 2020.

[2] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, 1965

[3] L. A. Zadeh, “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I,” *Information Sciences*, vol. 8, no. 3, pp. 199-249, 1975.

[4] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and its Applications*. New York, Jersey: Prentice Hall PTR, 1995.

[5] N. Baykal and T. Beyan, *Bulanık Mantık Uzman Sistemler ve Denetleyiciler*.1st ed, Ankara: Bıçaklar Kitabevi, 2004.

[6] M. B. Başkır, “Bulanık kalite fonksiyon yayılımı yaklaşımının iyileştirilmesi ve uygulamaları,” Doktora tezi, İstatistik, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye,2011.

[7] J. C. Bezdek, “Numerical taxonomy with fuzzy sets,” *Journal of Mathematical Biology*, vol. 1, pp. 57-71, 1974.

[8] E. H. Mamdani and S. Assilian, “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller,” *International Journal of Human-Computer Studies*, vol. 51, no. 2, pp. 135-147, 1999.

[9] P. Hajek, L. Godo and F. Esteva, "Fuzzy logic and probability," presented at Eleventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Canada, from August 18th to August 20th, pp. 237-244, 1995.

[10] J. Lukasiewicz, "Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls [Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic],"Comptes Rendus Des Séances De La Société Des Sciences Et Des Lettres De Varsovie Cl III, vol. 23, pp. 51–77, 1930.

[11] D. Dubois and H. Prade, "Operations in a fuzzy-valued logic," *Information and Control*, vol. 43, no. 2, pp. 224-240, 1979.

[12] W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik,"*Z. Physik*, vol. 43, pp. 172–198, 1927.

[13] O. Castilloand P. Melin, "Type-1 fuzzy logic,"in Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications, Berlin, Heidelberg:Springer,2008.

[14] D. Duboisand H. Prade, "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications,"United States of America: Academic Press INC,1980.

[15] Y. Kocatürk, "Bulanık değişkenler ve bulanık yenileme süreçleri," Yüksek lisans tezi, İstatistik, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 2007.

[16] C. Bectorand S. Chandra, "Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games," Studies in Fuzziness and Soft Computing, Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2005.

[17] L. Stefaniniand M. L. Guerra, "On fuzzy arithmetic operations: Some properties and distributive approximations," *Int. J. Appl. Math*, vol. 19, pp. 171–199, 2007.

[18] S. Chandrasekaranand E.-. Tamilmani, "Arithmetic operation of fuzzy numbers usingα-cut method," *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, vol. 2, no. 10, pp. 299-315, 2015.

[19] A. M. Shapique, "Arithmetic operations on heptagonal fuzzy numbers," *Asian Research Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 5, pp. 1-25, 2017.

[20] E. H. Eljaoui, S. Melliani, and L. S. Chadli, "Multiplication operations and powers of trapezoidal fuzzy numbers," *Journal of Universal Mathematics*, vol. 1, no. 2, pp. 204-215, 2018.

[21] P. Jayasriand P. Elavarasi, "Fuzzy set theoryand arithmetic operations on fuzzy numbers," *International Journal of Scientific Research and Management*, vol. 6, no. 2, pp. 2321-3418, 2018.

[22] I. M. Musa, "Investigation of basic concepts of fuzzy arithmetic," Master of Science, Applied Mathematics and Computer Science, Eastern Mediterranean University, Gazimağusa, North Cyprus, 2015.

[23] M. Y. Ali, A. Sultan, and A.F.M.K. Khan, "Comparison of fuzzy multiplication operation on triangular fuzzy numbers," *IOSR Journal of Mathematics*, vol. 12, no. 4, pp. 35-41, 2016.

[24] R. Chutia, S. Mahanta, and H.K. Baruah, "An alternative method of finding the membership of a fuzzy numbers," *International Journal of Latest Trends in Computing*, vol. 1, no. 2, 2010